Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Боровков, А. А. Могульский, Принципы больших уклонений для траектории обобщенных процессов восстановления. I, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2015, том 60, выпуск 2, 227–247

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4617>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 17:25:06

© 2015 г. **БОРОВКОВ А. А.*, МОГУЛЬСКИЙ А. А.*****ПРИНЦИПЫ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ ТРАЕКТОРИЙ
ОБОБЩЕННЫХ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ. I¹⁾**

Настоящая работа продолжает исследования принципов больших уклонений обобщенных процессов восстановления, начатые в [1], [2]. Основным объектом изучения являются вероятности больших уклонений *траекторий* обобщенных процессов восстановления. Работа состоит из двух частей. В части I при некотором условии на распределение процесса получен так называемый первый частичный локальный принцип больших уклонений для траекторий обобщенного процесса восстановления. В части II при альтернативном условии получен второй частичный локальный принцип больших уклонений. При дополнительных условиях получены также «полный локальный» и «полный интегральный» принципы больших уклонений для обобщенных процессов восстановления.

Ключевые слова и фразы: обобщенный процесс восстановления, принцип больших уклонений, функция восстановления, функция уклонений, вторая функция уклонений, частичный принцип больших уклонений, локальный принцип больших уклонений.

Введение. Пусть заданы случайный вектор (τ_0, ζ_0) и независимая от него последовательность независимых одинаково распределенных случайных невырожденных векторов $(\tau, \zeta), (\tau_1, \zeta_1), (\tau_2, \zeta_2), \dots$, где $\tau_0 \geq 0$, $\tau > 0$. Обозначим

$$\begin{aligned} T_0 &:= 0, & T_n &:= \sum_{j=1}^n \tau_j & \text{при } n \geq 1; \\ T_{0,-1} &:= 0, & T_{0,n} &:= \tau_0 + T_n & \text{при } n \geq 0; \\ Z_0 &:= 0, & Z_n &:= \sum_{j=1}^n \zeta_j & \text{при } n \geq 1; \\ Z_{0,-1} &:= 0, & Z_{0,n} &:= \zeta_0 + Z_n & \text{при } n \geq 0. \end{aligned}$$

Пусть при $t \geq 0$

$$\eta(t) := \min\{k \geq 0: T_{0,k} \geq t\}, \quad \nu(t) := \eta(t) - 1. \quad (0.1)$$

*Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия; e-mail: borovkov@math.nsc.ru; mogul@math.nsc.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 14-01-00220, 13-01-12415).

Ясно, что для всех $t > 0$ выполняется равенство

$$\nu(t) = \max\{k \geq -1: T_{0,k} < t\}. \quad (0.2)$$

Обобщенный процесс восстановления (о.п.в.) $Z(t)$, $t \geq 0$, определяется равенством

$$Z(t) := Z_{0,\nu(t)}.$$

Если $(\tau_0, \zeta_0) =_d (\tau, \zeta)$, то процесс $Z(t)$ будем называть *однородным* о.п.в.; в противном случае процесс $Z(t)$ будем называть *неоднородным*. Модель неоднородного о.п.в. является стандартной и общепринятой (см., например, [3], [4]). Она реализуется, в частности, для важного класса о.п.в. со стационарными приращениями (подробнее см. в [2, § 3]).

Обзор литературы, касающейся проблем больших уклонений о.п.в., содержится в [2]. Здесь мы отметим лишь некоторые результаты, относящиеся к изучению асимптотики вероятностей больших уклонений *траекторий* о.п.в. Отыскание точной асимптотики для распределений каких-либо функционалов от $Z(tT)$, $t \in [0, 1]$ при $T \rightarrow \infty$ (отличных от значений $Z(tT)$ при фиксированном $t = t_0$) является трудной и не всегда разрешимой задачей. Используя аналитические методы, в [5] удалось найти точную асимптотику (включая асимптотические разложения) совместного распределения $(\max_{t \leq T} Z(t), Z_{\eta(T)}, T_{\eta(T)})$. В [6] установлен принцип больших уклонений (п.б.у.) в пространстве траекторий для простого однородного процесса восстановления $\eta(tT)/T$, $t \in [0, 1]$.

В частных случаях, когда процесс однороден, τ и ζ независимы, а τ имеет либо экспоненциальное, либо геометрическое распределение (включая случай $\tau \equiv 1$), о.п.в. превращается в процесс с независимыми приращениями (с дискретным временем, если τ целочисленно). Для таких процессов п.б.у. весьма полно изучены в [1, гл. 4], [7], [8].

Перейдем теперь к описанию результатов, полученных в [1], [2], которые являются отправными для рассмотрений в настоящей работе. В [1, § 4.10], [2] найдены условия, близкие к минимальным, при которых существует предел (см. теорему 0.1 ниже и теорему 2.1 в [2])

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P} \left(\frac{Z(T)}{T} \in (\alpha)_\varepsilon \right), \quad (0.3)$$

где $(\alpha)_\varepsilon$ есть ε -окрестность точки α , $\varepsilon = \varepsilon_T$ сходится к нулю достаточно медленно при $T \rightarrow \infty$. (Высказывание « $\varepsilon = \varepsilon_T$ сходится к нулю достаточно медленно при $T \rightarrow \infty$ » означает следующее: 1) найдется последовательность $\varepsilon_T \rightarrow 0$, $T \rightarrow \infty$, для которой существует предел (0.3); 2) он существует и для любой другой последовательности $\varepsilon'_T \rightarrow 0$, $T \rightarrow \infty$, такой, что $\varepsilon'_T \geq \varepsilon_T$; 3) если $\varepsilon'_T \rightarrow 0$, $\varepsilon'_T < \varepsilon_T$, то предел (0.3), вообще говоря, не существует.) Кроме того, в [2] при дополнительных условиях

установлен следующий локальный п.б.у. для конечномерных распределений: при произвольных $0 = u_0 < u_1 < \dots < u_k = 1$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ доказано существование предела (см. теорему 0.2 ниже и теорему 4.2 в [2])

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P} \left(\bigcap_{j=1}^k \left\{ \frac{Z(u_j T) - Z(u_{j-1} T)}{T} \in (\alpha_j)_\varepsilon \right\} \right), \quad (0.4)$$

где $\varepsilon = \varepsilon_T \rightarrow 0$ достаточно медленно при $T \rightarrow \infty$. Найден явный вид пределов (0.3), (0.4). Установлены также интегральные п.б.у. для конечномерных распределений (см. теорему 4.2 в [2]).

В настоящей работе изучается вероятность больших уклонений для нормированных траекторий

$$z_T = z_T(t) := \frac{1}{x} Z(tT) \quad (0.5)$$

на отрезке $t \in [0, 1]$, где нормирующая последовательность $x = x(T)$ удовлетворяет условию $x \sim T$ при $T \rightarrow \infty$. Получены так называемые первый и второй частичные локальные принципы больших уклонений для траекторий о.п.в. При дополнительных условиях получены «полный локальный» и «полный интегральный» принципы больших уклонений для о.п.в.

Приведем формулировки некоторых утверждений из [1], [2], которые понадобятся в данной работе. Мы будем использовать следующие моментные условия Крамера на распределение случайного вектора $\xi := (\tau, \zeta)$.

$[\mathbf{C}_0]$. $\mathbf{E} e^{v|\xi|} < \infty$ при некотором $v > 0$.

$[\mathbf{C}_\infty]$. $\mathbf{E} e^{v|\xi|} < \infty$ при любом $v > 0$.

Будем писать $\xi \in [\mathbf{C}_0]$ ($\xi \in [\mathbf{C}_\infty]$), если случайная величина или вектор ξ удовлетворяют условию $[\mathbf{C}_0]$ ($[\mathbf{C}_\infty]$). Большая часть утверждений работы доказаны при выполнении условий $\xi_0 \in [\mathbf{C}_0]$, $\xi \in [\mathbf{C}_0]$. Поэтому везде ниже будем считать, что эти условия выполнены, если не оговорено противное.

Пусть $\Lambda(v, \alpha)$ обозначает функцию уклонений случайного вектора ξ :

$$\Lambda(v, \alpha) := \sup_{(\lambda, \mu)} \{ \lambda v + \mu \alpha - A(\lambda, \mu) \}, \quad (v, \alpha) \in \mathbb{R}^2,$$

где

$$A(\lambda, \mu) := \ln \mathbf{E} e^{\lambda \tau + \mu \zeta}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Определим далее вторую функцию уклонений $D(v, \alpha)$ вектора $\xi = (\tau, \zeta)$, положив

$$D(v, \alpha) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D_\Lambda((v, \alpha)_\varepsilon), \quad (v, \alpha) \in \mathbb{R}^2, \quad (0.6)$$

где

$$D_\Lambda(B) := \inf_{(v, \alpha) \in B} D_\Lambda(v, \alpha), \quad D_\Lambda(v, \alpha) := \inf_{\theta > 0} \theta \Lambda \left(\frac{v}{\theta}, \frac{\alpha}{\theta} \right). \quad (0.7)$$

Для второй функции уклонений при всех $(v, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ справедливо следующее представление (см., например, [2]):

$$D(v, \alpha) = \sup_{(\lambda, \mu) \in \mathcal{A}^{\leq 0}} \{\lambda v + \mu \alpha\} = \sup_{(\lambda, \mu) \in \partial \mathcal{A}^{\leq 0}} \{\lambda v + \mu \alpha\} = \sup_{(\lambda, \mu) \in (\mathcal{A}^{\leq 0})} \{\lambda v + \mu \alpha\}, \quad (0.8)$$

где ∂B и (B) — граница и внутренность множества B соответственно,

$$\mathcal{A}^{\leq 0} := \{(\lambda, \mu): A(\lambda, \mu) \leq 0\}.$$

В [1, § 4.10], [2] показано, что функция

$$\widehat{D}(\alpha) := \inf_{v \in [0, 1]} \{D(v, \alpha) + (1 - v)\lambda_+^{(\tau)}\}, \quad (0.9)$$

где

$$\lambda_+^{(\tau)} := \sup\{\lambda: \mathbf{E} e^{\lambda \tau} < \infty\},$$

оказывается функцией уклонений для процесса $Z(T)$ (см. теорему 2.1 в [2] и теорему 0.1 ниже).

Пусть v_α — максимальное значение из отрезка $[0, 1]$, при котором достигается нижняя грань в определении (0.9) функции $\widehat{D}(\alpha)$. Если $\lambda_+^{(\tau)} = \infty$, то мы полагаем

$$v_\alpha \equiv 1, \quad \widehat{D}(\alpha) = D(1, \alpha).$$

Свойства функций $\Lambda(u, \alpha)$, $D(u, \alpha)$, $\widehat{D}(\alpha)$ достаточно полно изучены в [1, § 4.10], [2], [9, § 9.1]. Приведем некоторые из них.

Лемма 0.1 (см. [2, лемма 1.1]). (i) *Функции $\widehat{D}(\alpha) \leq D(1, \alpha)$ выпуклы и непрерывны снизу. Они неотрицательны, обращаются в 0 в единственной точке $\alpha = a := \mathbf{E} \zeta / \mathbf{E} \tau$ и*

$$\widehat{D}(\alpha) = D(1, \alpha) \quad (0.10)$$

в окрестности этой точки.

(ii) *Если при заданном α существует точка $(\lambda_\alpha, \mu_\alpha) \in \mathcal{A}^{\leq 0}$, обладающая свойством $D(1, \alpha) = \lambda_\alpha + \mu_\alpha \alpha$ (см. (0.8)), и при этом $\lambda_\alpha \leq \lambda_+^{(\tau)}$, то имеет место равенство (0.10).*

(iii) *Всегда выполнено равенство*

$$\widehat{D}(0) = \min\{D(1, 0), \lambda_+^{(\tau)}\}.$$

Если

$$\lambda_+^{(\tau)} \geq D(1, 0) \quad (\text{т.е. } \widehat{D}(0) = D(1, 0)), \quad (0.11)$$

то равенство (0.10) справедливо при всех α .

Если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$\begin{aligned} & 1) \tau \text{ и } \zeta \text{ независимы,} \\ & 2) \mathbf{E} \zeta = 0, \\ & 3) \tau \in [\mathbf{C}_\infty] \text{ или } \zeta \in [\mathbf{C}_\infty], \end{aligned} \quad (0.12)$$

то соотношения (0.10), (0.11) всегда имеют место.

(iv) Если $\xi = (\tau, \zeta) \in [\mathbf{C}_0]$, то

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} D(1, \pm \alpha) > 0.$$

Если дополнительно $\zeta \in [\mathbf{C}_\infty]$, то

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} D(1, \pm \alpha) = \infty.$$

Соотношение (0.10) можно записать также в виде $v_\alpha \equiv 1$. Утверждение, обратное к (0.11), вообще говоря, не верно (см. комментарии к лемме 1.1 в [2]).

Локальный п.б.у. в фазовом пространстве для процесса $Z(t)$ имеет следующий вид.

Теорема 0.1 (см. [2, теорема 2.1]). Пусть $\xi_0 = (\tau_0, \zeta_0) \in [\mathbf{C}_0]$, $\xi = (\tau, \zeta) \in [\mathbf{C}_0]$ и выполнено условие

$$\mathcal{A}^{\leq 0} \subset [\mathcal{A}_0]. \quad (0.13)$$

Если $\alpha = 0$, то дополнительно к (0.13) предполагается, что

$$\lambda_+^{(\tau_0)} := \sup\{t: \mathbf{E} e^{t\tau_0} < \infty\} \geq \min\{D(1, 0), \lambda_+^{(\tau)}\}. \quad (0.14)$$

При выполнении названных условий справедливы следующие утверждения.

I. Если $\lambda_+^{(\tau)} \geq D(1, 0)$ (т.е. $\hat{D}(\alpha) = D(1, \alpha)$ для всех α), то для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\left(\frac{1}{T} Z(T) \in (\alpha)_\varepsilon\right) = -D(1, \alpha), \quad (0.15)$$

где $\varepsilon = \varepsilon_T$ сходится к 0 достаточно медленно при $T \rightarrow \infty$.

Обратно, если $\lambda_+^{(\tau)} \geq D(1, 0)$ и для всех $\alpha \in \mathbb{R}$ справедлив локальный п.б.у. (0.15), то с необходимостью выполнены соотношения (0.13) и (0.14).

II. Если $\lambda_+^{(\tau)} < D(1, 0)$ (т.е. $\hat{D}(0) < D(1, 0)$) и выполнено условие «грубой» гладкости распределения τ :

$$\ln \mathbf{P}(\tau > T) \sim -\lambda_+^{(\tau)} T \quad \text{при } T \rightarrow \infty, \quad (0.16)$$

то для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P} \left(\frac{1}{T} Z(T) \in (\alpha)_\varepsilon \right) = -\hat{D}(\alpha),$$

где $\varepsilon = \varepsilon_T$ сходится к 0 достаточно медленно при $T \rightarrow \infty$.

В [2] показано, что условий теоремы 0.1 недостаточно для выполнения п.б.у. для конечномерных распределений процесса $Z(t)$ (см. пример 2.1 в [2]). Для того чтобы сформулировать локальный п.б.у. для конечномерных распределений о.п.в. $Z(t)$, нам понадобятся дополнительные условия.

Введем в рассмотрение случайную величину $\xi_\infty = (\tau_\infty, \zeta_\infty)$ (возможно, несобственную), распределение которой при $u \geq 0, v \geq 0$ определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tau_\infty \geq u, \zeta_\infty \geq v) &:= \sup_{t > 0} \mathbf{P}(\tau \geq t + u, \zeta \geq v \mid \tau > t), \\ \mathbf{P}(\tau_\infty \geq u, \zeta_\infty \leq -v) &:= \sup_{t > 0} \mathbf{P}(\tau \geq t + u, \zeta < -v \mid \tau > t). \end{aligned}$$

«Хвосты» этого распределения равномерно по всем направлениям мажорируют соответствующие «хвосты» условных распределений

$$\mathbf{P}(\tau \geq t + u, \zeta \geq v \mid \tau > t), \quad \mathbf{P}(\tau \geq t + u, \zeta < -v \mid \tau > t).$$

Мы будем предполагать, что $\xi_\infty \in [\mathbf{C}_0]$. Это условие влечет за собой неравенство (см. лемму 4.2 в [2])

$$\lambda_+^{(\tau)} \geq D(0, 1) \quad (\text{т.е. } \hat{D}(0) = D(1, 0)).$$

Обозначим

$$\mathcal{A}_\infty := \{(\lambda, \mu): \psi_\infty(\lambda, \mu) := \mathbf{E} e^{\lambda \tau_\infty + \mu \zeta_\infty} < \infty\}.$$

Локальный п.б.у. для конечномерных распределений процесса $Z(t)$ в моменты $u_j T, j = 0, \dots, k, 0 = u_0 < u_1 < \dots < u_k = 1$, имеет следующий вид.

Теорема 0.2 (см. [2, теорема 4.2]). Пусть $\xi_0 \in [\mathbf{C}_0], \xi \in [\mathbf{C}_0], \mathcal{A}^{\leq 0} \subset [\mathcal{A}_0], \lambda_+^{(\tau_0)} \geq D(1, 0)$ и выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:

- 1) $\mathcal{A}^{\leq 0} \subset [\mathcal{A}_\infty], \xi_\infty \in [\mathbf{C}_0];$
- 2) $\zeta \in [\mathbf{C}_\infty].$

Тогда при любых $0 = u_0 < u_1 < \dots < u_k = 1$ и $\alpha_i, j = 1, \dots, k$, имеет место соотношение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P} \left(\bigcap_{j=1}^k \left\{ \frac{1}{T} (Z(u_j T) - Z(u_{j-1} T)) \in (\alpha_j)_\varepsilon \right\} \right) = -I(f),$$

где

$$I(f) := \int_0^1 D(1, f'(t)) dt,$$

$f(t)$ — непрерывная ломаная на $[0, 1]$ с узловыми точками $(u_j, \sum_{i=0}^j \alpha_i)$, $j = 0, \dots, k$; $f(0) = 0$.

Справедлив также «интегральный» п.б.у. для конечномерных распределений процесса $Z(t)$: для любых измеримых множеств $B_j \subset \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P} \left(\bigcap_{j=1}^k \left\{ \frac{1}{T} (Z(u_j T) - Z(u_{j-1} T)) \in B_j \right\} \right) &\leq -I([B]), \\ \underline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P} \left(\bigcap_{j=1}^k \left\{ \frac{1}{T} (Z(u_j T) - Z(u_{j-1} T)) \in B_j \right\} \right) &\geq -I((B)), \end{aligned}$$

где

$$I(B) := \inf_{f \in B} I(f),$$

множество B есть совокупность непрерывных ломаных $f(t)$ (с изломами на отрезке $[0, 1]$ в точках u_j , $j = 1, \dots, k$) таких, что $f(0) = 0$, $f(u_j) - f(u_{j-1}) \in B_j$ при $j = 1, \dots, k$; $[B]$ и (B) суть соответственно замыкание и внутренность множества B в равномерной метрике.

Условия асимптотически слабой зависимости координат τ и ζ в области больших уклонений, достаточные для выполнения условия 1) теоремы 0.2, приведены в лемме 4.3 в [2].

1. Первый частичный локальный принцип больших уклонений для траекторий обобщенного процесса восстановления. Для произвольной фиксированной последовательности $x = x(T) \sim T$, $T \rightarrow \infty$, рассмотрим семейство случайных процессов

$$z_T = z_T(t) = \frac{Z(tT)}{T}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

(см. (0.5)). Процесс z_T принимает значения в измеримом пространстве $(\mathbb{D}, \mathfrak{B})$, где $\mathbb{D} = \mathbb{D}[0, 1]$ — пространство функций $f = f(t)$ на отрезке $[0, 1]$ без разрывов второго рода. Нам будет удобно наделить пространство $\mathbb{D}$ равномерной метрикой

$$\rho(f, g) := \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t) - g(t)|,$$

так что $\mathfrak{B}$ есть σ -алгебра борелевских множеств относительно этой метрики. Через $(f)_\varepsilon$ обозначим ε -окрестность функции $f \in \mathbb{D}$ относительно метрики ρ . Пусть далее $\mathbb{C} = \mathbb{C}[0, 1]$ — пространство непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций $f = f(t)$, а $\mathbb{C}_a \subset \mathbb{C}$ — класс абсолютно непрерывных функций $f = f(t)$ таких, что $f(0) = 0$. Цель настоящего и следующего

(см. ч. II) разделов — доказать: (а) два так называемых «частичных» локальных п.б.у. для траекторий обобщенного процесса восстановления (определения см. ниже); (б) «полный» локальный п.б.у. при более ограничительных условиях. В случае (а) мы укажем условия (см. теорему 1.1 ниже и теорему 2.1 в ч. II), при которых для любой функции $f \in \mathbb{C}_a$ и любой последовательности $\varepsilon = \varepsilon_T$, достаточно медленно сходящейся к 0 при $T \rightarrow \infty$, имеют место соотношения

$$\frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in (f)_\varepsilon) \rightarrow \begin{cases} -I(f), & \text{если } \lambda_+^{(\tau)} \geq D(1, 0) \text{ (теорема 1.1),} \\ -\hat{I}(f), & \text{если } \lambda_+^{(\tau)} < D(1, 0) \text{ (теорема 2.1),} \end{cases} \quad (1.1)$$

где

$$I(f) := \int_0^1 D(1, f'(t)) dt, \quad \text{если } f \in \mathbb{C}_a, \quad (1.2)$$

а функционал $\hat{I}(f)$ будет определен в ч. II. Если $f \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{C}_a$ и выполнено лишь условие $\xi = (\tau, \zeta) \in [\mathbf{C}_0]$, то пределы левой части (1.1) могут не существовать. Подробнее об этом см. в начале раздела 3.

В случае (б) в теореме 3.1 будет доказано, что при дополнительном условии $\zeta \in [\mathbf{C}_\infty]$ для любой функции $f \in \mathbb{D}$ и любой последовательности $\varepsilon = \varepsilon_T$, достаточно медленно сходящейся к 0 при $T \rightarrow \infty$, имеет место *верхнее соотношение* в (1.1) (соответствующее случаю $\lambda_+^{(\tau)} \geq D(1, 0)$), в котором функционал $I(f)$ на функциях $f \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{C}_a$ доопределен как ∞ .

Напомним, что в случае $\lambda_+^{(\tau)} \geq D(1, 0)$ имеет место равенство $\hat{D}(\alpha) = D(1, \alpha)$ при всех α и что любое из трех условий (0.12) или условие $\mathbf{P}(|\zeta_\infty| < \infty) > 0$ является достаточным для выполнения этого равенства (см. леммы 1.1, 4.2 в [2]).

Теорема 1.1 (первый частичный локальный п.б.у.). *Предположим, что*

$$\xi = (\tau, \zeta) \in [\mathbf{C}_0], \quad \lambda_+^{(\tau)} \geq D(1, 0)$$

и справедлив локальный п.б.у. (0.15) в фазовом пространстве. Тогда для любой функции $f \in \mathbb{C}_a$ и любой последовательности $\varepsilon = \varepsilon_T$, достаточно медленно сходящейся к 0 при $T \rightarrow \infty$, имеет место соотношение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in (f)_\varepsilon) = -I(f). \quad (1.3)$$

Мы назвали утверждение теоремы 1.1 *частичным* локальным п.б.у. потому, что оно справедливо не для всех функций $f \in \mathbb{D}$, а лишь для $f \in \mathbb{C}_a$. Второй частичный локальный п.б.у. в альтернативном случае $\lambda_+^{(\tau)} < D(1, 0)$ установлен в разделе 2 (теорема 2.1). Полные локальные п.б.у. для любых $f \in \mathbb{D}$ при дополнительном условии $\zeta \in [\mathbf{C}_\infty]$ рассмотрены в разделе 3.

Доказательство теоремы 1.1 выполним для случая, когда нормирующая последовательность $x = x(T)$ имеет вид $x(T) = T$. Нетрудно видеть, что в общем случае $x \sim T$, $T \rightarrow \infty$, утверждение теоремы 1.1 является следствием этого частного случая (см. замечание 2.1 в [2], а также леммы 4.4.3, 4.6.1 в [1] и лемму 3.1 в ч. II настоящей статьи).

Для целого $L \geq 1$ через $\mathbf{t}_L = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_L = 1\}$ обозначим разбиение полуинтервала $(0, 1]$ на L полуинтервалов $(t_{l-1}, t_l]$, $l = 1, \dots, L$. Через $f^{\mathbf{t}_L} = f^{\mathbf{t}_L}(t)$ обозначим непрерывную ломаную, построенную по узловым точкам

$$(t_l, f(t_l)), \quad l = 0, 1, \dots, L.$$

Ломаная $f^{\mathbf{t}_L}$ спрямляет функцию $f \in \mathbb{C}_a$, так что всегда справедливо неравенство (см., например, [1, § 4.2] или [8])

$$I(f) \geq I(f^{\mathbf{t}_L}). \quad (1.4)$$

Если рассмотреть так называемые «плотные» последовательности разбиений $\mathbf{t}_L$, для которых

$$\max_{1 \leq l \leq L} (t_l - t_{l-1}) \rightarrow 0 \quad \text{при } L \rightarrow \infty,$$

то имеет место сходимость

$$I(f^{\mathbf{t}_L}) \rightarrow I(f) \quad \text{при } L \rightarrow \infty \quad (1.5)$$

(см., например, [1, § 4.2]). Очевидно, что равномерные разбиения

$$\mathbf{t}_L^U = \left\{ \frac{l}{L} \right\}_{l=0}^L$$

образуют плотную последовательность. Если разбиения $\mathbf{t}_L$ вложенные, т.е. $\mathbf{t}_L \subset \mathbf{t}_{L+1}$, то, очевидно, сходимость в (1.5) будет монотонной:

$$I(f^{\mathbf{t}_L}) \uparrow I(f) \quad \text{при } L \uparrow \infty. \quad (1.6)$$

Если функция $f \in \mathbb{C}$ фиксирована и содержит линейные участки (на которых $f'(t) = \text{const}$), то сходимость (1.5), (1.6) будет иметь место и для последовательностей более «бедных» разбиений (зависящих от f), не обязательно «езде плотных». Ясно, например, что если $f(t) = ct$, $t \in [0, 1]$, то $I(f) = I(f^{\mathbf{t}_1})$ и разбиения для сходимости (1.5) вообще не нужны. Поэтому на участках постоянства функции $f(t)$ использовать разбиения для обеспечения сходимости (1.5), (1.6) нет необходимости.

С другой стороны, доказательство, которое мы будем использовать, не допускает наличие двух соседних участков постоянства функции f . Поэтому мы будем строить вложенные разбиения для $f \in \mathbb{C}$ следующим

образом. Если f имеет участки постоянства, то мы обозначим (u_r^-, u_r^+) , $r = 1, \dots, R$, максимальные интервалы, на которых вариация f равна 0 ($f'(t) = 0$ п.в.), и занумеруем их в порядке убывания их длины. Рассмотрим вложенные разбиения

$$\mathbf{t}_L = \bigcup_{k=1}^L \mathbf{t}_k^U. \quad (1.7)$$

Для того чтобы точки разбиения, которое мы строим, распределялись с ростом его номера «равномерно» по отрезку $[0, 1]$, мы занумеруем элементы $\mathbf{t}_L$ следующим образом: сначала идут элементы из $\mathbf{t}_1^U$ в порядке возрастания, затем — новые элементы из $\mathbf{t}_2^U$ в порядке возрастания и т.д. Например, разбиение $\mathbf{t}_4$ будет иметь вид $\{0, 1, 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4\}$. Далее рассмотрим пересечение $\mathbf{t}_L V$ разбиения $\mathbf{t}_L$ с множеством

$$V := [0, 1] \setminus \bigcup_{r=1}^R [u_r^-, u_r^+), \quad (1.8)$$

не содержащим участков постоянства функции f .

Пусть L_1 есть наименьшее число, при котором количество точек в $\mathbf{t}_{L_1} V$ превосходит L . При заданном L включим в разбиение $\mathbf{u}_L$, которое мы строим, точку 0 и L первых точек из $\mathbf{t}_{L_1}$ (точка $t = 0$ не будет входить в разбиение $\mathbf{t}_L V$, если одно из чисел u_r^- окажется равным 0). Ясно, что точки u_r^- , отличные от 0, не входят в $\mathbf{u}_L$ и что полученная последовательность вложенных разбиений будет плотной на множестве V , так что для нее сходимость (1.6) сохранится:

$$I(f^{\mathbf{u}_L}) \uparrow I(f) \quad \text{при } L \uparrow \infty. \quad (1.9)$$

Разбиение $\mathbf{u}_L$ мы будем называть f -разбиением.

Рассмотрим теперь точки u_l , $l = 0, \dots, L$, из разбиения $\mathbf{u}_L$, расположенные в порядке возрастания, и обозначим χ_l величину перескока блуждания $\{T_{0,k}/T\}$, $k = 0, 1, \dots$, через уровень u_l :

$$\chi_l := \frac{1}{T} T_{0, \eta(u_l T)} - u_l,$$

где время первого прохождения $\eta(t)$ определено в (0.1). Время $u_l + \chi_l$ есть момент первого скачка процесса $z_T(t)$ после момента $t = u_l$. Обозначим

$$\bar{\chi}_L := \max\{\chi_l: 1 \leq l \leq L-1\}. \quad (1.10)$$

Ясно, что для заданной функции f найдется последовательность $\delta_T \downarrow 0$, $T \uparrow \infty$, такая, что событие $\{z_T \in (f)_\varepsilon\}$ при $\varepsilon = \varepsilon_T \rightarrow 0$ влечет за собой событие $\{\bar{\chi}_L < \delta_T\}$ (точки u_l из совокупности $\{u_k^-\}$ таким свойством не

обладают; если $\chi_l > c = \text{const} > 0$, то процесс $z_T(t)$ сохраняет постоянное значение на $[u_l, u_l + c]$, а функция f — не сохраняет, и события $\{\chi_l > c\}$ и $z_T \in (f)_\varepsilon$ несовместны при всех достаточно больших T .

Кроме того, ясно, что событие $z_T \in (f)_\varepsilon$ влечет за собой событие

$$\{\bar{\zeta}(T) < 2\varepsilon T\}, \quad \text{где} \quad \bar{\zeta}(T) := \max_{0 \leq k \leq \nu(T)} |\zeta_k|,$$

величина $\nu(T)$ определена в (0.2).

Таким образом, мы получили включение

$$\{z_T \in (f)_\varepsilon\} \subset \{z_T(u_l) \in (f(u_l))_\varepsilon \text{ при всех } 1 \leq l \leq L, \\ \bar{\zeta}(T) < 2\varepsilon T, \bar{\chi}_L < \delta_T\}. \quad (1.11)$$

Важную роль в доказательстве теоремы 1.1 играет следующее утверждение.

Лемма 1.1. Пусть зафиксирована произвольная функция $f \in \mathbb{C}$, $f(0) = 0$. Тогда:

(i) если выполнены условия теоремы 1.1, то для f -разбиения $\mathbf{u}_L = \{u_l\}_{l=0}^L$ и любых последовательностей $\varepsilon = \varepsilon_T \rightarrow 0$, $\delta_T \rightarrow 0$, $T \rightarrow \infty$, имеет место неравенство

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\left(z_T(u_l) \in (f(u_l))_\varepsilon \text{ при всех } 1 \leq l \leq L, \\ \bar{\zeta}(T) < 2\varepsilon T, \bar{\chi}_L < \delta_T\right) \leq -I(f^{\mathbf{u}_L}); \quad (1.12)$$

(ii) если выполнены условия теоремы 0.1, то для любого фиксированного $\delta > 0$ и любого разбиения $\mathbf{t}_L$

$$\underline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\left(z_T(t_l) \in (f(t_l))_\delta \text{ при всех } 1 \leq l \leq L\right) \geq -I(f^{\mathbf{t}_L}). \quad (1.13)$$

Из утверждения (ii) леммы 1.1 нетрудно получить следующий результат.

Следствие 1.1. Для любого фиксированного $\delta > 0$

$$\underline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\left(z_T(t_l) \in (f(t_l))_\delta \text{ при всех } 1 \leq l \leq L\right) \geq -I((f^{\mathbf{t}_L})_\delta), \quad (1.14)$$

где

$$I(B) := \inf_{f \in B} I(f).$$

Доказательство следствия 1.1. При любой функции $g \in (f^{\mathbf{t}_L})_\delta$ для достаточно малого $\gamma > 0$ имеет место включение

$$\left\{z_T(t_l) \in (f(t_l))_\delta \text{ при всех } 1 \leq l \leq L\right\} \\ \supset \left\{z_T(t_l) \in (g(t_l))_\gamma \text{ при всех } 1 \leq l \leq L\right\}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P} \left(z_T(t_l) \in (f(t_l))_\delta \text{ при всех } 1 \leq l \leq L \right) \\ & \geq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P} \left(z_T(t_l) \in (g(t_l))_\gamma \text{ при всех } 1 \leq l \leq L \right). \end{aligned}$$

Применяя (1.13) к правой части последнего неравенства, получаем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P} \left(z_T(t_l) \in (f(t_l))_\delta \text{ при всех } 1 \leq l \leq L \right) \geq -I(g^{\mathbf{t}_L}). \quad (1.15)$$

Левая часть неравенства (1.15) не зависит от выбора функции g в пределах $(f^{\mathbf{t}_L})_\delta$. Поэтому, заменяя правую часть в (1.15) точной верхней гранью по $g \in (f^{\mathbf{t}_L})_\delta$, получаем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P} \left(z_T(t_l) \in (f(t_l))_\delta \text{ при всех } 1 \leq l \leq L \right) \geq - \inf_{g \in (f^{\mathbf{t}_L})_\delta} I(g^{\mathbf{t}_L}).$$

Для любой функции $g \in \mathbb{D}$ выполняется неравенство $I(g) \geq I(g^{\mathbf{t}_L})$. Поэтому

$$I((f^{\mathbf{t}_L})_\delta) := \inf_{g \in (f^{\mathbf{t}_L})_\delta} I(g) \geq \inf_{g \in (f^{\mathbf{t}_L})_\delta} I(g^{\mathbf{t}_L}),$$

и мы получаем (1.14). Следствие 1.1 доказано.

Опираясь на лемму 1.1 (которую мы докажем чуть позже) и следствие 1.1, продолжим доказательство теоремы 1.1.

(i) *Оценка сверху.* Из (1.11) и леммы 1.1 получаем

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in (f)_\varepsilon) \leq -I(f^{\mathbf{u}_L}). \quad (1.16)$$

Так как левая часть в (1.16) от разбиения $\mathbf{u}_L$ не зависит, то в силу соотношения (1.9) правую часть в (1.16) можно заменить на $-I(f)$. Оценка сверху для (1.3) установлена.

(ii). *Оценка снизу.* Покажем, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in (f)_\delta) \geq -I(f) \quad (1.17)$$

для любого фиксированного $\delta > 0$. Если $I(f) = \infty$, то эта оценка очевидна. Поэтому везде в дальнейшем будем считать, что $I(f) < \infty$. Допустим сначала, что при некотором $N < \infty$ случайные векторы $\xi_0 = (\tau_0, \zeta_0)$, $\xi = (\tau, \zeta)$ с вероятностью 1 удовлетворяют неравенствам

$$\tau_0 \geq \frac{1}{N}, \quad \tau \geq \frac{1}{N}, \quad |\zeta_0| \leq N, \quad |\zeta| \leq N. \quad (1.18)$$

Тогда, повторяя рассуждения, которые использовались при получении оценки снизу в локальном п.б.у. для траекторий случайных блужданий

(см. [1, § 4.6] или [8]), находим, что для любого фиксированного $\delta > 0$ существует число $L^0 = L_{\delta, f, N}^0 < \infty$ такое, что для всех $L \geq L^0$ выполняется включение

$$\{z_T \in (f)_\delta\} \supset \left\{ z_T \left(\frac{l}{L} \right) \in \left(f \left(\frac{l}{L} \right) \right)_{\delta/2} \text{ при всех } l = 1, \dots, L \right\}.$$

Из этого соотношения, используя оценку (1.14) из следствия 1.1, получаем для всех $L \geq L^0$ неравенство

$$Q_\delta(f) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in (f)_\delta) \geq -I((f^{t_L})_\delta). \quad (1.19)$$

Отсюда и из неравенства (1.4) требуемая оценка снизу (1.17) следует при выполнении дополнительного предположения (1.18).

Если же неравенства (1.18) не выполнены, то введем в рассмотрение «срезанные» случайные векторы $^{(N)}\xi_0, ^{(N)}\xi$, определив распределение $^{(N)}\xi$ равенством ($B \subset \mathbb{R}^2$)

$$\mathbf{P}(^{(N)}\xi \in B) = \mathbf{P}\left(\xi \in B \mid \tau \geq \frac{1}{N}, |\zeta| \leq N\right). \quad (1.20)$$

Аналогично определим распределение срезки $^{(N)}\xi_0$. Случайные векторы $^{(N)}\xi_i, i = 1, 2, \dots$, суть независимые копии $^{(N)}\xi$, не зависящие от $^{(N)}\xi_0$. Случайный процесс, построенный по срезанным векторам, обозначим через $^{(N)}z_T = ^{(N)}z_T(t)$. Для срезанных векторов $^{(N)}\xi_i$ сохраним все обозначения, соответствующие случайным векторам ξ_i , снабдив их верхним левым индексом (N) .

Пусть далее $M > 0$ — произвольное число. Обозначим

$$A_{M,N} := \left\{ \tau_i \geq \frac{1}{N}, |\zeta_i| \leq N \text{ при всех } i = 0, 1, \dots, [MT] \right\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(z_T \in (f)_\delta) &\geq \mathbf{P}(z_T \in (f)_\delta, \nu(T) \leq TM, A_{M,N}) \\ &= \mathbf{P}(A_{M,N}) \mathbf{P}(^{(N)}z_T \in (f)_\delta, ^{(N)}\nu(T) \leq TM). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Здесь

$$\frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(A_{M,N}) \rightarrow M \ln P(N) \quad (1.22)$$

при $T \rightarrow \infty$, где

$$P(N) := \mathbf{P}\left(\tau \geq \frac{1}{N}, |\zeta| \leq N\right) \rightarrow 1 \text{ при } N \rightarrow \infty. \quad (1.23)$$

Второй сомножитель в правой части (1.21) больше или равен

$$\mathbf{P}(^{(N)}z_T \in (f)_\delta) - \mathbf{P}(^{(N)}\nu(T) > TM). \quad (1.24)$$

Оценим сначала значение

$$^{(N)}Q_\delta(f) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(^{(N)}z_T \in (f)_\delta).$$

К нему применимо соотношение (1.19). Поэтому

$$^{(N)}Q_\delta(f) \geq -^{(N)}I((f^{\mathbf{t}_L})_\delta), \quad (1.25)$$

где

$$^{(N)}I((f^{\mathbf{t}_L})_\delta) = \inf_{g \in B_L} ^{(N)}I(g^{\mathbf{t}_L}), \quad B_L := (f^{\mathbf{t}_L})_\delta. \quad (1.26)$$

Стало быть, для любых $g \in B_L$

$$^{(N)}Q_\delta(f) \geq -^{(N)}I(g^{\mathbf{t}_L}). \quad (1.27)$$

Полагая $t_l = l/L$ при $l = 0, 1, \dots, L$ и

$$\alpha_l = \left[f\left(\frac{l}{L}\right) - f\left(\frac{l-1}{L}\right) \right] L, \quad \beta_l = \left[g\left(\frac{l}{L}\right) - g\left(\frac{l-1}{L}\right) \right] L \quad \text{при } l = 1, \dots, L,$$

получаем для любого $g \in B_L$

$$^{(N)}Q_\delta(f) \geq -\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L ^{(N)}D(1, \beta_l).$$

Так как левая часть этого неравенства не зависит от g из множества B_L и $|\beta_l - \alpha_l| < 2\delta$ при $g \in B_L$, то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} ^{(N)}Q_\delta(f) \geq -\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \inf_{|\beta_l - \alpha_l| < 2\delta} ^{(N)}D(1, \beta_l). \quad (1.28)$$

Воспользуемся теперь следующим утверждением, которое будет доказано в конце этого раздела.

Лемма 1.2. Для любых $\delta > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \inf_{|\beta - \alpha| < \delta} ^{(N)}D(1, \beta) \leq D(1, \alpha). \quad (1.29)$$

Утверждение (1.29) полностью сохранится для срезов $^{[N]}\xi$ с распределением

$$\mathbf{P}(^{[N]}\xi \in B) := \frac{\mathbf{P}(\xi \in B, \tau \leq N, |\zeta| \leq N)}{\mathbf{P}(\tau \leq N, |\zeta| \leq N)}.$$

Применяя (1.29) к правой части (1.28), находим

$$\lim_{N \rightarrow \infty} ^{(N)}Q_\delta(f) \geq -\frac{1}{L} \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^L ^{(N)}D(1, \alpha_l) = -I(f^{\mathbf{t}_L}). \quad (1.30)$$

Отсюда в силу неравенства $I(f^{\mathbf{t}_L}) \leq I(f)$ получаем оценку снизу

$$\lim_{N \rightarrow \infty} {}^{(N)}Q_\delta(f) \geq -I(f). \quad (1.31)$$

Вернемся теперь к неравенству (1.21). Из него и из (1.24) следует, что при любом N выполнено неравенство

$$Q_\delta(f) \geq r(N) + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \left[\mathbf{P}({}^{(N)}z_T \in (f)_\delta) - \mathbf{P}({}^{(N)}\nu(T) > MT) \right], \quad (1.32)$$

где

$$r(N) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(A_{N,M}) \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \quad (1.33)$$

Заметим, далее, что ${}^{(N)}\tau \geq_d \tau$, ${}^{(N)}\nu(T) \leq_d \nu(T)$. Поэтому при всех N

$$\mathbf{P}({}^{(N)}\nu(T) > MT) \leq \mathbf{P}(\nu(T) > MT).$$

В [2] показано (см. [2, формула (2.15)]), что для любого $N < \infty$ найдется M такое, что

$$\mathbf{P}(\nu(T) > MT) \leq e^{-NT}. \quad (1.34)$$

Поэтому в случае $I(f) < \infty$ всегда можно выбрать $M < \infty$ так, чтобы при всех N выполнялось неравенство

$$\mathbf{P}({}^{(N)}\nu(T) \geq MT) \leq e^{-3TI(f)}.$$

В то же время согласно (1.31) вероятность $\mathbf{P}({}^{(N)}z_T \in (f)_\delta)$ превосходит $e^{-2TI(f)}$ при всех достаточно больших N и T . Поэтому второе слагаемое в квадратных скобках в правой части (1.32) пренебрежимо мало по сравнению с первым. Учитывая (1.33) и (1.31), мы получаем в итоге из (1.32) требуемую оценку

$$Q_\delta(f) \geq -I(f).$$

Неравенство (1.17) доказано.

Для доказательства теоремы 1.1 нам осталось доказать леммы 1.1 и 1.2.

Доказательство леммы 1.1. (i). *Оценка сверху.* Доказательство проведем индукцией по L . При $L = 1$ неравенство (1.12) следует из теоремы 0.1. Докажем теперь (1.12) при $L = 2$. Для $L \geq 3$ переход от значения $L - 1$ к L при доказательстве (1.12) будет осуществляться точно таким же способом, как и для $L = 2$.

Итак, рассмотрим разбиение $u_0 = 0$, $u_1 = u$, $u_2 = 1$, $u \in (0, 1)$, и обозначим

$$\alpha_l := f(u_l) - f(u_{l-1}), \quad \Delta_l := u_l - u_{l-1}, \quad l = 1, 2. \quad (1.35)$$

Пусть далее

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{z_T(u) \in (\alpha_1)_\varepsilon, |\zeta_{\eta(uT)}| < 2\varepsilon T, \chi := \chi_1 < \delta_T\}, \\ A_2 &:= \{z_T(1) \in (\alpha_1 + \alpha_2)_\varepsilon\}, \end{aligned} \quad (1.36)$$

A — событие под знаком вероятности в (1.12) при $L = 2$. Пусть $\mathfrak{A}$ обозначает σ -алгебру, порожденную случайными величинами $\eta(uT)$, $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{\eta(uT)}$. Ясно, что величины $\zeta_{\eta(uT)}$ и χ измеримы относительно $\mathfrak{A}$ и $A_1 \in \mathfrak{A}$.

Эволюция процесса $z_T(t)$ на $(u + \chi, 1]$ от σ -алгебры $\mathfrak{A}$ не зависит. Поэтому при $L = 2$ имеем

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1 A_2) = \mathbf{E} \mathbf{1}(A_1) \mathbf{E}(\mathbf{1}(A_2) | \mathfrak{A}). \quad (1.37)$$

Обозначим через $Z^*(t)$ однородный процесс восстановления на $[0, \infty)$, не зависящий от $Z(t)$, и рассмотрим множитель $\mathbf{E}(\mathbf{1}(A_2) | \mathfrak{A}) = \mathbf{P}(A_2 | \mathfrak{A})$. Эту функцию от элементарных исходов из $\mathfrak{A}$ на множестве A_1 можно рассматривать как вероятность

$$\begin{aligned} P_T &:= \mathbf{P}\left((\alpha_1 + y)T + Z^*((\Delta_2 - v)T) \in (\alpha_1 + \alpha_2)_\varepsilon T\right) \\ &\leq \mathbf{P}\left(Z^*(T^*) \in (\alpha_2 - y)_\varepsilon T^* \times \frac{T}{T^*}\right) \\ &\leq \mathbf{P}\left(Z^*(T^*) \in (\alpha_2)_{3\varepsilon} T^* \times \frac{T}{T^*}\right), \end{aligned} \quad (1.38)$$

где $T^* := (\Delta_2 - v)T \sim \Delta_2 T$, $T^*/T \sim \Delta_2$ при $T \rightarrow \infty$, при неслучайных v и y таких, что $|y| < 2\varepsilon_T$, $v \in [0, \delta_T)$. Мы находимся в условиях теоремы 0.1, в силу которой

$$\overline{\lim}_{T^* \rightarrow \infty} \frac{1}{T^*} \ln P_T \leq -D\left(1, \frac{\alpha_2}{\Delta_2}\right) \sim -\frac{T}{T^*} \Delta_2 D\left(1, \frac{\alpha_2}{\Delta_2}\right). \quad (1.39)$$

Другими словами, на всем множестве A_1

$$\mathbf{P}(A_2 | \mathfrak{A}) \leq \exp \left\{ -T \Delta_2 D\left(1, \frac{\alpha_2}{\Delta_2}\right) + o(T) \right\}. \quad (1.40)$$

Поэтому в силу (1.37)

$$\mathbf{P}(A) \leq \exp \left\{ -T \Delta_2 D\left(1, \frac{\alpha_2}{\Delta_2}\right) + o(T) \right\} \mathbf{P}(Z(uT) \in T(\alpha_1)_\varepsilon), \quad (1.41)$$

где, вновь в силу теоремы 0.1,

$$\mathbf{P}(Z(uT) \in T(\alpha_1)_\varepsilon) = \exp \left\{ -T \Delta_1 D\left(1, \frac{\alpha_1}{\Delta_1}\right) + o(T) \right\}.$$

В итоге получаем $\mathbf{P}(A) \leq \exp\{-TI(f^{\mathbf{u}_2}) + o(T)\}$. Требуемая оценка сверху (1.12) при $L = 2$ установлена.

Как уже было отмечено, переход в доказательстве по индукции от значения $L - 1$ к L при $L \geq 3$ происходит точно так же — надо в приведенных выше рассуждениях в качестве точки u взять предпоследнюю точку u_{L-1} разбиения $\mathbf{u}_L$. Оценка сверху (1.12) доказана.

(ii). *Оценка снизу* в лемме 1.1 происходит до некоторой степени аналогично предыдущему. Но теперь для обеспечения неравенств

$$\bar{\zeta}(T) = o(T), \quad \bar{\chi}_L = o(T)$$

мы будем использовать не специальную конструкцию разбиения, а метод срезок. Именно, снова используя индукцию, мы докажем неравенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T(t_l) \in (\alpha_l + \alpha_{l-1})_\delta, \quad l = 1, 2) \geq -I(f^{\mathbf{t}_2})$$

при любом $\delta > 0$, но сначала в случае, когда для некоторой константы $N < \infty$ с вероятностью 1 выполняются неравенства

$$\tau_0 \leq N, \quad \tau \leq N, \quad |\zeta_0| \leq N, \quad |\zeta| \leq N. \quad (1.42)$$

Очевидно, что в этом случае $\bar{\zeta}(T) \leq N/T$, $\bar{\chi}_L \leq N/T$. Пусть аналогично (1.35), (1.36) при $L = 2$

$$A_1 := \left\{ Z_T(u) \in (\alpha_1)_\delta, \quad |\zeta_{\eta(uT)}| \leq \frac{N}{T}, \quad \chi := \chi_1 \leq \frac{N}{T} \right\},$$

$$A_2 := \{z_T(1) \in (\alpha_1 + \alpha_2)_\delta\},$$

A — событие, стоящее под знаком вероятности в (1.13) при $L = 2$, и σ -алгебра $\mathfrak{A}$ имеет прежний смысл. Тогда (ср. с (1.37))

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1 A_2) = \mathbf{E} \mathbf{1}(A_1) \mathbf{E}(\mathbf{1}(A_2) | \mathfrak{A}).$$

Здесь вместо (1.38) будем иметь при $T > N/\delta$

$$P_T \geq \mathbf{P}\left(Z^*(T^*) \in (\alpha_2)_{\delta/2} T^* \times \frac{T}{T^*}\right)$$

при тех же обозначениях, что и в (1.38). Далее, следуя (1.39)–(1.41), получаем

$$\mathbf{P}(A) \geq \exp\{-TI(f^{\mathbf{t}_2}) + o(T)\}.$$

Требуемая оценка снизу (1.13) при $L = 2$ установлена. Переход от значения $L - 1$ к L при $L \geq 3$ происходит точно так же, как и в пункте (i).

Если неравенства (1.42) не выполнены, то следует воспользоваться методом срезок так же, как мы пользовались им в доказательстве теоремы 1.1, с той лишь разницей, что теперь срезки имеют форму, отличную от (1.20). Согласно (1.42) следует рассматривать «срезанные»

векторы $^{[N]}\xi_0$, $^{[N]}\xi$, определив распределение $^{[N]}\xi$ равенством ($B \subset \mathbb{R}^2$; ср. с (1.20))

$$\mathbf{P}({}^{[N]}\xi \in B) = \mathbf{P}(\xi \in B \mid \tau \leq N, |\zeta| \leq N).$$

Аналогично определим распределение срезки $^{[N]}\xi_0$. Следуя рассуждениям в доказательстве теоремы 1.1, мы получим требуемую оценку снизу, если воспользуемся вторым утверждением леммы 1.2. Лемма 1.1 доказана.

Перейдем теперь к доказательству леммы 1.2 об асимптотических свойствах функции $^{(N)}D(1, \alpha)$ при $N \rightarrow \infty$. Для того чтобы изучить эти свойства, нам понадобятся аналогичные свойства функций уклонений $^{(N)}\Lambda(v, \alpha)$. Чтобы сделать выкладки менее громоздкими, а утверждения более общими, мы на время сменим обозначения и вместо двумерных векторов (v, α) будем рассматривать d -мерные векторы $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $d \geq 1$, и асимптотические свойства функций уклонений $^{(N)}\Lambda(\alpha)$ срезок $^{(N)}\xi$ случайных векторов $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$. Пусть $\Lambda(\alpha)$ обозначает функцию уклонений, соответствующую ξ , а S — выпуклую оболочку носителя распределения ξ , так что $(S) = (\Lambda_{<\infty})$, где $\Lambda_{<\infty} := \{\alpha: \Lambda(\alpha) < \infty\}$.

Нужные нам свойства функций $^{(N)}\Lambda(\alpha)$ описываются в следующем утверждении.

Лемма 1.3. *Если $\alpha \in (S)$, то*

$$^{(N)}\Lambda(\alpha) \rightarrow \Lambda(\alpha) \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Если $\alpha \in \partial S$, то для любого $\delta > 0$

$$^{(N)}\Lambda((\alpha)_\delta) \rightarrow \Lambda((\alpha)_\delta) \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \quad (1.43)$$

Если $\alpha \notin [S]$, то

$$^{(N)}\Lambda(\alpha) = \Lambda(\alpha) = \infty.$$

Из леммы 1.3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.2. *Для любого α найдется $\delta = \delta(\alpha) > 0$ такое, что*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} ^{(N)}\Lambda((\alpha)_\delta) \rightarrow \Lambda((\alpha)_\delta) \leq \Lambda(\alpha). \quad (1.44)$$

Нетрудно убедиться, что в одномерном случае $d = 1$ сходимость (1.43) имеет место при всех α . Однако при $d > 1$ это, вообще говоря, не так и удастся установить лишь «ослабленную» версию (1.44) этой сходимости.

Доказательство леммы 1.3. Обозначим

$$\psi_N(\lambda) := \mathbf{E}(e^{\langle \lambda, \xi \rangle}; |\xi| < N), \quad \delta_N := \ln \mathbf{P}(|\xi| < N).$$

Тогда

$$\delta_N \uparrow 0, \quad \psi_N(\lambda) \uparrow \psi(\lambda), \quad A_N(\lambda) := \ln \psi_N(\lambda) \uparrow A(\lambda)$$

при $N \uparrow \infty$. Далее,

$$^{(N)}A(\lambda) = A_N(\lambda) - \delta_N, \quad ^{(N)}\Lambda(\alpha) = \sup_{\lambda} \{ \langle \lambda, \alpha \rangle - ^{(N)}A(\lambda) \} = \Lambda_N(\alpha) + \delta_N,$$

где $\Lambda_N(\alpha) = \sup_{\lambda} \{ \langle \lambda, \alpha \rangle - A_N(\lambda) \} \downarrow$ при $N \uparrow \infty$. Так как $\langle \lambda, \alpha \rangle - A_N(\lambda)$ и $\langle \lambda, \alpha \rangle - A(\lambda)$ суть выпуклые вверх функции, нетрудно видеть, что если $\alpha \in (S) = (\Lambda_{<\infty})$, то $\Lambda_N \downarrow \Lambda(\alpha)$, $^{(N)}\Lambda(\alpha) \rightarrow \Lambda(\alpha)$ при $N \uparrow \infty$. Это можно извлечь также из теорем сходимости в выпуклом анализе.

Пусть теперь $\alpha \in \partial S$. Для $\beta \in (\alpha)_{\delta} \cap (S)$ в силу первого утверждения леммы

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} ^{(N)}\Lambda((\alpha)_{\delta}) \leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} ^{(N)}\Lambda(\beta) = \Lambda(\beta).$$

Следовательно, левая часть этого неравенства (она не зависит от β) не превосходит $\inf \{ \Lambda(\beta) : \beta \in (\alpha)_{\delta} \cap (S) \}$. Так как функция $\Lambda(\beta)$ непрерывна на ∂S изнутри множества S (по лучам), то инфимум можно взять по множеству $\beta \in (\alpha)_{\delta} \cap [S]$. Это доказывает оценку сверху (1.43) во втором утверждении леммы, поскольку $\Lambda(\beta) = \infty$ при $\beta \notin [S]$. Оценка снизу очевидна, так как $^{(N)}\Lambda(\alpha) = \Lambda_N(\alpha) + \delta_N \geq \Lambda(\alpha) + \delta_N$.

Последнее утверждение леммы вытекает из вложения $^{(N)}\Lambda_{<\infty} \subset \Lambda_{<\infty}$. Лемма 1.3 доказана.

Вернемся к прежним обозначениям и доказательству леммы 1.2. Оно оказывается более громоздким, чем доказательство леммы 1.3.

Доказательство леммы 1.2. Обозначим левую часть неравенства (1.29) через

$$^{(\infty)}D_{\delta}(\alpha) := \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} ^{(N)}D(1, (\alpha)_{\delta}).$$

Надо доказать, что для любых фиксированных $\delta > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство (см. (1.29))

$$^{(\infty)}D_{\delta}(\alpha) \leq D(1, \alpha). \quad (1.45)$$

Положим

$$^{(\infty)}D_{(\omega)}(1, \alpha) := \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} ^{(N)}D((1, \alpha)_{\omega}).$$

Неравенство (1.45) для фиксированного $\alpha \in \mathbb{R}$ будет вытекать из следующих двух утверждений:

(А) для любых $\delta > 0$ и $\gamma \in (0, 1/2)$ найдется $\omega = \omega(\delta, \gamma) > 0$ такое, что

$$^{(\infty)}D_{\delta}(\alpha) \leq \frac{1}{1 - \gamma} ^{(\infty)}D_{(\omega)}(1, \alpha); \quad (1.46)$$

(В) для любого $\omega > 0$

$$^{(\infty)}D_{(\omega)}(1, \alpha) \leq D(1, \alpha). \quad (1.47)$$

Докажем утверждение (А). Для вещественных чисел $\gamma \in (0, 1/2)$ и $h \in (-\gamma, \gamma)$ имеем

$$^{(N)}D(1, \beta) = \frac{1}{1-h} {}^{(N)}D(1-h, (1-h)\beta) \leq \frac{1}{1-\gamma} {}^{(N)}D(1-h, (1-h)\beta). \quad (1.48)$$

Поскольку левая часть (1.48) не зависит от h , то неравенство сохранится, если правую часть (1.48) заменить на точную нижнюю грань по $|h| < \gamma$:

$$^{(N)}D(1, \beta) \leq \frac{1}{1-\gamma} \inf_{|h| < \gamma} {}^{(N)}D(1-h, (1-h)\beta). \quad (1.49)$$

Из (1.49) следует, что

$$\begin{aligned} {}^{(N)}D(1, (\alpha)_\delta) &= \inf_{|\beta-\alpha| < \delta} {}^{(N)}D(1, \beta) \\ &\leq \frac{1}{1-\gamma} \inf_{|h| < \gamma, |\beta-\alpha| < \delta} {}^{(N)}D(1-h, (1-h)\beta) \\ &= \frac{1}{1-\gamma} \inf_{(v,b) \in B(\gamma, \delta)} {}^{(N)}D(v, b), \end{aligned} \quad (1.50)$$

где $v := 1-h$, $b := (1-h)\beta$, $B(\gamma, \delta) := \{(v, b) = (1-h, (1-h)\beta) : |h| < \gamma, |\beta-\alpha| < \delta\}$. Поскольку для любых фиксированных $\delta > 0$ и $\gamma \in (0, 1/2)$ найдется $\omega = \omega(\gamma, \delta) > 0$ такое, что справедливо включение $(1, \alpha)_\omega \subset B(\gamma, \delta)$, то из (1.50) получаем неравенство

$$^{(N)}D(1, (\alpha)_\delta) \leq \frac{1}{1-\gamma} {}^{(N)}D((1, \alpha)_\omega),$$

из которого вытекает (1.46).

Установим теперь утверждение (В). Напомним, что функции $D(v, b)$ и $D_\Lambda(v, b)$ связаны соотношением (0.6), из которого для любого $\delta > 0$ следуют неравенства

$$D_\Lambda((v, b)_\delta) \leq D(v, b) \leq D_\Lambda(v, b). \quad (1.51)$$

Поэтому для любых $(v, b) \in (1, \alpha)_\omega$, $\theta > 0$ справедливы неравенства

$$^{(N)}D((1, \alpha)_\omega) \leq {}^{(N)}D(v, b) \leq {}^{(N)}D_\Lambda(v, b) \leq {}^{(N)}\Lambda\left(\frac{v}{\theta}, \frac{b}{\theta}\right)\theta.$$

Левая часть последней цепочки неравенств не зависит от выбора $(v/\theta, b/\theta)$ в пределах множества $(1/\theta, \alpha/\theta)_{\omega/\theta}$, поэтому правую часть можно заменить на точную верхнюю грань по этому множеству. Получили соотношение

$$^{(N)}D((1, \alpha)_\omega) \leq {}^{(N)}\Lambda\left(\left(\frac{1}{\theta}, \frac{\alpha}{\theta}\right)_{\omega/\theta}\right)\theta,$$

из которого с помощью предельного перехода по $N \rightarrow \infty$ выводим для произвольного $\theta > 0$ неравенство

$$({}^\infty)D_{(\omega)}(1, \alpha) \leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} ({}^N)\Lambda\left(\left(\frac{1}{\theta}, \frac{\alpha}{\theta}\right)_{\omega/\theta}\right)\theta. \quad (1.52)$$

Воспользуемся теперь следствием 1.2, из которого вытекает, что правая часть в (1.52) равна $\Lambda((1/\theta, \alpha/\theta)_{\omega/\theta})\theta$. Обращаясь к определению (0.7) функции D_Λ и учитывая первое неравенство в (1.51), убеждаемся, что

$$\inf_{\theta > 0} \Lambda\left(\left(\frac{1}{\theta}, \frac{\alpha}{\theta}\right)_{\omega/\theta}\right)\theta \leq D_\Lambda((1, \alpha)_\omega), \quad ({}^\infty)D_{(\omega)}(1, \alpha) \leq D_\Lambda((1, \alpha)_\omega) \leq D(1, \alpha).$$

Утверждение (В) и первое утверждение леммы 1.2 доказаны. Второе утверждение доказывается точно так же. Лемма 1.2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков А. А. Асимптотический анализ случайных блужданий. Быстро убывающие распределения приращений. М.: Физматлит, 2013, 447 с.
2. Боровков А. А., Могульский А. А. Принципы больших уклонений для конечномерных распределений обобщенных процессов восстановления. — Сиб. матем. журн., 2015, т. 56, № 1, с. 36–64.
3. Кокс Д. Р., Смит В. Л. Теория восстановления. М.: Советское радио, 1967, 229 с.
4. *Asmussen S., Albrecher H. Ruin Probabilities.* Hackensack: World Scientific, 2010, 602 p.
5. Боровков А. А., Rogozin Б. А. Граничные задачи для некоторых двумерных случайных блужданий. — Теория вероятн. и ее примен., 1964, т. 9, в. 3, с. 401–430.
6. *Puhalskii A., Whitt W. Functional large deviation principles for first-passage-time processes.* — Ann. Appl. Probab., 1997, v. 7, № 2, p. 362–381.
7. Боровков А. А. Граничные задачи для случайных блужданий и большие уклонения в функциональных пространствах. — Теория вероятн. и ее примен., 1967, т. 12, в. 4, с. 635–654.
8. Боровков А. А., Могульский А. А. Принципы больших уклонений для траекторий случайных блужданий. I, II, III. — Теория вероятн. и ее примен., 2011, т. 56, в. 4, с. 627–655; 2012, т. 57, в. 1, с. 3–34; 2013, т. 58, в. 1, с. 37–52.
9. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 2009, 470 с.
10. Боровков А. А., Могульский А. А. О принципах больших уклонений для сумм случайных векторов и соответствующих функций восстановления в неоднородном случае. — Матем. тр., 2014, т. 17, № 2, с. 84–101.

Поступила в редакцию
17.III.2015