Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Шашкин, Функциональная предельная теорема для интегралов по множествам уровня гауссовского случайного поля, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2015, том 60, выпуск 1, 186–198

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4614>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 12:36:46

4. *Rozovsky L. V.* Remarks on a link between Laplace transform and distribution function of a nonnegative random variable. — *Statist. Probab. Lett.*, 2009, v. 79, № 13, p. 1501–1508.
5. *Петров В. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 320 с.
6. *Lifshits M. A.* Bibliography on small deviation probabilities. <http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/smalldev/biblio.pdf>

Поступила в редакцию
28.I.2014

© 2015 г.

ШАШКИН А. П.*

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ ПО МНОЖЕСТВАМ УРОВНЯ ГАУССОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ¹⁾

Рассматриваются интегралы непрерывных случайных функций по случайным мерам, порожденным множествами уровня гауссовского случайного поля. Показано, что при определенных требованиях к порождающему гауссовскому полю такие интегралы образуют непрерывный случайный процесс, индексированный точками уровня. В ситуации, когда интегрируемое случайное поле удовлетворяет некоторому условию слабейшей зависимости, доказана функциональная центральная предельная теорема для построенных так случайных процессов.

Ключевые слова и фразы: гауссовские случайные поля, функциональная предельная теорема, множества уровня, мера Хаусдорфа, локальное время случайного поля, формула коплощади.

Геометрические структуры, порожденные непрерывными гауссовскими случайными полями, в последние десятилетия привлекают значительное внимание исследователей. Это связано как с их приложениями к моделированию пространственных структур в томографии и астрофизике, так и с интересом к новым теоретическим результатам, возникающим на стыке теории случайных полей и дифференциальной геометрии. Достаточно упомянуть книги [4], [5], а также обзор [11]. Начиная с классической формулы Райса для математического ожидания числа нулей гауссовского случайного процесса с непрерывно дифференцируемыми траекториями, было открыто много свойств геометрических характеристик множеств уровня, порожденных гауссовскими случайными полями. Особенно важную роль играет хаусдорфова мера множества уровня, которая тесно связана с площадью поверхности экскурсионного множества случайного поля и, таким образом, с теорией функционалов Минковского таких множеств. Для мер множества уровня известны явные выражения для второго и старших моментов (с условиями их конечности), различные формы центральной предельной теоремы. В недавних работах [3], [12] получены функциональные предельные теоремы в ситуации, когда рассматриваются одновременно все вещественные значения уровня и берутся хаусдорфовы меры каждого из соответствующих множеств уровня (наблюдаемых в некотором ограниченном окне, размер которого стремится к бесконечности).

В работе [10] установлен ряд предельных теорем для интегралов по множествам уровня непрерывного случайного поля на двумерной плоскости. Предполагалось, что

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Москва, Россия; e-mail: ashashkin@hotmail.com

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 13-01-00612).

исходное поле удовлетворяет некоторому условию перемешивания и что по его множествам уровня интегрируется некоторое случайное поле, измеримое относительно исходного. Известно, что даже в гауссовском случае условие перемешивания может быть весьма ограничительно, а оценка коэффициента перемешивания представляет собой нетривиальную задачу.

Данная статья посвящена исследованию свойств случайного процесса, порожденного интегралами от непрерывного слабо зависимого случайного поля по множествам уровня гауссовского случайного поля, не зависящего от интегрируемого, и получению для таких процессов (должным образом преобразованных) функциональной предельной теоремы. Вместо условия перемешивания мы налагаем на интегрируемое случайное поле условие (BL, θ) -зависимости, введенное в работе [9] для случайных полей, заданных на целочисленной решетке, а затем распространенное в [8] на поля на евклидовом пространстве. Известно, что такие важные классы случайных полей, как гауссовские и ассоциированные, обладают (BL, θ) -зависимостью, если их ковариационная функция интегрируема.

Обозначения. Символ ∇f означает, как обычно, градиент функции $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$. Для $z \in \mathbf{R}^k$ пусть $\|z\|$, $\|z\|_1$ и $\|z\|_\infty$ — это соответственно евклидова норма, l_1 -норма и максимальная норма. Класс множеств $\mathcal{D}$ состоит из параллелепипедов вида $D = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$, где $a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbf{R}^d$, $b = (b_1, \dots, b_d) \in \mathbf{R}^d$, $a_j < b_j$ при $j \in \{1, \dots, d\}$. Для ограниченного борелевского множества B пусть $\mathcal{H}_{d-1}(B)$ — его $(d-1)$ -мерная мера Хаусдорфа (возможно, ее значение равно бесконечности). Для стационарного в широком смысле случайного поля $\xi = \{\xi(t), t \in T\}$, где T — целочисленная решетка или евклидово пространство, R_ξ обозначает ковариационную функцию. Будут также использоваться обозначения $x^+ = \max\{x, 0\}$, $x^- = (-x)^+$.

Пусть $d \geq 3$ и $X = \{X(t), t \in \mathbf{R}^d\}$ — центрированное изотропное гауссовское случайное поле на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, имеющее реализации класса C^1 п.н. Будем предполагать, что функция R_X и все ее частные производные до 2-го порядка включительно интегрируемы на $\mathbf{R}^d$, а также что выполняются следующие два условия:

$$\mathbf{P}(\mathcal{H}_{d-1}(\{s \in \mathbf{R}^d: \nabla X(s) = 0\}) > 0) = 0; \quad (1)$$

$$\mathbf{P}(X(s) = u, \nabla X(s) = 0 \text{ для некоторого } s \in \mathbf{R}^d) = 0 \quad \text{при любом } u \in \mathbf{R}. \quad (2)$$

Эти условия выполнены, например, если поле непостоянно и его реализации принадлежат классу C^2 . А именно, (1) проверяется аналогично лемме 11.2.10 из [4], а (2) следует из предложения 6.11 в [5]. Заметим, что условие, близкое к (1), использовалось в работе [2] для получения обобщения формулы Райса, основанного на мере Фавара.

Введем случайные множества уровня

$$B(X, A, u) = \{s \in A: X(s) = u\}, \quad u \in \mathbf{R}, \quad A \in \mathcal{D},$$

и их случайные меры Хаусдорфа $N_X(A, u) := \mathcal{H}_{d-1}(B(X, A, u))$. По теореме о неявной функции и в силу (2) множество $B(X, A, u)$ с вероятностью единица представляет собой поверхность класса C^1 , а потому случайная мера $N_X(\cdot, u)$ продолжается до σ -конечной случайной меры на борелевских подмножествах $\mathbf{R}^d$. Заметим, что в данном рассуждении множество элементарных исходов, на котором такое построение меры возможно, зависит, вообще говоря, от элементарного исхода $\omega \in \Omega$. Рассмотрим интегралы $\int_A Y(s) N_X(ds, u)$ (определенные при каждом u с вероятностью единица), где $A \in \mathcal{D}$ и Y — случайное поле с непрерывными реализациями. Мы будем рассматривать их как случайные процессы, индексированные вещественными числами u (точками уровня). Первый результат показывает, что с единичной вероятностью данные интегралы корректно определены для всех $u \in \mathbf{R}$, причем возникающий случайный процесс имеет непрерывные траектории.

Теорема 1. Пусть $A \in \mathcal{D}$. Тогда с вероятностью единица для любой непрерывной функции $f: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ отображение

$$u \mapsto \int_{B(X, A, u)} f(s) N_X(ds, u)$$

определено и непрерывно на $\mathbf{R}$.

Доказательство. Сначала докажем теорему при $f \equiv 1$. Пусть $\mathcal{B}_0(\mathbf{R}^k)$ — кольцо ограниченных борелевских подмножеств $\mathbf{R}^k$. Напомним, что локальным временем вещественнозначного случайного поля $\{\zeta(t), t \in \mathbf{R}^k\}$ на множестве $D \in \mathcal{B}_0(\mathbf{R}^k)$ называется случайный процесс $L_\zeta(\cdot, D)$, представляющий собой производную Радона–Никодима случайной меры

$$\nu(G) = \int_D I\{\zeta(t) \in G\} dt$$

по мере Лебега (здесь G — борелевское подмножество в $\mathbf{R}$).

Лемма 1. Пусть $\{\zeta(t), t \in \mathbf{R}^k\}$ — гауссовское изотропное случайное поле с непрерывно дифференцируемыми реализациями, $k \geq 2$. Тогда для любого $D \in \mathcal{B}_0(\mathbf{R}^k)$ с вероятностью единица существует локальное время $L_\zeta(D, \cdot)$. Если $k \geq 3$, то локальное время с вероятностью единица непрерывно.

Доказательство. Первое утверждение доказывается аналогично лемме 3.1 и примеру 3.2 в [6], а второе — аналогично лемме 3.3 и теореме 3.1 там же.

Лемма 2. Пусть $B \subset \mathbf{R}^d$ — гиперплоскость. Тогда с вероятностью единица для любого $u \in \mathbf{R}$ справедливо равенство $\mathcal{H}_{d-1}\{s \in B: X(s) = u\} = 0$.

Доказательство. Рассмотрим случайные величины $\{X(s), s \in B\}$ как случайное поле, заданное на $\mathbf{R}^{d-1}$, и зафиксируем произвольное $D \in \mathcal{B}_0(\mathbf{R}^{d-1})$. Рассматриваемая хаусдорфова мера для всех подмножеств B совпадает с мерой Лебега на B . Согласно первому утверждению леммы 1, локальное время $L_\zeta(D, \cdot)$ существует с вероятностью единица. Но мера, обладающая плотностью, приписывает нулевое значение любому одноточечному множеству. Лемма 2 доказана.

Назовем гиперплоскость в $\mathbf{R}^d$ рациональной, если она имеет вид $\{s \in \mathbf{R}^d: s_i = q\}$, где $i \in \{1, \dots, d\}$ и $q \in \mathbf{Q}$. Будем сразу считать, что элементарный исход $\omega \in \Omega$ выбран так, что выполнены следующие условия:

- 1) реализация поля X непрерывно дифференцируема;
- 2) имеет место (1);
- 3) справедливо второе утверждение леммы 1;
- 4) для любой рациональной гиперплоскости в $\mathbf{R}^d$, а также для любой гиперплоскости, содержащей грань A , выполняется утверждение леммы 2.

Далее элементарный исход ω фиксирован и множества, от которых берется мера $N_X(\cdot, u)$ ($u \in \mathbf{R}$), вообще говоря, могут зависеть от ω . Так как непрерывная плотность равна производной функции распределения соответствующей меры, то

$$L_X(A, u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\varepsilon)^{-1} \int_{s \in A} I\{|X(s) - u| < \varepsilon\} ds, \quad u \in \mathbf{R}. \quad (3)$$

Кроме того, $L_X(A, u) = 0$ при всех u , достаточно больших по модулю. Следовательно, существует такое $C > 0$ (зависящее от ω), что

$$\sup_{u \in \mathbf{R}} L_X(A, u) < C. \quad (4)$$

Параллелепипед $D \in \mathcal{D}$ будем называть рациональным, если все его грани лежат либо в рациональных гиперплоскостях, либо в гиперплоскостях, содержащих грани A .

Лемма 3. Пусть $\delta, \tau > 0$ и параллелепипед $D \subset A$ — рациональный, причем для s , лежащих в τ -окрестности U (в евклидовой метрике), верно неравенство $\partial X(s)/\partial s_1 \geq \delta > 0$. Тогда для любого $u \in \mathbf{R}$

$$N_X(D, u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\varepsilon)^{-1} \int_D \|\nabla X(s)\| I\{|X(s) - u| < \varepsilon\} ds \quad (5)$$

и левая часть представляет собой непрерывную функцию от u .

Доказательство. Представим D в виде $D = [a_1, b_1] \times M$, где $M \subset \mathbf{R}^{d-1}$ — некоторый параллелепипед. Если u таково, что $X(s) \neq u$ при $s \in D$, то утверждение леммы для u очевидно. Для других u введем множество $M(u) = \{t \in M: u \in (X(a_1 - \tau/2, t), X(b_1 + \tau/2, t))\}$. Тогда существует такое $\kappa > 0$, что

$$X(a_1 - \tau, t) < u - \kappa < u + \kappa < X(b_1 + \tau, t), \quad t \in M(u).$$

По теореме о неявной функции существует непрерывно дифференцируемая функция $h: (u - \kappa, u + \kappa) \times M(u) \rightarrow [a_1 - \tau, b_1 + \tau]$ такая, что $X(h(v, t), t) = v$ в области определения h и при $t \in M(u)$. Делая в интеграле замену $s = (s_1, t) \mapsto (X(s, t), t)$, представляем правую часть (5) в виде

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\varepsilon)^{-1} \int_{M(u)} \int_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} I\{X(a_1, t) \leq v \leq X(b_1, t)\} \sqrt{1 + \sum_{j=1}^{d-1} \left(\frac{\partial h(v, t)}{\partial t_j} \right)^2} dv dt. \quad (6)$$

Как показывает явное вычисление производных, выражение под знаком корня непрерывно и отделено от нуля в τ -окрестности D . Согласно последнему требованию к выбору элементарного исхода, множество тех $t \in M$, для которых $u \in \{X(a_1, t), X(b_1, t)\}$, имеет нулевую $(d-1)$ -мерную меру Хаусдорфа. Поэтому в (6) можно перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, равному

$$\int_M I\{X(a_1, t) \leq u \leq X(b_1, t)\} \sqrt{1 + \sum_{j=1}^{d-1} \left(\frac{\partial h(u, t)}{\partial t_j} \right)^2} dt.$$

Считается, что на том множестве, где индикатор обращается в нуль, все произведение равно нулю. Последнее выражение совпадает с $N_X(D, u)$, причем в силу того же требования к элементарному исходу оно непрерывно по u . Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Для любого $u \in \mathbf{R}$ справедливо соотношение

$$N_X(A, u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\varepsilon)^{-1} \int_A \|\nabla X(s)\| I\{|X(s) - u| < \varepsilon\} ds. \quad (7)$$

Доказательство. Прежде всего докажем, что мера в левой части (7) для рассматриваемого ω конечна. Пусть $\mu > 0$. Положим $K(\mu) = \{s \in A: \|\nabla X(s)\| < \mu\}$. По каждому $s_0 \in A \setminus K(\mu)$ построим рациональный параллелепипед $D(s_0)$ с центром в точке s_0 такой, что $|\partial X(s)/\partial s_i| \geq \mu/(2d)$ для некоторого $i \in \{1, \dots, d\}$ и всех $s \in D(s_0)$. Найдем конечное покрытие такими параллелепипедами множества $A \setminus K(\mu)$ и каждый образующий его параллелепипед заменим на его пересечение с A . Получившиеся параллелепипеды обозначим $D_1, \dots, D_n$. Тогда в силу леммы 3

$$\begin{aligned} N_X(D_1 \cup \dots \cup D_n, u) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\varepsilon)^{-1} \int_{D_1 \cup \dots \cup D_n} \|\nabla X(s)\| I\{|X(s) - u| < \varepsilon\} ds \\ &\leq C \sup_{s \in A} \|\nabla X(s)\|, \end{aligned}$$

где C фигурирует в (4). Из этой оценки, справедливой при любом $\mu > 0$, и условия (1) следует конечность $N_X(A, u)$.

Теперь зададим произвольное $\delta > 0$ и выберем $\mu > 0$ настолько малым, чтобы было выполнено неравенство $N_X(A \cap K(\mu), u) < \delta$. Такой выбор возможен ввиду (1).

Строя по μ множества $D_1, \dots, D_n$ так же, как в начале доказательства данной леммы, и применяя лемму 3, имеем

$$\begin{aligned} & \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| N_X(A, u) - (2\varepsilon)^{-1} \int_A \|\nabla X(s)\| I\{|X(s) - u| < \varepsilon\} ds \right| \\ & \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| N_X(A \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_n), u) \right. \\ & \quad \left. - (2\varepsilon)^{-1} \int_{A \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_n)} \|\nabla X(s)\| I\{|X(s) - u| < \varepsilon\} ds \right| \\ & \leq \delta + \mu \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\varepsilon)^{-1} \int_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} L_X(A, v) dv \leq \delta + C\mu. \end{aligned}$$

В силу произвольности δ лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы. Фиксируем $u_0 \in \mathbf{R}$. Пусть $\mu > 0$ произвольно, а множества $K(\mu), D_1, \dots, D_n$ выбраны так же, как в доказательстве леммы 4. Используя эту лемму и второе утверждение леммы 3, получаем оценку

$$\begin{aligned} & \limsup_{u \rightarrow u_0} |N_X(A, u) - N_X(A, u_0)| \\ & \leq \limsup_{u \rightarrow u_0} |N_X(D_1 \cup \dots \cup D_n, u) - N_X(D_1 \cup \dots \cup D_n, u_0)| \\ & \quad + 2 \sup_{u \in \mathbf{R}} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\varepsilon)^{-1} \int_{K(\mu)} \|\nabla X(s)\| I\{X(s) \in [u - \varepsilon, u + \varepsilon]\} ds \\ & \leq 2 \sup_{u \in \mathbf{R}} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\varepsilon)^{-1} \mu \int_{K(\mu)} I\{X(s) \in [u - \varepsilon, u + \varepsilon]\} ds \\ & \leq 2 \sup_{u \in \mathbf{R}} \mu L_X(A, u) \leq 2C\mu. \end{aligned}$$

Так как μ было выбрано произвольно, для $f \equiv 1$ теорема доказана.

Произвольная непрерывная функция $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ может быть равномерно приближена последовательностью функций, постоянных на внутренностях рациональных параллелепипедов (для каждой аппроксимирующей функции строится свой конечный набор таких параллелепипедов). В силу уже доказанной части теоремы элементарный исход можно считать таким, что для любого рационального параллелепипеда $D \subset A$ функция $N_X(D, u)$ непрерывна по u . Отсюда и из леммы 2 вытекает утверждение теоремы.

Теперь рассмотрим асимптотическое поведение изучаемых интегралов, когда они берутся по растущим параллелепипедам. Для простоты мы ограничимся кубами вида $[0, n]^d$.

Напомним ряд определений. Расстояние между множествами в $\mathbf{R}^d$ далее всюду берется относительно нормы $\|z\|_\infty = \max_{i=1, \dots, d} |z_i|$.

О п р е д е л е н и е 1 (см. [1, § 1.5]). Случайное поле $\xi = \{\xi_j, j \in \mathbf{Z}^d\}$, квадратично-интегрируемое и принимающее значения в $\mathbf{R}^k$, называется (BL, θ) -зависимым, если существует последовательность $\theta_\xi: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}_+$ такая, что $\theta_\xi(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ и для любых непересекающихся конечных множеств $I, J \subset \mathbf{Z}^d$ и произвольных липшицевых функций $f: \mathbf{R}^{k|I|} \rightarrow \mathbf{R}, g: \mathbf{R}^{k|J|} \rightarrow \mathbf{R}$ выполняется неравенство

$$\left| \text{cov}(f(\xi_I), g(\xi_J)) \right| \leq \text{Lip}(f) \text{Lip}(g)(|I| \wedge |J|) \theta_\xi(r),$$

где введено обозначение $\xi_I = (\xi_i, i \in I)$ (ξ_J определяется аналогично), $|M|$ — мощность конечного множества M , r есть расстояние между I и J , а константы Липшица берутся относительно нормы $\|z\|_1$.

Для мультииндекса $k \in \mathbf{Z}^d$ и $q > 0$ положим $k/q = (k_1/q, \dots, k_d/q) \in \mathbf{R}^d$. Пусть $T(\Delta) = \{j/\Delta \in \mathbf{R}^d: j \in \mathbf{Z}^d\}$.

О п р е д е л е н и е 2 (см. [8]). Квадратично-интегрируемое действительное случайное поле $\xi = \{\xi(t), t \in \mathbf{R}^d\}$ называется (BL, θ) -зависимым, если существует такая невозрастающая функция $\theta_\xi: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$, что $\theta_\xi(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ и для всех достаточно больших $\Delta > 0$, любых непересекающихся конечных множеств $I, J \subset T(\Delta)$ и произвольных липшицевых функций $f: \mathbf{R}^{|I|} \rightarrow \mathbf{R}$, $g: \mathbf{R}^{|J|} \rightarrow \mathbf{R}$, выполняется неравенство

$$\left| \text{cov}(f(\xi_I), g(\xi_J)) \right| \leq \text{Lip}(f) \text{Lip}(g) (|I| \wedge |J|) \Delta^d \theta_\xi(r),$$

где использованы те же обозначения, что и в предыдущем определении.

К наиболее важным примерам (BL, θ) -зависимых случайных полей относятся гауссовские и ассоциированные поля с непосредственно интегрируемой ковариационной функцией [1, теорема 1.5.18], [8]. Для случайных полей с этим типом зависимости известны многие асимптотические результаты, среди которых центральная предельная теорема (в том числе различные оценки скорости сходимости), принципы инвариантности, законы повторного логарифма (см. [1]).

Следующий результат устанавливает асимптотическую нормальность интегралов слабо зависимого случайного поля, домноженного на регулярную функцию от поля X . Он будет далее использоваться при доказательстве функциональной предельной теоремы для интегралов по множествам уровня.

Теорема 2. Пусть $Y = \{Y(s), s \in \mathbf{R}^d\}$ — непрерывное (BL, θ) -зависимое строго стационарное случайное поле с нулевым средним и интегрируемой ковариационной функцией R_Y , а $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ — ограниченная липшицева функция. Тогда

$$Z_n := n^{-d/2} \int_{[0, n]^d} Y(s) \|\nabla X(s)\| \varphi(X(s)) ds \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

по распределению при $n \rightarrow \infty$, где

$$\sigma^2 = \int_{\mathbf{R}^d} R_Y(s) \mathbf{E} \|\nabla X(0)\| \|\nabla X(s)\| \varphi(X(0)) \varphi(X(s)) ds.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аппроксимируем элементы изучаемой последовательности случайными величинами, изучать которые удобнее. Для этого потребуются три леммы. Положим $\psi(s, N) = \prod_{j=1}^d (1 - |s_j|/N)^+$, где $s \in \mathbf{R}^d$, $N \in \mathbf{N}$.

Лемма 5. Справедливы следующие утверждения.

1) Пусть $\{\eta_j, j \in \mathbf{Z}^d\}$ — стационарное случайное поле с абсолютно суммируемой ковариационной функцией R_η . Тогда

$$\frac{1}{n^d} \mathbf{D} \sum_{j \in \mathbf{Z}^d \cap (0, n]^d} \eta_j = \sum_{j \in \mathbf{Z}^d} \psi(j, n) R_\eta(j) \rightarrow \sum_{j \in \mathbf{Z}^d} R_\eta(j), \quad n \rightarrow \infty.$$

2) Пусть $\{\eta(s), s \in \mathbf{R}^d\}$ — стационарное случайное поле с интегрируемой ковариационной функцией R_η . Тогда

$$\frac{1}{n^d} \mathbf{D} \int_{[0, n]^d} \eta(s) ds = \int_{\mathbf{R}^d} \psi(s, n) R_\eta(s) ds \rightarrow \int_{\mathbf{R}^d} R_\eta(s) ds, \quad n \rightarrow \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о получается заменой порядка суммирования (соответственно заменой переменной в двойном интеграле) и применением теоремы о мажорируемой сходимости. Сходные рассуждения проведены в [1, теорема 3.1.8] и [3].

Лемма 6. Пусть $\{\eta_n, n \in \mathbf{N}\}$ и $\{\eta_{n,k}, n, k \in \mathbf{N}\}$ — наборы случайных величин. Предположим, что

1) при каждом $k \in \mathbf{N}$ выполняются соотношения $\eta_{n,k} \rightarrow N(0, \sigma_k^2)$ и $\mathbf{E} \eta_{n,k}^2 \rightarrow \sigma_k^2$, когда $n \rightarrow \infty$;

2) для любого n верна оценка $\mathbf{E}(\eta_n - \eta_{n,k})^2 \leq \beta^2(k)$, где $\beta(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$;

3) $\mathbf{E}\eta_n^2 \rightarrow \sigma^2$, $n \rightarrow \infty$.

Тогда $\eta_n \rightarrow N(0, \sigma^2)$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Из третьего условия следует, что последовательность $\{\eta_n, n \in \mathbf{N}\}$ плотна. Для ее произвольного частичного предела по распределению η , фиксированного $k \in \mathbf{N}$ и любого $\lambda \in \mathbf{R}$ имеем

$$|\mathbf{E}e^{i\lambda\eta} - e^{-\sigma_k^2\lambda^2/2}| \leq |\mathbf{E}e^{i\lambda\eta} - \mathbf{E}e^{i\lambda\eta_n}| + |\mathbf{E}e^{i\lambda\eta_n} - \mathbf{E}e^{i\lambda\eta_{n,k}}| + |\mathbf{E}e^{i\lambda\eta_{n,k}} - e^{-\sigma_k^2\lambda^2/2}|.$$

Устремляя n к бесконечности, видим, что левая часть не превосходит $|\lambda|\beta(k)$. Таким образом, $\sigma_k^2 \rightarrow \nu^2$, $k \rightarrow \infty$, и $\eta \sim N(0, \nu^2)$. Наконец, из оценки

$$|\mathbf{E}\eta_n^2 - \nu^2| \leq |\mathbf{E}\eta_n^2 - \mathbf{E}\eta_{n,k}^2| + |\mathbf{E}\eta_{n,k}^2 - \sigma_k^2| + |\sigma_k^2 - \nu^2|,$$

справедливой для любого $k \in \mathbf{N}$, следует, что $\nu^2 = \sigma^2$. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. Для $q \in \mathbf{N}$ случайное поле $\{Y(k/q), k \in \mathbf{Z}^d\}$ является (BL, θ) -зависимым. При этом, если $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ — липшицева функция, то

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}^d: \|k\|_\infty \geq m} \left| \text{cov} \left(f(Y(0)), f \left(Y \left(\frac{k}{q} \right) \right) \right) \right| \leq 2q^d \text{Lip}^2(f) \theta_Y \left(\frac{m}{q} \right)$$

для любого $m \in \mathbf{N}$.

Доказательство. Первое утверждение следует непосредственно из определений 1 и 2. Для проверки второго зададим произвольное $Q > m$ и положим

$$\begin{aligned} T_{Q,+} &= \left\{ k \in \mathbf{Z}^d: Q \geq \|k\|_\infty \geq m, \text{cov} \left(f(Y(0)), f \left(Y \left(\frac{k}{q} \right) \right) \right) \geq 0 \right\}, \\ T_{Q,-} &= \left\{ k \in \mathbf{Z}^d: Q \geq \|k\|_\infty \geq m, \text{cov} \left(f(Y(0)), f \left(Y \left(\frac{k}{q} \right) \right) \right) < 0 \right\}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\sum_{k \in T_{Q,+}} \text{cov} \left(f(Y(0)), f \left(Y \left(\frac{k}{q} \right) \right) \right) \leq q^d \text{Lip}^2(f) \theta_Y \left(\frac{m}{q} \right)$$

по определению (BL, θ) -зависимости. Переходя к пределу при $Q \rightarrow \infty$ и выписывая аналогичную оценку для суммы по $T_{Q,-}$, получаем требуемое утверждение. Лемма 7 доказана.

Для $q \in \mathbf{N}$, $q > 1$ и $s \in \mathbf{R}^d$ обозначим

$$\gamma_q(s) := \left(\frac{[qs_1]}{q}, \dots, \frac{[qs_d]}{q} \right) \in \mathbf{R}^d.$$

Введем дискретизацию случайного поля Y , полагая $Y_q(s) = Y(\gamma_q(s))$. Другими словами, мы приближаем значение случайного поля в точке его значением в ближайшей снизу (покоординатно) точке с координатами вида m/q , где $m \in \mathbf{Z}$.

Положим

$$Z_{n,q} := n^{-d/2} \int_{[0,n]^d} Y_q(s) \|\nabla X(s)\| \varphi(X(s)) ds.$$

В силу лемм 5 и 6 нам достаточно доказать, что $Z_{n,q} \rightarrow N(0, \sigma_q^2)$ по распределению, $\mathbf{E}Z_{n,q}^2 \rightarrow \sigma_q^2$ при $n \rightarrow \infty$ и $\mathbf{E}(Z_n - Z_{n,q})^2 \rightarrow 0$ при $q \rightarrow \infty$ равномерно по $n \in \mathbf{N}$. Проверим вначале последнее соотношение. Введем случайные поля $W(s) = Y(s) \|\nabla X(s)\| \varphi(X(s))$, $W_q(s) = Y_q(s) \|\nabla X(s)\| \varphi(X(s))$ и $V(s) = \|\nabla X(s)\| \varphi(X(s))$, $s \in \mathbf{R}^d$.

Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Z_n - Z_{n,q})^2 &= n^{-d} \iint_{[0,n]^d \times [0,n]^d} \mathbf{E}(W(t) - W_q(t))(W(s) - W_q(s)) ds dt \\ &\quad \times n^{-d} \iint_{[0,n]^d \times [0,n]^d} \left(R_Y(t-s) - R_Y(\gamma_q(t-s)) \right. \\ &\quad \left. - R_Y(t - \gamma_q(s)) + R_Y(\gamma_q(t) - \gamma_q(s)) \right) \\ &\quad \times \mathbf{E} V(s) V(t) ds dt. \end{aligned}$$

Возьмем любое $K > 4$. Введем модуль непрерывности

$$w_q(f) = \sup_{s, t \in \mathbf{R}^d: \|s-t\|_\infty \leq 1/q} |f(s) - f(t)|$$

для функции $f: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$. Тогда $\mathbf{E}(Z_n - Z_{n,q})^2$ не превосходит суммы

$$\begin{aligned} \mathbf{E} V^2(0) &\left((2K)^d w_q(R_Y) + 2 \int_{s: \|s\|_\infty \geq K/2} |R_Y(s)| ds \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_{s: \|s\|_\infty \geq K/2} |R_Y(\gamma_q(s))| ds \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Второе выражение в (8) может быть сделано сколь угодно малым за счет выбора K . Чтобы оценить последнее слагаемое в (8), следует заметить, что

$$\int_{s: \|s\|_\infty \geq K/2} |R_Y(\gamma_q(s))| ds \leq q^{-d} \sum_{k: \|k\|_\infty \geq qK/4} \left| R_Y\left(\frac{k}{q}\right) \right|.$$

По лемме 7 последнюю сумму можно сделать сколь угодно малой равномерно по q , подобрав достаточно большое K .

Соотношение $\mathbf{E} Z_{n,q}^2 \rightarrow \sigma_q^2$ при $n \rightarrow \infty$ и фиксированном q следует из леммы 5 и доказанной выше интегрируемости функции $R_Y(\gamma_q(\cdot))$. Покажем, что $Z_{n,q} \rightarrow N(0, \sigma_q^2)$, $n \rightarrow \infty$ (здесь и далее $q \in \mathbf{N}$ фиксировано). Пусть $H_M(x) = (|x| \wedge M) \operatorname{sgn}(x)$, где $M > 0$ и $x \in \mathbf{R}$. Положим

$$\begin{aligned} Z_{1,n,q} &= n^{-d/2} \int_{[0,n]^d} \left(H_M(Y_q(s)) - \mathbf{E} H_M(Y_q(s)) \right) H_M(\|\nabla X(s)\|) \varphi(X(s)) ds, \\ Z_{2,n,q} &= n^{-d/2} \int_{[0,n]^d} \left(Y_q(s) - H_M(Y_q(s)) + \mathbf{E} H_M(Y_q(s)) \right) \\ &\quad \times H_M(\|\nabla X(s)\|) \varphi(X(s)) ds, \\ Z_{3,n,q} &= n^{-d/2} \int_{[0,n]^d} Y_q(s) \left(\|\nabla X(s)\| - H_M(\|\nabla X(s)\|) \right) \varphi(X(s)) ds. \end{aligned}$$

Для упрощения записи мы не указываем, что данные семейства случайных величин зависят и от M .

По лемме 6 для доказательства нужного соотношения достаточно убедиться, что $Z_{1,n,q} \rightarrow N(0, \sigma_{M,q}^2)$ по распределению, $\mathbf{E} Z_{1,n,q}^2 \rightarrow \sigma_{M,q}^2$ при $n \rightarrow \infty$ и фиксированном M и что $\sup_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{E}(Z_{n,q} - Z_{1,n,q})^2 \rightarrow 0$ при $M \rightarrow \infty$.

Начнем с проверки первых двух соотношений. Введем параллелепипед

$$S_k = \left(\frac{k_1}{q}, \frac{k_1+1}{q} \right] \times \dots \times \left(\frac{k_1}{q}, \frac{k_1+1}{q} \right]$$

для $k \in \mathbf{Z}^d$. Рассмотрим случайные величины

$$\xi_k = \left(H_M \left(Y \left(\frac{k}{q} \right) \right) - \mathbf{E} H_M \left(Y \left(\frac{k}{q} \right) \right) \right) \times \int_{S_k} H_M \left(\|\nabla X(s)\| \right) \varphi(X(s)) ds, \quad k \in \mathbf{Z}^d.$$

Лемма 8. Случайное поле $\{\xi_k, k \in \mathbf{Z}^d\}$ является (BL, θ) -зависимым.

Доказательство. Пусть C_M — константа Липшица функции $G: \mathbf{R}^{d+1} \rightarrow \mathbf{R}$, определенной равенством

$$G(x_1, \dots, x_{d+1}) = H_M((x_1^2 + \dots + x_d^2)^{1/2}) \varphi(x_{d+1}).$$

Положим $U(k) = \int_{S_k} H_M(\|\nabla X(t)\|) \varphi(X(t)) dt$ для $k \in \mathbf{Z}^d$ и определим случайное поле $U = \{U(k), k \in \mathbf{Z}^d\}$. Тогда оно (BL, θ) -зависимо с последовательностью

$$\theta_U(r) \leq C_M^2 \int_{\|s\|_\infty \geq (r-1)/q} \left(|R_X(s)| + \sum_{j=1}^d \left| \frac{\partial R_X(s)}{\partial s_j} \right| + \sum_{j,l=1}^d \left| \frac{\partial^2 R_X(s)}{\partial s_j \partial s_l} \right| \right) ds,$$

где $r \in \mathbf{N}$. Для проверки этого факта следует приблизить интегралы по множествам S_k суммами Римана, воспользоваться свойством квазиассоциированности гауссовской системы [1, теорема 1.5.18], а затем перейти к пределу при стремлении диаметра разбиения к нулю.

Покажем теперь, что векторнозначное случайное поле $\{(Y(k/q), U(k)), k \in \mathbf{Z}^d\}$ является (BL, θ) -зависимым. Пусть конечные непересекающиеся множества $I, J \subset \mathbf{Z}^d$ находятся на расстоянии r и функции $f: \mathbf{R}^{2|I|} \rightarrow \mathbf{R}, g: \mathbf{R}^{2|J|} \rightarrow \mathbf{R}$ липшицевы. Имеем

$$\begin{aligned} & \text{cov}(f(Y_I, U_I), g(Y_J, U_J)) \\ &= \mathbf{E} \left(\mathbf{E}(f(Y_I, U_I)g(Y_J, U_J) | U) - \mathbf{E}(f(Y_I, U_I) | U) \mathbf{E}(g(Y_J, U_J) | U) \right) \\ &+ \text{cov} \left(\mathbf{E}(f(Y_I, U_I) | U), \mathbf{E}(g(Y_J, U_J) | U) \right) \\ &= \mathbf{E} \text{cov}(f(Y_I, u_1), g(Y_J, u_2)) \Big|_{u_1=U_I, u_2=U_J} + \text{cov}(f_Y(U_I), g_Y(U_J)) \\ &\leq \text{Lip}(f) \text{Lip}(g) q^d (|I| \wedge |J|) (\theta_U(r) + \theta_Y(r)), \end{aligned}$$

здесь $f_Y(U_I) = \mathbf{E} f(Y_I, u)|_{u=U_I}$ и $g_Y(U_J)$ определяется аналогично.

Утверждение леммы следует теперь из того, что при любом $k \in \mathbf{Z}^d$ случайная величина ξ_k получается из случайного вектора $(Y(k/q), U(k))$ применением липшицевой функции. Лемма 8 доказана.

Заметим, что

$$Z_{1,n,q} = n^{-d/2} \sum_{k \in \mathbf{Z}^d: k/q \in [0, n]^d} \xi_k.$$

Из леммы 8 и теоремы 3.1.12 в [1] следует, что $Z_{1,n,q} \rightarrow N(0, \sigma_{M,q}^2)$ при $n \rightarrow \infty$, где $\sigma_{M,q}^2 = \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \text{cov}(\xi_0, \xi_k)$. По лемме 5 и замечанию 3.1.10 в [1] имеем $\mathbf{E} Z_{1,n,q}^2 \rightarrow \sigma_{M,q}^2$.

Далее,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} Z_{2,n,q}^2 &= \int_{\mathbf{R}^d} \psi(s, n) \text{cov} \left(Y(0) - H_M(Y(0)), Y(\gamma_q(s)) - H_M(Y(\gamma_q(s))) \right) \\ &\times \mathbf{E} H_M \left(\|\nabla X(0)\| \right) \varphi(X(0)) H_M \left(\|\nabla X(s)\| \right) \varphi(X(s)) ds. \end{aligned}$$

Для любого $M > 0$ верны оценки $|H_M(x)| \leq x$ и $|x - H_M(x)| \leq |x| I\{|x| > M\}$, $x \in \mathbf{R}$. С учетом этих оценок и того, что по лемме 7 интеграл в последнем выражении сходится равномерно по $M > 0$, видим, что $\mathbf{E} Z_{2,n,q}^2$ стремится к нулю при $M \rightarrow \infty$.

Остается проверить, что дисперсия предельного распределения равна σ^2 , но это следует из леммы 5. Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 1. Естественным примером (BL, θ) -зависимого поля, удовлетворяющего условиям теоремы 2, является поле дробового шума

$$Y(s) = \sum_i \xi_i \psi(s - x_i), \quad s \in \mathbf{R}^d.$$

Здесь $\{\xi_i, i \in \mathbf{N}\}$ — семейство независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным вторым моментом, $\{x_i, i \in \mathbf{N}\}$ — пуассоновский точечный процесс в $\mathbf{R}^d$, ведущая мера которого совпадает с мерой Лебега, а функция $\psi: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ непрерывна и интегрируема. Пусть функция $R(s) = \int_{\mathbf{R}^d} |\psi(s+t)\psi(t)| dt$ непрерывна и непосредственно интегрируема по Риману, а функция $\varphi_t(u) = \sup_{s: \|s\| \leq t} |\psi(s-u)|$ при любом $A > 0$ интегрируема. Последнее свойство обеспечивает непрерывность реализаций поля Y (см. [7]). Далее, если ξ и ψ неотрицательны, то поле Y ассоциированное [1, с. 51]. Если же это не так, то следует рассмотреть векторнозначное случайное поле с элементами

$$(Y_1(s), Y_2(s), Y_3(s), Y_4(s)) = \left(\sum_i \xi_i^+ \psi^+(s - x_i), \sum_i \xi_i^+ \psi^-(s - x_i), \right. \\ \left. \sum_i \xi_i^- \psi^+(s - x_i), \sum_i \xi_i^- \psi^-(s - x_i) \right), \quad s \in \mathbf{R}^d.$$

Аналогично [1, теорема 1.3.8] доказывается, что такое поле слабо ассоциированно [1, с. 109]. Следовательно, поле Y , получающееся из указанного векторнозначного поля применением линейной функции к каждому элементу, (BL, θ) -зависимо (доказательство аналогично [1, теорема 1.5.18, а)).

Рассмотрим теперь асимптотическое поведение нормированных интегралов вида

$$Z_n(u) := n^{-d/2} \int_{[0,n]^d} Y(s) N_X(ds, u), \quad n \in \mathbf{N}.$$

Пусть p_η — плотность случайного вектора η .

Лемма 9. Для любых $u, v \in \mathbf{R}$ справедливо соотношение

$$\mathbf{E} Z_n(u) Z_n(v) = n^{-d} \int_{[0,n]^d \times [0,n]^d} R_Y(t-s) \\ \times \mathbf{E} \left(\|\nabla X(t)\| \|\nabla X(s)\| \mid X(t) = u, X(s) = v \right) \\ \times p_{X(t), X(s)}(u, v) ds dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $y: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ — непрерывная функция. Аппроксимируя ее функциями, постоянными на параллелепипедах и пользуясь теоремой 6.9 [5] и теоремой о мажорируемой сходимости, получаем, что

$$n^{-d} \mathbf{E} \int_{[0,n]^d} y(t) N_X(dt, u) \int_{[0,n]^d} y(s) N_X(ds, u) \\ = n^{-d} \int_{[0,n]^d \times [0,n]^d} y(t)y(s) \mathbf{E} \left(\|\nabla X(t)\| \|\nabla X(s)\| \mid X(t) = u, X(s) = v \right) \\ \times p_{X(t), X(s)}(u, v) ds dt$$

(истинность условия (iii') упомянутой теоремы в [5] вытекает, например, из доказываемой далее леммы 10, а условия (iv) — из (2)). Остается воспользоваться теоремой Фубини. Лемма 9 доказана.

Теорема 3. *Случайные процессы $\{Z_n(\cdot), n \in \mathbf{N}\}$ сходятся при $n \rightarrow \infty$ по распределению в пространстве $C(\mathbf{R})$ к центрированному гауссовскому процессу Z с ковариационной функцией*

$$\mathbf{E} Z(u)Z(v) = \int_{\mathbf{R}^d} R(s) \mathbf{E} \left(\|\nabla X(0)\| \|\nabla X(s)\| \mid X(0) = u, X(s) = v \right) \times p_{X(0), X(s)}(u, v) ds.$$

Доказательство. Убедимся вначале в плотности семейства рассматриваемых случайных процессов. Для этого достаточно рассматривать значения u , принадлежащие конечному отрезку $[-M, M]$. Проверим, что

$$\mathbf{E} (Z_t(u) - Z_t(v))^2 \leq C_1(M) |u - v|^{1+\rho} \quad (9)$$

для всех $u, v \in [-M, M]$ и некоторых $C_1(M)$, $\rho = \rho(M) > 0$. По лемме 9 имеем

$$\mathbf{E} (Z_t(u) - Z_t(v))^2 = F(u, u) + F(v, v) - 2F(u, v), \quad (10)$$

где

$$F(u, v) = \int_{[0, n]^d} \psi(s, n) R_Y(s) \mathbf{E} \left(\|\nabla X(0)\| \|\nabla X(s)\| \mid X(0) = u, X(s) = v \right) \times p_{X(0), X(s)}(u, v) ds.$$

Оценка правой части (10) получается так же, как оценка аналогичного выражения в [12] (во всех выражениях под знаком интеграла содержится множитель $R_Y(s)$, который не влияет на сходимость интегралов в окрестности нуля и влечет сходимость в бесконечности). Единственное уточнение, которое необходимо сделать, касается условия (В), используемого в указанной работе. Справедливость этого условия вытекает из следующей леммы.

Лемма 10. *Пусть $r(\alpha) = (\alpha, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^d$ для $\alpha \in \mathbf{R}$, и пусть $B(s)$ — матрица ковариаций случайного вектора $(X(0), X(r(\|s\|)), \partial X(0)/\partial s_1, \partial X(r(\|s\|))/\partial s_1)$. Тогда существует $L > 8$ такое, что для всех s из некоторой окрестности нуля справедливо неравенство $\det B(s) \geq \|s\|^L$.*

Доказательство. Достаточно проверить, что

$$\inf_{z \neq 0} \frac{(B(s)z, z)}{\|z\|^2} \geq \|s\|^L.$$

Пусть f — спектральная плотность случайного процесса $\{X(r(\alpha)), \alpha \in \mathbf{R}\}$ (она существует, так как соответствующая ковариационная функция интегрируема). В силу непрерывности f существуют такие $\mu > 0$ и $a < b$, что $f(\lambda) \geq \mu$ всюду на $[a, b]$. Тогда для любого ненулевого $z \in \mathbf{R}^4$

$$\begin{aligned} (B(s)z, z) &= \mathbf{D} \left(z_1 X(0) + z_2 X(r(\|s\|)) + z_3 \frac{\partial X(0)}{\partial s_1} + z_4 \frac{\partial X(r(\|s\|))}{\partial s_1} \right) \\ &\geq \mu \int_a^b \left| z_1 + z_2 e^{i\|s\|\lambda} + z_3 i\lambda + z_4 i\lambda e^{i\|s\|\lambda} \right|^2 d\lambda. \end{aligned}$$

Последний интеграл представляет собой квадратичную форму от $z \in \mathbf{R}^4$. Вычисляя ее детерминант, приходим к требуемому утверждению. Лемма 10 доказана.

Для доказательства сходимости конечномерных распределений зафиксируем числа $u_1, \dots, u_k, c_1, \dots, c_k \in \mathbf{R}$ и докажем, что

$$n^{-d/2} \sum_{j=1}^k c_j Z_n(u_j) \rightarrow N(0, \sigma^2),$$

где

$$\sigma^2 = \sum_{i,j=1}^k \mathbf{E} Z(u_i) Z(u_j).$$

Возьмем $\varepsilon \in (0, 1)$ и четную непрерывную функцию $\psi_\varepsilon: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ такую, что $\psi(x) = 0$ при $x \notin [-\varepsilon, \varepsilon]$ и $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \psi(x) dx = 1$. Положим

$$Z_n(\varepsilon, u) = n^{-d/2} \int_{[0,n]^d} Y(t) \|\nabla X(t)\| \psi_\varepsilon(X(t) - u) dt.$$

В силу лемм 5, 6 и 9, а также теоремы 2 нам достаточно показать, что

$$\mathbf{E} (Z_n(\varepsilon, u) - Z_n(u))^2 \rightarrow 0$$

равномерно по n , когда $\varepsilon \rightarrow 0$.

По формуле коплощади (предложение 6.13 в [5] и формула (6.31) там же) справедливо равенство

$$Z_n(\varepsilon, u) = \int_{\mathbf{R}} Z_n(v) \psi_\varepsilon(u - v) dv.$$

С учетом этого, оценки (9) и неравенства Йенсена имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} (Z_n(\varepsilon, u) - Z_n(u))^2 &= \mathbf{E} \left(\int_{\mathbf{R}} (Z_n(v) - Z_n(u)) \psi_\varepsilon(u - v) dv \right)^2 \\ &\leq \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}} (Z_n(v) - Z_n(u))^2 \psi_\varepsilon(u - v) dv \leq C_1(M) \varepsilon, \end{aligned}$$

где M взято так, что $[u - 1, u + 1] \subset [-M, M]$. Теорема 3 доказана.

З а м е ч а н и е 2. Мы предполагали, что случайное поле Y имеет нулевое среднее. Однако от данного ограничения можно избавиться, если центрировать те выражения, асимптотическое поведение которых изучается, и соответствующим образом изменить предельные ковариационные функции. В частности, при $Y \equiv 1$ это позволяет установить функциональную предельную теорему для хаусдорфовых мер $N_X([0, n]^d, u)$, когда $n \rightarrow \infty$. При этом если в работе [12] доказано только наличие у рассматриваемых случайных процессов модификаций, удовлетворяющих функциональной центральной предельной теореме, то в настоящей работе установлено, что такая теорема справедлива для самих процессов (в силу теоремы 1, устанавливающей их непрерывность). Еще одно обобщение [12] заключается в том, что удалось избавиться от условия (В) из упомянутой работы. Как показывает лемма 10, это условие следует из других требований к случайному полю X .

Автор признателен профессору А. В. Булинскому за внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булинский А. В., Шашкин А. П. Предельные теоремы для ассоциированных случайных полей и родственных систем. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008, 477 с.
2. Запорожец Д. Н., Ибрагимов И. А. О площади случайной поверхности. — Зап. науч. сем. ПОМИ, 2010, т. 384, с. 154–175.
3. Мешенмозер Д., Шашкин А. Функциональная центральная предельная теорема для меры поверхностей уровня гауссовского случайного поля. — Теория вероятн. и ее примен., 2012, т. 57, в. 1, с. 168–178.
4. Adler R. J., Taylor J. E. Random Fields and Geometry. New York: Springer, 2007, 448 p.

5. *Azaïs J.-M., Wschebor M.* Level Sets and Extrema of Random Processes and Fields. Hoboken: Wiley, 2009, 393 p.
6. *Berman S.M.* Local times and sample functions properties of stationary Gaussian processes. — Trans. Amer. Math. Soc., 1969, v. 137, p. 277–299.
7. *Biermé H., Desolneux A.* Crossings of smooth shot noise processes. — Ann. Appl. Probab., 2012, v. 22, № 6, p. 2240–2281.
8. *Bulinski A.* Central limit theorem for random fields and applications. — Advances in Data Analysis. Boston: Birkhäuser, 2010, p. 141–150.
9. *Bulinski A., Suquet Ch.* Normal approximation for quasi-associated random fields. — Statist. Probab. Lett., 2001, v. 54, № 2, p. 215–226.
10. *Iribarren I.* Asymptotic behaviour of the integral of a function on the level set of a mixing random field. — Probab. Math. Statist., 1989, v. 10, № 1, p. 45–56.
11. *Kratz M.* Level crossings and other level functionals of stationary Gaussian processes. — Probab. Surv., 2006, v. 3, p. 230–288.
12. *Shashkin A.* A functional central limit theorem for the level measure of a Gaussian random field. — Statist. Probab. Lett., 2013, v. 83, № 2, p. 637–643.

Поступила в редакцию
16.X.2013

Исправленный вариант
27.III.2014

© 2015 г.

KERN P.*

A GENERAL MULTIPARAMETER VERSION OF GNEDENKO'S TRANSFER THEOREM

Предельные теоремы для случайного числа независимых случайных величин часто называют теоремами о переносе. Начало исследованиям в этом направлении для сумм случайных величин с независимым случайным объемом выборки было положено Б.В.Гнеденко. Мы приводим допускающую широкое применение теорему о переносе для случайных величин на общем метрическом пространстве со случайными многомерными параметрами вместо случайных объемов выборки. Это обобщает существенный принцип, лежащий в основе известных в литературе результатов типа теорем о переносе.

Ключевые слова и фразы: теорема о переносе, случайная остановка, случайная замена времени, независимые случайные индексы, случайные поля, отрицательная ассоциированность, инфинитезимальная схема серий, полустойчивая область притяжения, случайные размещения.

1. Introduction. In 1969 Gnedenko and Fahim [15] proved the following limit theorem for sums of a random number of real-valued random variables; see also [14] for the precise assumptions. For every $n \in \mathbb{N}$ let $(X_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ be a sequence of independent and identically distributed (i.i.d.) random variables, and let $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of positive integer-valued random variables such that T_n and $(X_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ are independent for every $n \in \mathbb{N}$. If there exists a sequence $k_n \rightarrow \infty$ such that as $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=1}^{k_n} X_{n,k} \Rightarrow \mu \quad \text{and} \quad \frac{T_n}{k_n} \Rightarrow \rho \quad (1.1)$$

* Mathematisches Institut, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf, D-40225 Düsseldorf, Germany; e-mail: kern@math.uni-duesseldorf.de