Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Г. Афанасьева, Е. Е. Баштова, Вероятности больших уклонений для системы обслуживания с регенерирующим входящим потоком, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2015, том 60, выпуск 1, 171–177

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4612>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 13:40:18

4. Mandelbrot B. B., Van Ness J. W. Fractional Brownian motions, fraxtional noises and applications. — SIAM Rev., 1968, v. 10, № 4, p. 422–437.
5. Peskir G., Shiryaev A. Optimal Stopping and Free-Boundary Problems. ETH Zürich: Springer, 2006, 502 p.
6. Norros I., Valkeila E., Virtamo J. An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian motions. — Bernoulli, 1999, v. 5, № 4, p. 571–587.
7. Колмогоров А. Н. Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве. — Докл. АН СССР, 1940, т. 26, с. 115–118.
8. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов: Нелинейная фильтрация и смежные вопросы. М.: Наука, 1974, 696 с.

Поступила в редакцию
12.II.2015

© 2015 г.

АФАНАСЬЕВА Л. Г.* , БАШТОВА Е. Е.*

ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С РЕГЕНЕРИРУЮЩИМ ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ¹⁾

Рассматривается одноканальная система обслуживания с неограниченной очередью и регенерирующим входящим потоком. Получены условия, при которых существует ненулевой логарифмический предел для вероятностей больших отклонений времени ожидания в стационарном режиме. Показано, что асимптотическое поведение большой очереди в стационарном режиме определяется совместным распределением периода регенерации входящего потока и числа требований, поступивших за этот период, и не зависит от распределения моментов поступления требований на периоде регенерации.

Ключевые слова и фразы: большие отклонения, регенерирующий поток, время ожидания.

1. Введение. Вопросам больших отклонений для распределений функционалов, заданных на траекториях случайных процессов, в частности случайных блужданий, цепей Маркова и процессов восстановления, посвящена обширная литература (см., например, [2], [7], [8], [10], [11] и библиографию в этих работах). Как отмечено в [8], для теории очередей эти вопросы важны не только в теоретическом плане, но и с прикладной точки зрения. Оценка вероятности неприемлемо большой очереди, например, в системе $G|G|r|\infty$ позволяет обосновать необходимость принятия тех или иных организационных решений (таких как добавление прибора, увеличение скорости обслуживания, установка буфера конечного объема и т.п.).

Мы рассматриваем одноканальную систему обслуживания с регенерирующим входящим потоком, являющимся обобщением многих процессов, обычно используемых в теории массового обслуживания для описания входящих потоков. Основная цель исследования — определение условий, при которых существует ненулевой логарифмический предел для вероятностей больших отклонений виртуального времени ожидания $W(t)$ в стационарном режиме. Рассматриваются также время ожидания

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Москва, Россия; e-mail: afanas@mech.math.msu.su; bashtovaelena@rambler.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-01-00653).

n -го требования w_n и суммарное остаточное время обслуживания W_n требований, находящихся в системе в момент начала n -го периода регенерации входящего потока. В предположении, что выполнено условие эргодичности [4], доказывается предельная теорема о больших отклонениях этих процессов. Наш анализ является обобщением хорошо известной характеристики большой очереди в системе $GI|GI|1|∞$, полученной с помощью экспоненциального изменения меры и результатов теории восстановления ([3, гл. XII], [1, гл. 4]).

При исследовании больших отклонений для стационарного распределения процесса w_n мы опираемся на тот факт, что последовательность интервалов между поступлениями требований регенерирующего потока слабо сходится к стационарной [4]. Это позволяет использовать теорему для систем со стационарной управляющей последовательностью из [8]. Проверка ее условий основана на асимптотике решения уравнения восстановления с несобственной функцией распределения [3, гл. XI].

Оказалось, что асимптотическое поведение большой очереди в стационарном режиме определяется совместным распределением периода регенерации τ_j и числа требований ξ_j , поступивших на нем. Это означает, что в области больших отклонений скорость роста очереди с регенерирующим входящим потоком такая же, как если бы через интервалы τ_j поступали группы требований объема ξ_j , и неважно, как распределены моменты поступления требований в течение периода регенерации, несмотря на то что для регенерирующего потока случайные величины ξ_j и τ_j , вообще говоря, зависимы. Заметим также, что еще меньше информации необходимо для асимптотического анализа очереди в условиях высокой загрузки. Например, как следует из [4], при $\rho \uparrow 1$, где ρ — коэффициент загрузки, имеет место C -сходимость нормированного процесса длины очереди к диффузионному, параметры которого определяются через $D\xi_j$, $D\tau_j$, $\text{cov}(\xi_j, \tau_j)$.

2. Описание модели и основные обозначения. Рассматривается одноканальная система обслуживания с неограниченной очередью и регенерирующим входящим потоком $X(t)$, определенным на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ с фильтрацией $\{F_t, t \geq 0\}$, к которой $X(t)$ адаптирован.

О п р е д е л е н и е 1. Случайный процесс $(X(t), t \geq 0)$ с неубывающими непрерывными слева траекториями назовем регенерирующим потоком, если существует неубывающая последовательность $\{\theta_j\}_{j=1}^\infty$ ($\theta_0 = 0$) марковских моментов относительно фильтрации $\{F_t, t \geq 0\}$ такая, что последовательность

$$\{\kappa_j\}_{j=1}^\infty = \{\theta_j - \theta_{j-1}, X(\theta_{j-1} + t) - X(\theta_{j-1}), t \in [0, \theta_j - \theta_{j-1}]\}_{j=1}^\infty$$

состоит из независимых одинаково распределенных случайных элементов.

Случайные величины θ_j и $\tau_j = \theta_j - \theta_{j-1}$ ($j = 1, 2, \dots$) называются соответственно моментами и периодами регенерации. В теории массового обслуживания $X(t)$ представляет собой либо суммарное время обслуживания требований, либо число требований, поступивших в систему за время $[0, t]$.

Здесь мы считаем, что $X(t)$ — число поступивших требований, и обозначаем $\xi_j = X(\theta_j) - X(\theta_{j-1} + 0)$. Далее предполагается, что $a = \mathbf{E} \xi_1 < \infty$ и $\mu = \mathbf{E} \tau_1 < \infty$. Тогда с вероятностью 1 существует предел $\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} X(t)/t = a/\mu$, который называется интенсивностью потока $X(t)$.

Заметим, что класс регенерирующих потоков весьма широк и включает значительную часть потоков, обычно используемых в теории массового обслуживания в качестве входящих. Например, дважды стохастический пуассоновский процесс [9] с интенсивностью, являющейся регенерирующим процессом, будет регенерирующим потоком. К классу регенерирующих потоков также относятся полумарковский [5], марковски модулированный, марковский потоки поступлений [6] и многие другие. Кроме того, регенерирующий поток обладает рядом свойств; некоторые из них приведены и доказаны в [4]. Свойства регенерирующего потока позволяют использовать

подходы, разработанные для классических моделей обслуживания. Именно это будет продемонстрировано в настоящей статье.

Далее предполагается выполненным следующее условие.

Условие 1. *Решетчатый процесс восстановления, соответствующий последовательности $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$, аperiodичен, т.е.*

$$\text{н.о.д. } \{k: \mathbf{P}(\xi_1 = k) > 0\} = 1.$$

Нам понадобится следующее свойство регенерирующего потока, доказанное в [4]. Пусть t_n — момент поступления n -го требования, а $\zeta_n = t_n - t_{n-1}$ ($t_0 = 0$). Тогда при выполнении условия 1 последовательность $\{\zeta_{n+k}\}_{k=1}^{\infty}$ при $n \rightarrow \infty$ слабо сходится к стационарной.

Заметим, что распределение стохастического процесса $X(t)$ определяется распределением случайного элемента κ_1 . Однако для асимптотического анализа вероятностей больших уклонений очереди в системе обслуживания с регенерирующим входящим потоком это распределение не потребовалось. Оказалось достаточным знание совместного распределения ξ_1 и τ_1 , т.е. функции

$$G(z, s) = \mathbf{E} e^{-s\tau_1} z^{\xi_1} \quad (\operatorname{Re} s \geq 0, |z| < 1).$$

Итак, мы рассматриваем одноканальную систему обслуживания с регенерирующим входящим потоком $X(t)$ и неограниченным числом мест для ожидания, которую, следуя символике Кендалла, можно обозначить $\operatorname{Reg} |GI|1/\infty$.

Времена обслуживания требований $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ образуют последовательность независимых случайных величин с общей функцией распределения $B(x)$, средним $b < \infty$ и преобразованием Лапласа–Стилтьеса $b(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dB(x)$ ($\operatorname{Re} s \geq 0$). Введем процесс виртуального времени ожидания $W(t)$, а также вложенные процессы

$$w_n = W(t_n - 0), \quad W_n = W(\theta_n - 0).$$

Как показано в [4], у всех этих процессов собственное предельное распределение существует тогда и только тогда, когда коэффициент загрузки $\rho = \lambda b$ меньше 1. Далее это условие предполагается выполненным. Положим

$$\Phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(W_n \leq x), \quad F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w_n \leq x). \quad (1)$$

Наш первый результат касается поведения функций $1 - \Phi(x)$ и $1 - F(x)$ при $x \rightarrow \infty$. А именно, при определенных условиях будет доказано существование логарифмических пределов для этих стационарных распределений при $x \rightarrow \infty$.

3. Основной результат.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие 1 и*

$$\delta_0 = \sup\{s: G(b(-s), s) < \infty\} > 0, \quad (2)$$

$$G(b(-\delta_0), \delta_0) > 1. \quad (3)$$

Тогда существуют пределы

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln(1 - F(x)) = -q, \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln(1 - \Phi(x)) = -q, \quad (5)$$

где q — единственное положительное решение уравнения

$$G(b(-s), s) = 1. \quad (6)$$

Доказательство. Начнем с доказательства соотношения (4). В силу слабой сходимости последовательности $\{\zeta_{n+k}\}_{k=1}^{\infty}$ при $n \rightarrow \infty$ к стационарной можно считать, не ограничивая общности, что $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$ — стационарная последовательность.

Здесь мы будем исходить из результатов главы 3 в [8], которые применительно к нашей ситуации могут быть сформулированы следующим образом. Пусть $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ — стационарная последовательность случайных величин с отрицательным математическим ожиданием и $U_n = \sum_{j=1}^n u_j$, $U_0 = 0$. Обозначим

$$\Lambda_n(s) = \ln \mathbf{E} e^{sU_n}$$

и предположим, что существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \Lambda_n(s) = \Lambda(s). \quad (7)$$

Тогда, если в некоторой окрестности нуля функция $\Lambda_n(s)$ конечна при всех n , а функция $\Lambda(s)$ дифференцируема, то существует логарифмический предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{n \geq 0} U_n > x \right) = -q,$$

где $q = \sup\{s > 0: \Lambda(s) < 0\}$.

Как хорошо известно (см., например, [1]),

$$F(x) = \mathbf{P} \left(\sup_{n \geq 0} U_n < x \right),$$

где $u_j = \eta_j - \zeta_j$, $j = 1, 2, \dots$, так что для применения сформулированного результата из [8] нам необходимо установить (7) для функции

$$\Lambda_n(s) = \ln \mathbf{E} \exp \left\{ s \sum_{j=1}^n (\eta_j - \zeta_j) \right\}. \quad (8)$$

Лемма 1. В условиях теоремы 1 при $s \geq 0$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \Lambda_n(s) = \ln \frac{b(-s)}{z_1(s)}, \quad (9)$$

где $\Lambda_n(s)$ определено в (8), а $z_1(s)$ — единственное решение уравнения

$$G(z, s) = 1 \quad (10)$$

относительно z такое, что $z_1(s) > 1$ при $s > 0$.

Доказательство. В силу независимости последовательностей $\{\eta_j\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{\zeta_j\}_{j=1}^{\infty}$ имеем

$$\Lambda_n(s) = \ln \mathbf{E} \exp \left\{ s \sum_{j=1}^n \eta_j \right\} + \ln \mathbf{E} e^{-st_n} = n \ln b(-s) + \ln \mathbf{E} e^{-st_n}.$$

Поэтому нам достаточно доказать, что существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{E} e^{-st_n} = \ln \frac{1}{z_1(s)}. \quad (11)$$

Обозначим $\nu(n) = \min\{k: \xi_1 + \dots + \xi_k \geq n\}$, так что $\nu(n)$ — номер периода регенерации, на котором поступило n -е требование. Тогда

$$\theta_{\nu(n)-1} \leq t_n < \theta_{\nu(n)} \quad (\theta_0 = 0). \quad (12)$$

Сначала установим, что (11) выполнено для $\theta_{\nu(n)}$, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{E} e^{-s\theta_{\nu(n)}} = \ln \frac{1}{z_1(s)}. \quad (13)$$

При $n \geq 1$ имеем стохастическое равенство

$$\theta_{\nu(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} (\tau_1 + \tilde{\theta}_{\nu(n-j)}) \chi(\xi_1 = j) + \tau_1 \chi(\xi_1 \geq n), \quad (14)$$

где $\chi(A)$ — индикаторная функция события A , случайная величина $\tilde{\theta}_{\nu(n-j)}$ не зависит от τ_1 и ξ_1 и по распределению совпадает с моментом окончания периода регенерации, на котором поступило $(n-j)$ -е требование. Положим

$$\begin{aligned} \varphi_n(s) &= \mathbf{E} e^{-s\theta_{\nu(n)}}, \\ g_j(s) &= \mathbf{E}(e^{-s\tau_1} \chi(\xi_1 = j)), \\ \psi_n(s) &= \mathbf{E}(e^{-s\tau_1} \chi(\xi_1 \geq n)). \end{aligned}$$

Из (14) находим, что

$$\varphi_n(s) = \psi_n(s) + \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_{n-j}(s) g_j(s). \quad (15)$$

Зафиксируем $s > 0$. Тогда (15) представляет собой уравнение восстановления, соответствующее обрывающемуся процессу восстановления $\{\tilde{\xi}_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $\mathbf{P}(\tilde{\xi}_n = j) = g_j(s)$ и $\mathbf{P}(\tilde{\xi}_n = \infty) = 1 - \mathbf{E} e^{-s\tau_1}$.

Поскольку функция $G(z, s)$ при каждом $s > 0$ строго монотонно возрастает по z и $G(1, s) < 1$, а $G(\infty, s) = \infty$, то существует единственное решение $z_1(s) > 1$ уравнения (10).

Так как $\psi_n(s) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), а $\varphi_n(s)$ удовлетворяет (15), то на основе теоремы 2 из [3, гл. XI, § 6] получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\varphi_n(s) \sim \frac{C}{(z_1(s))^n}, \quad (16)$$

где C — некоторая константа. Как обычно, мы пишем $a_n \sim Cb_n$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = C$. Соотношение (16) означает выполнение (13). Аналогичным образом (13) устанавливается для $\theta_{\nu(n)-1}$, откуда ввиду (12) следует (11).

Таким образом, имеем

$$\Lambda(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \Lambda_n(s) = \ln \frac{b(-s)}{z_1(s)}.$$

В силу (2) и (3) функция $\Lambda_n(s)$ конечна при $s < \delta_0$ для каждого $n \geq 1$, а $\Lambda(s)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.1 из [8], так что имеет место (4). При этом q — единственный положительный корень уравнения

$$b(-s) = z_1(s). \quad (17)$$

Поскольку $z_1(s)$ удовлетворяет уравнению (10), то q является единственным положительным корнем уравнения (6). Действительно, рассмотрим функцию $f(s) = G(b(-s), s)$. Имеем $f(0) = 1$, $f'(0) = ba - \mu < 0$ в силу условия эргодичности и $f(\delta_0) > 1$ в силу (3). Это означает, что уравнения (6) и (17) имеют единственный положительный корень q .

Перейдем к доказательству соотношения (5). Пусть γ_n — суммарное время обслуживания требований, поступивших в систему на n -м периоде регенерации. Введем вспомогательный процесс W_n^- с помощью рекуррентных соотношений

$$W_n^- = [W_{n-1}^- + \gamma_n - \tau_n]^+, \quad W_0^- = 0.$$

Очевидно, что при $W_0 = 0$ с вероятностью 1 справедливо неравенство

$$W_n \geq W_n^-. \quad (18)$$

Обозначим $\Phi^-(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(W_n^- \leq x)$. Поскольку $\mathbf{E}e^{s(\gamma_n - \tau_n)} = G(b(-s), s)$, то в силу (2) и (3) при $x \rightarrow \infty$

$$1 - \Phi^-(x) = \mathbf{P}\left(\sup_{n \geq 0} S_n > x\right) \sim Ce^{-qx},$$

где, как и раньше, q — единственное положительное решение уравнения (6), $S_n = \sum_{j=1}^n (\gamma_j - \tau_j)$, $S_0 = 0$ и C — некоторая константа (см., например, [1], [3]).

Отсюда и из (18) следует, что

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln(1 - \Phi(x)) \geq -q. \quad (19)$$

Получим оценку для верхнего предела. Пусть $\mu(n) = \xi_1 + \dots + \xi_n$ — число требований, поступивших за первые n периодов регенерации, так что $\mu(n)$ — номер требования, поступившего последним перед моментом θ_n . Если $\mu(n) = 0$, полагаем $w_0 = 0$, $\eta_0 = 0$ с вероятностью 1. Тогда

$$W_n \leq w_{\mu(n)} + \eta_{\mu(n)} \quad (20)$$

и величины $w_{\mu(n)}$ и $\eta_{\mu(n)}$ независимы. Из усиленного закона больших чисел и определения функции $F(x)$ следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w_{\mu(n)} \leq x) = F(x)$, и поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(W_n > x) \leq \int_0^x (1 - F(x - y)) dB(y) + 1 - B(x). \quad (21)$$

В силу (4) для любого $\varepsilon > 0$ существует x_ε такое, что при $x \geq x_\varepsilon$ выполнено неравенство $1 - F(x) \leq e^{-(q-\varepsilon)x}$. Значит, для некоторого C_ε при всех $x \geq 0$ будет выполняться неравенство

$$1 - F(x) \leq C_\varepsilon e^{-(q-\varepsilon)x}. \quad (22)$$

Обозначим $\delta_1 = \sup\{s: b(-s) < \infty\}$. Заметим, что если $s < \delta_0$, то $G(b(-s), s) < \infty$, а следовательно, $b(-s) < \infty$. Это означает, что $\delta_1 \geq \delta_0$, и, так как $q < \delta_0$, имеем $b(-q) < \infty$. Значит, найдутся $\delta_2 > q$ и $C_1 > 0$ такие, что $1 - B(x) \leq C_1 e^{-\delta_2 x}$. Из (21) и (22) при $x \rightarrow \infty$ получаем

$$\begin{aligned} 1 - \Phi(x) &\leq C_\varepsilon e^{-(q-\varepsilon)x} \int_0^\infty e^{qy} dB(y) + C_1 e^{-\delta_2 x} \\ &\leq C_\varepsilon e^{-(q-\varepsilon)x} b(-q)(1 + o(1)), \end{aligned}$$

так что

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln(1 - \Phi(x)) \leq -q + \varepsilon.$$

Поскольку ε сколь угодно мало, это вместе с (19) доказывает (5).

4. Асимптотика распределения виртуального времени ожидания. Здесь мы рассмотрим функцию

$$\Psi(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(W(t) \leq x),$$

предположив, как и раньше, что $\rho = \lambda b < 1$.

Следствие 1. В условиях теоремы 1 существует предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln(1 - \Psi(x)) = -q, \quad (23)$$

где q — единственное положительное решение уравнения (6).

Доказательство. Обозначим $l(t)$ номер периода регенерации входящего потока, на который попадает момент t , а $n(t)$ номер требования, пришедшего последним в интервале $[0, t)$. Тогда при $x \geq 0$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(W_{l(t)-1} - \tau_{l(t)} > x) &\leq \mathbf{P}(W(t) > x) \\ &\leq \mathbf{P}(w_{n(t)} + \eta_{n(t)} > x). \end{aligned} \quad (24)$$

При этом величины $W_{l(t)}$ и $\tau_{l(t)}$, а также $w_{n(t)}$ и $\eta_{n(t)}$ независимы. Кроме того, из усиленного закона больших чисел следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(W_{l(t)} \leq x) = \Phi(x),$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(w_{n(t)} \leq x) = F(x),$$

а из основной теоремы восстановления вытекает существование предела

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\tau_{l(t)} \leq x) = \frac{1}{\mu} \left(\int_0^x \mathbf{P}(\tau_1 > y) dy - x \mathbf{P}(\tau_1 > x) \right).$$

Переходя в (24) к пределу при $t \rightarrow \infty$, находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \int_0^\infty y(1 - \Phi(x + y)) d\mathbf{P}(\tau_1 \leq y) &\leq 1 - \Psi(x) \\ &\leq \int_0^x (1 - F(x - y)) dB(y) + 1 - B(x). \end{aligned}$$

Поскольку для $1 - F(x)$ и $1 - \Phi(x)$ существуют логарифмические пределы (4) и (5) соответственно, а $1 - B(x) = o(e^{-(q-\varepsilon)x})$ при $x \rightarrow \infty$, то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеем

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln(1 - \Psi(x)) \geq -q - \varepsilon,$$

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln(1 - \Psi(x)) \leq -q + \varepsilon.$$

Это, ввиду произвольной малости ε , доказывает (23).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972, 367 с.
2. Боровков А. А., Боровков К. А. Вероятности больших уклонений для обобщенных процессов восстановления с правильно меняющимися распределениями скачков. — Матем. тр., 2005, т. 8, № 2, с. 69–136.
3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
4. Afanasyeva L., Bashtova E. Coupling method for asymptotic analysis of queues with regenerative input and unreliable server. — Queueing Syst., 2014, v. 76, № 2, p. 125–147.
5. Afanasyeva L., Bashtova E., Bulinskaya E. Limit theorems for semi-Markov queues and their applications. — Comm. Statist. Simulation Comput., 2012, v. 41, № 6, p. 688–709.
6. Asmussen S. Applied Probability and Queues. Chichester: Wiley, 1987, 318 p.
7. Bryc W., Dembo A. Large deviations and strong mixing. — Ann. Inst. H. Poincaré, 1996, v. 32, № 4, p. 549–569.
8. Ganesh A., O'Connell N., Wischik D. Big queues. — Lecture Notes in Math., 2004, v. 1838, p. 1–254.
9. Grandell J. Double stochastic Poisson processes. — Lecture Notes in Math., 1976, v. 529, p. 1–234.
10. Sadowsky J. S., Szpankowski W. The probability of large queue lengths and waiting times in a heterogeneous multiserver queue. I. Tight limits. — Adv. Appl. Probab., 1995, v. 27, № 2, p. 532–566.
11. Sadowsky J. S. The probability of large queue length and waiting times in a heterogeneous multiserver queue. II. Positive recurrence and logarithmic limits. — Adv. Appl. Probab., 1995, v. 27, № 2, p. 567–583.

Поступила в редакцию
2.VIII.2014