Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Розовский, Малые отклонения взвешенной суммы независимых положительных случайных величин с общим распределением, убывающим в нуле не быстрее степени, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2015, том 60, выпуск 1, 178–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4613>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 18:10:48

© 2015 г.

РОЗОВСКИЙ Л. В.*

МАЛЫЕ УКЛОНЕНИЯ ВЗВЕШЕННОЙ СУММЫ НЕЗАВИСИМЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ОБЩИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ, УБЫВАЮЩИМ В НУЛЕ НЕ БЫСТРЕЕ СТЕПЕНИ¹⁾

В заметке показано, что известная асимптотика для вероятностей малых отклонений взвешенной суммы независимых положительных случайных величин с общим распределением остается справедливой, если это распределение в нуле убывает не быстрее некоторой степени.

Ключевые слова и фразы: малые отклонения, суммы независимых положительных случайных величин, медленно меняющиеся функции.

1. Введение и результаты. Пусть $\{X_i\}$ — независимые копии положительной случайной величины X с функцией распределения $V(x)$. Образум $S = \sum_{j \geq 1} \lambda_j X_j$, где $\{\lambda_j\}$ — некоторая последовательность *невозрастающих* положительных чисел. Всюду в дальнейшем нами предполагается, что ряд S сходится п.н. или, равносильно (см., например, [3]),

$$\sum_{j \geq 1} \mathbf{E}(1 \wedge \lambda_j X) < \infty. \quad (1.1)$$

Заметим, что если $\mathbf{E} X < \infty$, то предположение (1.1) совпадает с условием $\sum_j \lambda_j < \infty$.

З а м е ч а н и е 1. Пусть функция $b(y)$, $y \geq y_0$, не убывает и удовлетворяет условию $b(1/\lambda_j) \asymp j$, $j \rightarrow \infty$. Тогда (1.1) равносильно условию $\mathbf{E} \bar{b}(X) I[X > y_0] < \infty$, где

$$\bar{b}(y) = y \int_y^\infty \frac{b(u)}{u^2} du, \quad y > y_0.$$

Отметим, что

$$1 \leq \frac{\bar{b}(y)}{b(y)} \leq \int_1^\infty \sup_{y > y_0} \frac{b(uy)}{b(y)} \frac{du}{u^2}.$$

В частности, если $b(u)/u^{1-\delta}$ при некотором $\delta > 0$ убывает на бесконечности, то (1.1) равносильно $\mathbf{E} b(X) I[X > y_0] < \infty$.

Для $\gamma \geq 0$ положим

$$\begin{aligned} \Lambda(\gamma) &= \mathbf{E} e^{-\gamma S}, \quad m(\gamma) = -(\ln \Lambda(\gamma))', \quad \sigma^2(\gamma) = (\ln \Lambda(\gamma))'', \\ Q(\gamma) &= -\gamma m(\gamma) - \ln \Lambda(\gamma). \end{aligned} \quad (1.2)$$

В работе [1], уточняющей и обобщающей результаты многочисленных предшественников (см. ссылки в [1], а также [6]), было доказано, что при некоторых условиях, включающих предположение, что $V(r)$ ведет себя в нуле степенным образом (см. условие **(L)** ниже),

$$\mathbf{P}(S \leq r) = (2\pi)^{-1/2} (\gamma \sigma(\gamma))^{-1} e^{-Q(\gamma)} (1 + o(1)), \quad r \searrow 0, \quad (1.3)$$

где параметр $\gamma = \gamma(r)$ является решением уравнения $m(\gamma) = r$.

Исследования, предпринятые в [1], были продолжены в [2] и [3].

* С.-Петербургская химико-фармацевтическая академия, С.-Петербург, Россия; e-mail: l.rozovsky@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-01-00256-а) и программы «Ведущие научные школы» (грант НШ-2504.2014.1).

В настоящей заметке нами рассмотрена более общая ситуация, включающая возможность для $V(r)$ убывать в нуле медленнее любой степени r (например, быть медленно меняющейся в нуле функцией), и уточнен основной результат из [3].

Введем некоторые условия и обозначения.

Начнем с у с л о в и я **(L)**, предложенного в [1]: *существуют постоянные $b \in (0, 1)$, $c_1, c_2 > 1$ и $r_0 > 0$ такие, что при каждом $r \leq r_0$*

$$c_1 V(br) \leq V(r) \leq c_2 V(br), \quad (1.4)$$

из которого, в частности, следует, что

$$c_3 r^\alpha \leq V(r) \leq c_4 r^\beta, \quad 0 < r \leq r_0, \quad (1.5)$$

где $\alpha = \ln d_2 / |\ln a|$ и $\beta = \ln d_1 / |\ln a|$, а $c_3, c_4, \dots$ здесь и в дальнейшем обозначают положительные постоянные, зависящие лишь от распределения V .

Условие **(L)** представляет собой широкое обобщение предположения о том, что распределение V является правильно меняющейся в нуле функцией с положительным показателем α .

Нам понадобится также у с л о в и е **(F)**:

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \mathbf{P}(X \geq x)}{\mathbf{E} X^2 I[X < x]} < \infty.$$

Напомним, что **(F)** выполняется, когда X принадлежит области притяжения какого-либо устойчивого закона, в частности, имеет конечную дисперсию.

В [3, теорема 2.3] был получен следующий результат.

Теорема 1. *Если выполнены условия **(L)** и **(F)**, то при всех положительных r , s и γ*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(r - s < S \leq r) &= \Lambda(\gamma) e^{\gamma r} \frac{1 - e^{-\gamma s}}{\tau \sqrt{2\pi}} \\ &\times \left(\exp \left\{ -\frac{(r - m(\gamma))^2}{2\sigma^2(\gamma)} + \theta \left(\tau^{-1} + \left(\frac{\ln(1 + \tau)}{\tau^2} \right)^{1/\alpha} \left(1 + \frac{1}{\gamma s} \right) \right) \right\}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $\tau = \gamma \sigma(\gamma)$, $\alpha = \ln c_2 / |\ln b|$, а $|\theta| \leq c_3$.

Соотношение (1.3) (с оценкой остаточного члена) вытекает из теоремы 1 при $s = -\infty$ и γ , являющемся решением уравнения $m(\gamma) = r$, так как из условия **(L)** следует, что

$$\gamma \sigma(\gamma) \rightarrow \infty, \quad \gamma \rightarrow \infty. \quad (1.7)$$

Для $y > 0$ положим

$$\nu(y) = \int_0^y u dV(u), \quad \hat{\nu}(y) = \frac{\nu(y)}{y} \quad (1.8)$$

и введем у с л о в и е **(R)**: *существуют постоянные $b \in (0, 1)$, $c_2, c_1 > 1$ и $y_0 > 0$ такие, что при каждом $y \leq y_0$*

$$c_1 \nu(by) \leq \nu(y) \leq c_2 \nu(by). \quad (1.9)$$

Отметим, что правое неравенство в (1.9) может выполняться лишь тогда, когда $c_2 b > 1$ (см. доказательство замечания 2 ниже).

Сравним условия **(L)** и **(R)**.

З а м е ч а н и е 2. Справедливо утверждение

$$\mathbf{(L)} \iff \mathbf{(R)}|_{c_1 b > 1}.$$

В то же время, если

$$\hat{\nu}(y) \asymp l(y), \quad y \rightarrow +0, \quad (1.10)$$

где функция $l(y)$ медленно меняется в нуле, то

$$V(y) \asymp \tilde{l}(y) = \int_0^y \frac{l(u)}{u} du, \quad y \rightarrow +0, \quad (1.11)$$

причем $\tilde{l}(y)$ также медленно меняется в нуле. Отсюда следует, что (1.9) при достаточно малом b выполняется, в то время как условие (1.4) нарушается в левой его части. Таким образом, **(R)** слабее **(L)**.

Заметим, что условия (1.10) и (1.11), очевидно, имеют место, если распределение V абсолютно непрерывно в некоторой окрестности нуля с плотностью $p(x)$ такой, что $p(y) \asymp l(y)/y$, $y \rightarrow +0$.

Докажем замечание 2. Поскольку

$$V(by) = b^{-1} \left(\frac{\nu(by)}{y} + \int_0^y \frac{\nu(bu)}{u^2} du \right),$$

из (1.9) следует (1.4) при $a = b$, $d_1 = c_1 b$ и $d_2 = c_2 b$, т.е. **(R)** $_{|c_1 b > 1} \implies$ **(L)**. Кроме того, $V(by) \leq V(y) \leq c_2 b V(by)$, $y \leq y_0$, откуда с учетом того, что $\mathbf{P}(X = 0) = 0$, получим $c_2 b > 1$.

Пусть теперь выполнено условие **(L)**. Имеем $\hat{\nu}(y)/V(y) = \int_0^1 (1 - V(uy)/V(y)) du$. Отсюда, а также из вытекающего из (1.4) соотношения $d_1 u^\beta \geq V(uy)/V(y) \geq u^\alpha/d_2$, $u \leq 1$, $y \leq y_0$ (см. [2, формула (1.8)] и обозначения после (1.5), из которых следует, что $a^\alpha = 1/d_2$, $a^\beta = 1/d_1$), найдем

$$1 - \frac{1}{(1 + \alpha)d_2} \geq \frac{\hat{\nu}(y)}{V(y)} \geq \int_0^a (1 - d_1 u^\beta) du = \frac{a\beta}{1 + \beta}.$$

Из приведенных формул и (1.4) получим при любом $b \in (0, a]$

$$c^{-1}(ab)^{1+\alpha} \leq \frac{\nu(by)}{\nu(y)} \leq c \left(\frac{b}{a} \right)^{1+\beta}, \quad y \leq y_0,$$

где

$$c = \left(1 - \frac{1}{(1 + \alpha)d_2} \right) \left(1 + \frac{1}{\beta} \right).$$

Отсюда при достаточно малом b следует **(R)** $_{|c_1 b > 1}$. Замечание 2 проверено.

Теперь сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема 2. *Теорема 1 сохраняет справедливость при замене в ее формулировке условия **(L)** на **(R)** и постоянной α на $\ln(c_2 b)/|\ln b|$.*

Заметим, что теорема 2 нетривиальна лишь в случае (1.7), который, как уже упоминалось выше, всегда имеет место при условии **(L)**, а из **(R)**, вообще говоря, не вытекает: в некоторых случаях

$$\limsup_{\gamma \rightarrow \infty} \gamma \sigma(\gamma) < \infty. \quad (1.12)$$

Стоит также отметить, что обязательно $\limsup_{\gamma \rightarrow \infty} \gamma \sigma(\gamma) > 0$.

Теорему 2 можно дополнить следующим результатом.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие (1.12). Тогда (см. обозначения в (1.2))*

$$\mathbf{P}(S \leq r) \asymp e^{-Q(\gamma)}, \quad r \searrow 0,$$

где параметр $\gamma = \gamma(r)$ является решением уравнения $t(\gamma) = r$.

Заметим, что в теореме 3 выполнение условий **(R)** или **(F)** не предполагается.

З а м е ч а н и е 3. Пусть выполнено условие **(F)**. Если

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{N+M}}{\lambda_N} > 0, \quad (1.13)$$

то справедливо условие (1.7), причем без каких-либо предположений относительно поведения V в нуле.

Отметим, что (1.13) выполнено, если

$$\lambda_j \asymp e^{-g(j)}, \quad j \rightarrow \infty, \quad (1.14)$$

где функция g не убывает и

$$\frac{g(u)}{u} \text{ монотонно стремится к нулю на бесконечности.} \quad (1.15)$$

Таким образом, в предположении (1.13) асимптотика (1.3) из теоремы 2 вытекает. Вернемся к условию (1.12).

З а м е ч а н и е 4. Предположим, что выполнены условия (1.14) и (1.10) с медленно меняющейся в нуле функцией $l(y)$ такой (см. (1.11)), что $\tilde{l}(e^{-t})$ логарифмически выпукла на бесконечности.

Если $g(u)$, $u \geq 1$, — некоторая непрерывная положительная функция такая, что

$$\text{функция } \frac{g(u)}{u} \text{ не убывает на бесконечности,} \quad (1.16)$$

то условие

$$J(u) = \frac{u}{g(u)} \left| \ln \tilde{l}(e^{-g(u)}) \right| = O(1), \quad u \rightarrow \infty, \quad (1.17)$$

является достаточным для (1.12), а если $g(u)$ не убывает на бесконечности и $g(u)/u^K$ убывает при всех достаточно больших u и некотором K , то условие (1.17) является необходимым для (1.12). Кроме того, при таких функциях $g(u)$ из предположения $J(u) \rightarrow \infty$, $u \rightarrow \infty$, вытекает (1.7).

П р и м е р. Пусть $a > 0$ и $c \geq 1$ — некоторые постоянные. Если

$$\lambda_j \asymp \exp(-aj^c), \quad j \rightarrow \infty, \quad (1.18)$$

то (1.12) в соответствии с замечанием 4 равносильно

$$u^{1/c-1} |\ln \tilde{l}(e^{-u})| = O(1), \quad u \rightarrow \infty.$$

Таким образом, если, например, $l(y) = \ln^{-1-\delta}(1/y)$, где $\delta > 0$, то при $c > 1$ имеет место (1.12), а при $c = 1$ справедливо (1.7).

Отметим также, что предположение (1.1), которое, разумеется, считается выполненным, в случае (1.18) при $c > 0$ по замечанию 1 равносильно условию $\mathbf{E} \ln^{1/c}(1+X) < \infty$ и вытекает из условия **(F)**.

2. Доказательства. В нижеследующих рассуждениях существенно используются результаты из [2]–[4].

Пусть $L(h) = \mathbf{E} e^{-hX}$ и случайная величина $X(h)$, $h \geq 0$, имеет распределение $e^{-hr}V(dr)/L(h)$ и характеристическую функцию $f_h(t)$.

Обозначим дополнительно (см. (1.8))

$$\tilde{\nu}(y) = \int_0^y \frac{\hat{\nu}(u)}{u} du, \quad \kappa(y) = \frac{\hat{\nu}(y)}{\tilde{\nu}(y)}. \quad (2.1)$$

Лемма 1. Пусть выполнено условие **(R)**. Тогда при всех $h \geq 1$

$$c_3 \tilde{\nu}\left(\frac{1}{h}\right) \leq L(h), \quad V\left(\frac{1}{h}\right) \leq c_4 \tilde{\nu}\left(\frac{1}{h}\right), \quad (2.2)$$

$$c_3 \kappa\left(\frac{1}{h}\right) \leq h \mathbf{E} X(h), \quad h^2 \mathbf{D} X(h) \leq c_4 \kappa\left(\frac{1}{h}\right), \quad (2.3)$$

$$\frac{h \mathbf{E} X^3(h)}{\mathbf{D} X(h)} \leq c_4. \quad (2.4)$$

Кроме того,

$$1 - |f_h(v)| \geq c_5 e^{-(2\pi+b)h/v} \frac{\widehat{\nu}(1/v)}{L(h)}, \quad v \geq \frac{2\pi+b}{r_0}, \quad h > 0. \quad (2.5)$$

Напомним, что $c_3, c_4, \dots$ обозначают положительные постоянные, зависящие лишь от распределения V .

Доказательство леммы 1. Проверим (2.2)–(2.4). Пусть (см. (1.9))

$$\nu(y) \leq c_2 \nu(by), \quad y \leq y_0. \quad (2.6)$$

Тогда

$$\widetilde{\nu}(y) \geq \frac{1-b}{by} \nu(by) \geq \frac{1-b}{bc_2} \widehat{\nu}(y) \quad (2.7)$$

и, с учетом равенства $V(y) = \widehat{\nu}(y) + \widetilde{\nu}(y)$,

$$\widetilde{\nu}(y) \leq V(y) \leq c_4 \widetilde{\nu}(y), \quad y \leq y_0. \quad (2.8)$$

Из (2.6) следует, что при всех $u \geq 1$

$$\nu(uy) \leq c_2 u^\gamma \nu(y), \quad uy \leq by_0, \quad (2.9)$$

где $\gamma = \ln c_2 / |\ln b| > 1$.

Действительно, если натуральное k удовлетворяет условию $b^{1-k} \leq u < b^{-k}$, то последовательное применение соотношения (2.6) k раз приводит к (2.9). Неравенство $\gamma > 1$ равносильно соотношению $c_2 b > 1$.

Используя (2.9) при $u = by_0/y$, получим, в частности, что

$$\nu(y) \geq \frac{\nu(by_0)}{c_2 (by_0)^\gamma} y^\gamma, \quad y \leq by_0. \quad (2.10)$$

Имеем для $h \geq h_0 \geq 1/(by_0)$:

$$e^{-1} V\left(\frac{1}{h}\right) \leq L(h) = \left(\int_0^1 + \int_1^{by_0 h} + \int_{by_0 h}^\infty \right) \widehat{\nu}\left(\frac{u}{h}\right) e^{-u} \frac{1+u}{u} du = I_1 + I_2 + I_3. \quad (2.11)$$

При этом (см. также (2.7) и (2.10)) $I_1 \leq \widetilde{\nu}(1/h)$, $I_3 \leq 2e^{-by_0 h} \leq c_5 \widetilde{\nu}(1/h)$. Оценивая I_2 с помощью (2.9) при $y = b/h$ и применяя (2.7), найдем $I_2 \leq c_6 \widehat{\nu}(b/h) \leq c_7 \widetilde{\nu}(1/h)$. Из (2.8) и (2.11) следует (2.3).

Оценка сверху в (2.4) и соотношение

$$h^3 \mathbf{E} X^3(h) \leq c_8 \kappa \left(\frac{1}{h} \right) \quad (2.12)$$

проверяются при помощи (2.3) аналогично (2.11). Кроме того,

$$e^{-1} \widehat{\nu}\left(\frac{1}{h}\right) \leq h \mathbf{E} X(h) L(h)$$

и, следовательно (см. также (2.7)),

$$c_3 \kappa \left(\frac{1}{h} \right) \leq h \mathbf{E} X(h) \leq c_4 \kappa \left(\frac{1}{h} \right) \leq c_9. \quad (2.13)$$

Теперь предположим, что выполнено левое неравенство (1.9). Тогда

$$V(y) - V(by) = \int_{by}^y \frac{d\nu(u)}{u} \geq \widehat{\nu}(y) \left(1 - \frac{1}{c_1} \right), \quad y \leq y_0. \quad (2.14)$$

Принимая во внимание (2.13), (2.14) и [2, формула (2.9)], видим, что при всех достаточно больших h

$$L(h)h^2\mathbf{D}X(h) \geq \widehat{\nu}\left(\frac{1}{h}\right),$$

что с учетом (2.2) и (2.12) завершает проверку соотношений (2.3) и (2.4).

Соотношение (2.5) с учетом (2.14) обосновывается так же, как лемма 2 в [2]. Лемма 1 доказана.

Для проверки теоремы 2 воспользуемся рассуждениями из [3, теорема 2.3], применив в соответствующих местах подходящие оценки из леммы 1.

В доказательстве теоремы 3 ключевую роль играет следующий результат.

Лемма 2 (см. [4, теорема 3]). *При всех $r \in (0, \mathbf{E}S)$ и $\varepsilon > 0$*

$$e^{-Q(\gamma)} \geq \mathbf{P}(S \leq r) \geq e^{-(1+2\varepsilon)Q(\gamma)} \left(1 - \left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} a(\gamma)\right)^2\right),$$

где $\gamma = \gamma(r)$ является решением уравнения $t(\gamma) = r$ и

$$a(\gamma) = \sup_{h>\gamma} \frac{h\sigma(h)}{Q(h)}.$$

Теорема 3 вытекает из леммы 2 при $\varepsilon = K(a^2(\gamma)/Q(\gamma))^{1/3}$ (здесь K — некоторая достаточно большая постоянная), если иметь в виду, что $Q(h)$, $h \geq 0$, монотонно возрастает от 0 до $-\ln \mathbf{P}(S=0) = \infty$ и что $a(\gamma)Q(\gamma) \leq \sup_{h>\gamma} h\sigma(h) \leq c_{16}$ при условии (1.12).

Проверим замечание 1. Пусть $\lambda(u)$, $u \geq 1$, — некоторая непрерывная невозрастающая функция такая, что $\lambda(j) = \lambda_j$, $j = 1, 2, \dots$. Обозначим

$$\begin{aligned} \lambda^{-1}(x) &= \sup\{u: u \geq 1, \lambda(u) \geq x\}, & x &\leq \lambda_1; \\ g_y(u) &= \min(1, y\lambda(u)), & u &\geq 1, \quad y \geq 0. \end{aligned}$$

Функция $g_y(u)$ не возрастает с ростом u , и, следовательно, при любом целом $M \geq 1$

$$J_M = \mathbf{E} \left(\int_M^\infty g_X(u) du \right) \leq \sum_{j \geq M} \mathbf{E} g_X(j) \leq J_M + \mathbf{E} g_X(M). \quad (2.15)$$

Имеем

$$\int_M^\infty g_y(u) du = - \int_M^\infty (u - M) dg_y(u) = -y \int_{\lambda^{-1}(y^{-1} \wedge \lambda_M)}^\infty (u - M) d\lambda(u). \quad (2.16)$$

Но в обозначениях замечания 1

$$-y \int_{\lambda^{-1}(1/y)}^\infty u d\lambda(u) \asymp -y \int_{\lambda^{-1}(1/y)}^\infty b\left(\frac{1}{\lambda(u)}\right) d\lambda(u) = \bar{b}(y), \quad y \rightarrow \infty.$$

Отсюда и из (2.15), (2.16) при $M = 1$ следует (1.1).

Теперь проверим утверждение перед теоремой 3. Пусть $u = c/\lambda_k$. Очевидно (см. (1.2) и (2.2)), что

$$\sigma^2(u) = \sum_{j \geq 1} \lambda_j^2 \mathbf{D}(u\lambda_j). \quad (2.17)$$

Поэтому $u^2 \sigma^2(u) \geq c^2 \mathbf{D}X(c)$, откуда $\limsup_{\gamma \rightarrow \infty} \gamma \sigma(\gamma) > 0$.

Далее займемся замечанием 3. Будем предполагать, что индекс $N = N(h)$ при всех достаточно больших h удовлетворяет условию

$$h\lambda_N > 1 \geq h\lambda_{N+1}. \quad (2.18)$$

Имеем (см. (2.17))

$$h^2 \sigma^2(h) = \left(\sum_{j=1}^N + \sum_{j>N} \right) h^2 \lambda_j^2 \mathbf{D}X(h\lambda_j) = I_1 + I_2. \quad (2.19)$$

Из [3, лемма 3] следует, что при условии (F)

$$c_3 \leq \frac{h^2 \mathbf{D}X(h)}{G(h)} \leq c_4, \quad 0 < h \leq 1, \quad (2.20)$$

где $G(h) = \mathbf{E}(1 \wedge hX)^2$ (для оценки вверху (2.20) условие (F) не требуется).

Таким образом, с учетом (2.18) при любом целом $M \geq 1$

$$I_2 \geq c_3 \sum_{N < j \leq N+M+1} G(h\lambda_j) \geq c_3 M G(h\lambda_{N+M+1}) \geq c_3 M \left(\frac{\lambda_{N+M+1}}{\lambda_N} \right)^2 G(1),$$

откуда при условии (1.13) следует (1.7).

Условие (1.13) вытекает из (1.14) и (1.15), поскольку в этом случае $g(N+M+1) - g(N+1) \leq Mg(N+1)/(N+1)$.

В заключение рассмотрим замечание 4. Пусть выполнены условия (1.14) и (1.16). Вернемся к равенству (2.19). Имеем аналогично (2.15) (см. (2.20))

$$I_2 \leq c_4 \sum_{j>N} G(h\lambda_j) \leq c_{17} \sum_{j>N} G(he^{-g(j)}) \leq c_{17} \left(\mathbf{E} \int_{N+1}^{\infty} \bar{g}_{hX}(u) du + \mathbf{E} \bar{g}_{hX}(N+1) \right), \quad (2.21)$$

где $\bar{g}_y(u) = \min(1, (y\bar{\lambda}(u))^2)$, $\bar{\lambda}(u) = e^{-g(u)}$, $y \geq 0$, $u \geq u_0$.

Отметим, что функция $\bar{\lambda}(u)$, $u \geq u_0$, непрерывна и согласно (1.16) строго убывает. Обозначим $b(s) = \bar{\lambda}^{-1}(1/s)$, $s \geq 1/\bar{\lambda}(u_0)$, где $\bar{\lambda}^{-1}(\cdot)$ — функция, обратная к $\bar{\lambda}(\cdot)$.

Так же, как ранее в (2.16) при $M = N+1$, получаем

$$T = \int_M^{\infty} \bar{g}_{hy}(u) du = -(hy)^2 \int_{\bar{\lambda}^{-1}((hy)^{-1} \wedge \bar{\lambda}(M))}^{\infty} (u-M) d\bar{\lambda}^2(u). \quad (2.22)$$

Делая здесь замену переменной $u = b(th)$, найдем

$$T = y^2 \int_{y \vee (1/(h\bar{\lambda}(M)))}^{\infty} (b(th) - M) d(-t^{-2}), \quad M = b\left(\frac{1}{\bar{\lambda}(M)}\right). \quad (2.23)$$

При этом (см. (2.18) и (1.14))

$$\frac{1}{h\bar{\lambda}(M)} = \frac{1}{h\lambda_{N+1}} \lambda_{N+1} e^{g(N+1)} \geq \delta = c_{18}. \quad (2.24)$$

Условие (1.16), как несложно проверить, равносильно тому, что функция $\hat{b}(u) = b(u)/\ln u$ при $u \geq K$ не возрастает.

Отсюда и из неравенства $b(uv) \leq (\ln u + \ln v) \min(\hat{b}(u), \hat{b}(v))$, $u, v \geq K$, следует, что $b(uv) - b(v) \leq b(u)$, $u, v \geq K$, и, в частности, при всех достаточно больших h

$$b(th) - b(\delta h) \leq b\left(\frac{t}{\delta} \vee K\right). \quad (2.25)$$

Из (2.23)–(2.25) получим при некотором y_0

$$T \leq y^2 \int_{y \vee \delta}^{\infty} (b(th) - b(\delta)) d(-t^{-2}) \leq c_{19}(1 + b(y)I[y \geq y_0]),$$

откуда по (2.22), (2.21) и (2.24) с учетом замечания 1 найдем $\sup_{h \geq h_0} I_2 \leq c_{20}(1 + \mathbf{E} b(X)I[X \geq y_0]) < \infty$. Таким образом (см. (2.19)), условие (1.12) равносильно условию $\sup_{h \geq h_0} I_1 < \infty$.

Если выполнено условие (1.10), то (см. (2.1))

$$\kappa(y) \asymp \widehat{\kappa}(y) = \frac{l(y)}{\widetilde{l}(y)}, \quad y \rightarrow 0,$$

а если, кроме того, $\widetilde{l}(e^{-t})$, как функция t , логарифмически выпукла на бесконечности, то

$$\widehat{\kappa}(y) = - \left(\ln \widetilde{l}(e^{-t}) \right)' \Big|_{t=-\ln y}, \quad (2.26)$$

откуда следует, что $\widehat{\kappa}(y)$ не убывает в некоторой положительной полуокрестности нуля.

Из сказанного и условий (1.14), (2.18) с учетом (2.3) получим (см. (2.19))

$$I_1 \asymp \widetilde{I}_N = \sum_{j=1}^N \widehat{\kappa} \left(\frac{e^{g(j)}}{h} \right), \quad h \rightarrow \infty, \quad (2.27)$$

причем

$$\widetilde{J}_N \leq \widetilde{I}_N \leq \widetilde{J}_N + \widehat{\kappa} \left(\frac{e^{g(N)}}{h} \right), \quad (2.28)$$

где $\widetilde{J}_N = \int_1^N \widehat{\kappa}(e^{g(u)}/h) du$.

Положим (см. (1.16)) $\nu(t) = g^{-1}(t)$, $\bar{\kappa}(t) = \widehat{\kappa}(e^{-t})$, $r = \ln h$. Принимая во внимание условия (2.18) и (1.14), получим

$$\widetilde{J}_N = - \int_{r-g(N)}^{r-g(1)} \bar{\kappa}(t) d\nu(r-t) \leq \left(\int_{-c_{21}}^{r/2} + \int_{r/2}^{r-g(1)} \right) \bar{\kappa}(t) d(-\nu(r-t)) = J_1 + J_2. \quad (2.29)$$

Очевидно (см. (1.16) и (2.26)), что функции $\bar{\kappa}(t)$ и $\nu(t)/t$ не возрастают на бесконечности. Предполагая без потери общности, что эти функции не возрастают при всех $t \geq 1$, найдем

$$J_2 \leq \bar{\kappa} \left(\frac{r}{2} \right) \nu \left(\frac{r}{2} \right) \leq \nu \left(\frac{r}{2} \right) \frac{2}{r} \int_0^{r/2} \bar{\kappa}(u) du;$$

$$J_1 \leq \int_{-c_{21}}^{r/2} \bar{\kappa}(u) du \max_{u \in (r/2, r+c_{21})} \frac{\nu(u)}{u} \leq \frac{2}{r} \nu \left(\frac{r}{2} \right) \int_{-c_{21}}^{r/2} \bar{\kappa}(u) du.$$

Имея в виду (2.19) и (2.27)–(2.29), несложно убедиться в том, что условие (1.12) следует из (1.17).

Проверим остальные утверждения замечания 4. Условие $g(u)/u^K \searrow$, очевидно, равносильно предположению $\nu(u)/u^{1/K} \nearrow$, что вместе с (2.29) приводит к оценкам

$$\widetilde{J}_N \geq - \int_{c_{22}}^{r/2} \bar{\kappa}(t) d\nu(r-t) \geq \frac{2}{Kr} \nu \left(\frac{r}{2} \right) \int_{c_{22}}^{r/2} \bar{\kappa}(u) du$$

и (см. (2.19), (2.26)–(2.28) и (1.17)) $h^2 \sigma^2(h) \geq I_1 \geq c_{23} J(\nu(\ln h))$. Отсюда следуют нужные результаты. Замечание 4 полностью проверено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lifshits M. A. On the lower tail probabilities of some random series. — Ann. Probab., 1997, v. 25, № 1, p. 424–442.
2. Розовский Л. В. О вероятностях малых уклонений сумм независимых положительных случайных величин. — Зап. науч. сем. ПОМИ, 2007, т. 341, с. 151–167.
3. Розовский Л. В. Малые уклонения сумм независимых положительных случайных величин с общим распределением, убывающем в нуле не быстрее степени. — Зап. науч. сем. ПОМИ, 2007, т. 341, с. 151–167.

4. Rozovsky L. V. Remarks on a link between Laplace transform and distribution function of a nonnegative random variable. — Statist. Probab. Lett., 2009, v. 79, № 13, p. 1501–1508.
5. Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 320 с.
6. Lifshits M. A. Bibliography on small deviation probabilities. <http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/smalldev/biblio.pdf>

Поступила в редакцию
28.I.2014

© 2015 г.

ШАШКИН А. П.*

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ ПО МНОЖЕСТВАМ УРОВНЯ ГАУССОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ¹⁾

Рассматриваются интегралы непрерывных случайных функций по случайным мерам, порожденным множествами уровня гауссовского случайного поля. Показано, что при определенных требованиях к порождающему гауссовскому полю такие интегралы образуют непрерывный случайный процесс, индексированный точками уровня. В ситуации, когда интегрируемое случайное поле удовлетворяет некоторому условию слабости зависимости, доказана функциональная центральная предельная теорема для построенных так случайных процессов.

Ключевые слова и фразы: гауссовские случайные поля, функциональная предельная теорема, множества уровня, мера Хаусдорфа, локальное время случайного поля, формула коплощади.

Геометрические структуры, порожденные непрерывными гауссовскими случайными полями, в последние десятилетия привлекают значительное внимание исследователей. Это связано как с их приложениями к моделированию пространственных структур в томографии и астрофизике, так и с интересом к новым теоретическим результатам, возникающим на стыке теории случайных полей и дифференциальной геометрии. Достаточно упомянуть книги [4], [5], а также обзор [11]. Начиная с классической формулы Райса для математического ожидания числа нулей гауссовского случайного процесса с непрерывно дифференцируемыми траекториями, было открыто много свойств геометрических характеристик множеств уровня, порожденных гауссовскими случайными полями. Особенно важную роль играет хаусдорфова мера множества уровня, которая тесно связана с площадью поверхности экскурсионного множества случайного поля и, таким образом, с теорией функционалов Минковского таких множеств. Для мер множества уровня известны явные выражения для второго и старших моментов (с условиями их конечности), различные формы центральной предельной теоремы. В недавних работах [3], [12] получены функциональные предельные теоремы в ситуации, когда рассматриваются одновременно все вещественные значения уровня и берутся хаусдорфовы меры каждого из соответствующих множеств уровня (наблюдаемых в некотором ограниченном окне, размер которого стремится к бесконечности).

В работе [10] установлен ряд предельных теорем для интегралов по множествам уровня непрерывного случайного поля на двумерной плоскости. Предполагалось, что

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Москва, Россия; e-mail: ashashkin@hotmail.com

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 13-01-00612).