Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Каштанов, О структуре функционала накопления, построенного на траекториях полумарковского процесса с конечным множеством состояний, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2015, том 60, выпуск 2, 272–289

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4619>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 18:20:58

© 2015 г.

КАШТАНОВ В. А.*

**О СТРУКТУРЕ ФУНКЦИОНАЛА НАКОПЛЕНИЯ,
ПОСТРОЕННОГО НА ТРАЕКТОРИЯХ ПОЛУМАРКОВСКОГО
ПРОЦЕССА С КОНЕЧНЫМ МНОЖЕСТВОМ СОСТОЯНИЙ**

В работе исследуется структура функционала накопления, построенного на траекториях управляемого полумарковского процесса с конечным множеством состояний. При $t \rightarrow \infty$ этот функционал линейно растет и коэффициент есть дробно-линейный функционал относительно вероятностных мер, определяющих марковскую однородную рандомизированную стратегию управления.

Ключевые слова и фразы: управляемый полумарковский процесс, стратегия управления, рандомизация, детерминированная стратегия, дробно-линейный функционал.

В настоящей работе объектом исследования является однородный управляемый полумарковский процесс $X(t)$, для построения которого вводится процесс марковского восстановления [4], [8], [9], [15]

$$\begin{aligned} &(\xi_n, \theta_n, u_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ &\xi_n \in E = \{0, 1, 2, \dots\}, \quad \theta_n \in \mathbf{R}_+ = [0, \infty), \quad u_n \in U_n, \end{aligned} \quad (1)$$

где $E = \{0, 1, \dots, N, \dots\}$ — конечное ($N < \infty$) или счетное множество состояний первой (ведущей) компоненты, $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$ — множество неотрицательных действительных чисел (время), $U_i, i \in E$, — пространства управлений с σ -алгебрами $\mathcal{B}_i$ подмножеств множеств U_i .

Процесс марковского восстановления (1) задается переходными вероятностями, зависящими только от первой (ведущей) компоненты:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{\xi_{n+1} = j, \theta_{n+1} < t, u_{n+1} \in B \mid \xi_n = i, \theta_n = \tau, u_n = u\} \\ &= \mathbf{P}\{\xi_{n+1} = j, \theta_{n+1} < t, u_{n+1} \in B \mid \xi_n = i\} = \tilde{Q}_{ij}(t, B), \quad i \in E. \end{aligned} \quad (2)$$

Семейство функций (2) порождает на измеримых пространствах $(U_i, \mathcal{B}_i)$ семейства вероятностных мер

$$\vec{G} = (G_0, G_1, \dots, G_N, \dots), \quad (3)$$

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия; e-mail: vakashtanov@hse.ru

где $G_i(B) = \mathbf{P}\{u_{n+1} \in B \mid \xi_n = i\} = \sum_{j \in E} \tilde{Q}_{ij}(\infty, B)$, $B \in \mathcal{B}_i$, $i \in E$.

Так как справедливо неравенство $G_i(B) \geq \tilde{Q}_{ij}(t, B)$, то на основании теоремы Радона–Никодима получаем, что существует полумарковское ядро управляемого процесса (матрица функций)

$$Q_{ij}(t, u) = \mathbf{P}\{\xi_{n+1} = j, \theta_{n+1} < t \mid \xi_n = i, u_{n+1} = u\} \quad (4)$$

с элементами, удовлетворяющими равенству

$$\tilde{Q}_{ij}(t, B) = \int_B Q_{ij}(t, u) G_i(du). \quad (5)$$

Из (5) получаем классическое полумарковское ядро (см. [8])

$$Q_{ij}(t) = \tilde{Q}(t, U_i) = \int_{U_i} Q_{ij}(t, u) G_i(du) = \mathbf{P}\{\xi_{n+1} = j, \theta_{n+1} < t \mid \xi_n = i\} \quad (6)$$

и переходные вероятности вложенной цепи Маркова

$$p_{ij} = p_{ij}(G_i) = Q_{ij}(\infty) = \int_{U_i} Q_{ij}(\infty, u) G_i(du) = \mathbf{P}\{\xi_{n+1} = j \mid \xi_n = i\}. \quad (7)$$

Управляемый полумарковский процесс, определяемый равенствами

$$\begin{aligned} X(t) &= (\xi(t), u(t)), \quad \xi(t) \in E, \quad u(t) \in U_i, \quad i \in E, \\ \xi(t) &= \xi_{\nu(t)}, \quad u(t) = u_{\nu(t)+1}, \\ \nu(t) &= \sup \left\{ n: \tau_n = \sum_{k \leq n} \theta_k \leq t \right\}, \quad \theta_0 = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

задается полумарковским ядром (4), набором вероятностных мер (3) и начальным распределением вероятностей состояний ведущей компоненты $p_i = \mathbf{P}\{\xi(0) = i\}$. Вероятностные меры $\vec{G}$ определяют марковскую однородную рандомизированную стратегию управления.

Далее сформулируем задачу управления. Объектом управления является процесс $\xi(t) = \xi_{\nu(t)}$, стратегия управления задается мерами (3). Обозначим через Ω множество допустимых стратегий управления. Остается на ступенчатых траекториях объекта управления задать целевой функционал.

Определим функционал накопления [2], [3], [7], [11]. Вероятностные характеристики процесса $\xi(t) = \xi_{\nu(t)}$ не зависят от номера интервала, на котором полумарковский процесс принимает постоянное значение. Поэтому при построении функционала накопления определим его приращение на каждом интервале непрерывности, когда компоненты $\xi(t)$ и $u(t)$ не меняют своих значений, а затем при нескольких переходах значения функционала на каждом интервале просуммируем и получим суммарный эффект.

Функционал накопления $S_i(t)$ определим как условное математическое ожидание накопленного эффекта за период $[0, t)$ при условии, что процесс стартует из состояния i , $\xi(0) = i \in E$.

Пусть $\xi(0) = i$, $u(0) = u$, $\theta = t$ (θ — время непрерывного пребывания процесса в состоянии i : $\xi(x) = i$, $0 \leq x < \theta = t$) и $\xi(t) = j$ — следующее значение первой компоненты. Зададим функции $R_{ij}(y, t, u)$ — математическое ожидание накопленного эффекта за время y при условии, что $\xi(0) = i$, $u(0) = u$, $\theta = t$, $\xi(t) = j$. Функции $R_{ij}(y, t, u)$ определены в области $0 \leq y \leq t < \infty$, $i, j \in E$, $u \in U_i$. Заметим, что в модели функции $R_{ij}(y, t, u)$ определяются как условные математические ожидания накопленного эффекта, поскольку в конкретных задачах исследуемый управляемый полумарковский процесс часто рассматривается как процесс, вложенный в более тонкий случайный процесс, который меняет свои состояния между марковскими моментами.

Далее обозначим $R_{ij}(t, u) = R_{ij}(t, t, u)$. Кроме этого, будем использовать следующие обозначения:

$$F_i(t) = \mathbf{P}\{\theta < t \mid \xi(0) = i\} = \sum_{j \in E} Q_{ij}(t),$$

$$F_{ij}(t) = \mathbf{P}\{\theta < t \mid \xi(0) = i, \xi(\theta) = j\} = \frac{Q_{ij}(t)}{p_{ij}}, \quad p_{ij} \neq 0 \quad (9)$$

(при $p_{ij} = 0$ функцию $F_{ij}(t)$ можно доопределить произвольным образом),

$$r_{ij}(x) = \int_0^x \int_{U_i} R_{ij}(z, u) dF_{ij}(z, u) G_i(du) + \int_x^\infty \int_{U_i} R_{ij}(x, z, u) dF_{ij}(z, u) G_i(du), \quad (10)$$

$$s_i(x) = \sum_{j \in E} p_{ij} r_{ij}(x) = \sum_{j \in E} \left\{ \int_0^x \int_{U_i} R_{ij}(z, u) dQ_{ij}(z, u) G_i(du) + \int_x^\infty \int_{U_i} R_{ij}(x, z, u) dQ_{ij}(z) G_i(du) \right\}, \quad (11)$$

$$s_i = \lim_{x \rightarrow \infty} s_i(x) = \sum_{j \in E} \int_0^\infty \int_{U_i} R_{ij}(z, u) dQ_{ij}(z, u) G_i(du), \quad (12)$$

$$m_i = \sum_{j \in E} \int_0^\infty \int_{U_i} z dQ_{ij}(z, u) G_i(du) = \sum_{j \in E} \int_0^\infty z dQ_{ij}(z) = \sum_{j \in E} m_{ij} = \int_0^\infty z dF_i(z) = \int_0^\infty \left\{ 1 - \sum_{j \in E} Q_{ij}(z) \right\} dz, \quad (13)$$

$$m_{ij} = \int_0^\infty z dQ_{ij}(z).$$

В дальнейшем будем предполагать, что введенные выше функции и пределы существуют при заданных исходных характеристиках.

Сначала докажем ряд вспомогательных утверждений о свойствах функции восстановления вложенных в процесс $\xi(t) = \xi_{\nu(t)}$ процессов восстановления.

Обозначим $\tau^{(j)}$, $j \in E$, момент первого попадания процесса $\xi(t)$ в состояние j и введем величины

$$G_{ij}(t) = \mathbf{P}\{\tau^{(j)} < t \mid \xi(0) = i\}, \quad \bar{G}_{ij}(t) = 1 - G_{ij}(t), \quad i, j \in E.$$

Если $i = j$, то последовательность интервалов между соседними моментами попадания процесса $\xi(t)$ в состояние $j \in E$ при условии $\xi(0) = i$, $i \in E$, определяет простой процесс восстановления (по терминологии [12] процесс восстановления — это моменты попадания в состояние j); если $i \neq j$, то последовательность этих интервалов определяет процесс восстановления с запаздыванием. Для этих процессов восстановления обозначим через $H_{ij}(t)$, $i, j \in E$, функции восстановления.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Если пространство E счетно, а процесс $\xi(t) = \xi_{\nu(t)}$ регулярен (см. [11]) при любой допустимой стратегии $\vec{G} \in \Omega$, то при $t > 0$ справедливо равенство

$$S_i(t) = s_i(t) + \sum_{j \in E} \int_0^t s_j(t-x) dH_{ij}(x), \quad i \in E.$$

Доказательство. По формуле полного математического ожидания выпишем систему интегральных уравнений для функций $S_i(t)$, $i \in E$ (см. [9]):

$$S_i(t) = s_i(t) + \sum_{j \in E} \int_0^t S_j(t-x) dQ_{ij}(x). \quad (14)$$

Введем следующие обозначения: $\vec{S}(t)$ — вектор-столбец с компонентами $S_i(t)$, $i \in E$; $\vec{s}(t)$ — вектор-столбец с компонентами $s_i(t)$, $i \in E$; $Q(t)$ — полумарковская матрица (ядро) с элементами $Q_{ij}(t)$, $i, j \in E$. Кроме этого, в дальнейшем для полумарковского ядра символом $*$ будет обозначаться его преобразование Лапласа–Стилтьеса с действительным аргументом p :

$$Q_{ij}^*(p) = \int_0^\infty e^{-px} dQ_{ij}(x), \quad i, j \in E, \quad p > 0, \quad 1 \geq Q_{ij}^*(p) \geq 0;$$

тот же смысл этот символ будет иметь и для других функций, матриц и векторов.

Заметим, что если множество E счетно, то мы имеем дело с векторами и матрицами, имеющими счетное множество компонент. Поэтому

корректно должна быть определена операция умножения. В рассматриваемом случае компоненты векторов и матриц неотрицательны, операция умножения определена корректно и обладает свойством ассоциативности [6].

Из системы интегральных уравнений (14) получаем для преобразований Лапласа–Стилтьеса следующую систему алгебраических уравнений:

$$S_i^*(p) = s_i^*(p) + \sum_{j \in E} S_j^*(p) Q_{ij}^*(p), \quad i \in E. \quad (15)$$

В матричной форме эти уравнения имеют вид

$$\vec{S}^*(p) = \vec{s}^*(p) + Q^*(p) \vec{S}^*(p).$$

Обозначив через I единичную матрицу, равенство (15) можно переписать следующим образом:

$$(I - Q^*(p)) \vec{S}^*(p) = \vec{s}^*(p). \quad (16)$$

Далее выпишем зависимости характеристик вложенных процессов восстановления от исходных характеристик управляемого полумарковского процесса.

По формуле полной вероятности получаем систему интегральных уравнений для функций распределения $G_{ij}(t)$, $i, j \in E$:

$$\begin{aligned} G_{ij}(t) &= Q_{ij}(t) + \sum_{k \neq j} \int_0^t G_{kj}(t-x) dQ_{ik}(x), \quad t > 0, \quad i, j \in E, \\ \bar{G}_{ij}(t) &= 1 - \sum_{j \in E} Q_{ij}(t) + \sum_{k \neq j} \int_0^t \bar{G}_{kj}(t-x) dQ_{ik}(x). \end{aligned} \quad (17)$$

Переходя к преобразованиям Лапласа–Стилтьеса, получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} G_{ij}^*(p) &= Q_{ij}^*(p) + \sum_{k \neq j} Q_{ik}^*(p) G_{kj}^*(p) \\ &= Q_{ij}^*(p) [1 - G_{jj}^*(p)] + \sum_{k \in E} Q_{ik}^*(p) G_{kj}^*(p), \quad i, j \in E. \end{aligned} \quad (18)$$

Для регулярного процесса имеем $G_{jj}^*(p) < 1$, $j \in E$. Поэтому, если использовать соотношение (см. [7], [12]) $H_{ij}^*(p) = G_{ij}^*(p) / (1 - G_{jj}^*(p))$, то нетрудно заметить, что последняя система (18) равносильна следующей системе алгебраических уравнений для преобразований Лапласа–Стилтьеса функций восстановления $H_{ij}^*(p)$ введенных выше процессов восстановления:

$$H_{ij}^*(p) = Q_{ij}^*(p) + \sum_{k \in E} Q_{ik}^*(p) H_{kj}^*(p), \quad i, j \in E.$$

В матричном виде получаем соотношение $(I - Q^*(p))H^*(p) = Q^*(p)$,
или

$$(I - Q^*(p))(I + H^*(p)) = I, \quad (19)$$

где $H^*(p)$ обозначает матрицу с элементами $H_{ij}^*(p)$, $i, j \in E$.

Для регулярного процесса обратная матрица $(I - Q_{ij}(p))^{-1}$ существует [11] и справедливо равенство $(I - Q_{ij}(p))^{-1} = I + H^*(p)$.

Из равенств (16) и (19) следует

$$S^*(p) = s^*(p) + s^*(p)H^*(p), \quad S_i^*(p) = s_i^*(p) + \sum_{j \in E} s_j^*(p)H_{ij}^*(p),$$

$$S_i(t) = s_i(t) + \sum_{j \in E} \int_0^t s_j(t-x) dH_{ij}(x). \quad (20)$$

Так как для регулярного процесса процессы восстановления определены для любого $t > 0$ и при любых $i, j \in E$, то равенство (20) доказывает утверждение леммы.

Полученные соотношения обобщают результат, приведенный в [12] для решения интегрального уравнения восстановления.

Далее ограничимся рассмотрением регулярного полумарковского процесса с конечным множеством состояний E . Введем следующие обозначения: E_0 — подмножество несущественных состояний; E_k , $k = 1, 2, \dots, K$, $K < \infty$, — непересекающиеся замкнутые подмножества положительных возвратных сообщающихся состояний.

Лемма 2. Если полумарковский процесс регулярен и множество состояний E конечно, то справедливы следующие равенства:

1) при $i \in E_k$, $k = 1, 2, \dots, K$,

$$S_i(t) = s_i(t) + \sum_{j \in E_k} \int_0^t s_j(t-x) dH_{ij}(x); \quad (21)$$

2) при $i \in E_0$

$$S_i(t) = s_i(t) + \sum_{k=1}^K \sum_{j \in E_k} \int_0^t s_j(t-x) dH_{ij}(x) + \sum_{j \in E_0} \int_0^t s_j(t-x) dH_{ij}(x). \quad (22)$$

При этом

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H_{ij}(t) < \infty, \quad \text{если } i, j \in E_0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H_{ij}(t) = \infty, \quad \text{если } i, j \in E_k, \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

а если $i \in E_0$, $j \in E_k$, $k = 1, 2, \dots, K$, то предел $\lim_{t \rightarrow \infty} H_{ij}(t)$ равен либо нулю, либо бесконечности.

Доказательство. Известно [13], что матрица переходных вероятностей (7) имеет клеточную (блочную) структуру. Тогда из (6) и (7) следует, что аналогичную структуру имеет полумарковское ядро $Q_{ij}(t)$, т.е.

$$\begin{aligned} Q_{ij}(t) &\geq 0, \quad i, j \in E_k, \\ Q_{ij}(t) &= 0, \quad i \in E_k, \quad j \notin E_k, \quad k = 1, 2, \dots, K, \\ Q_{ij} &\geq 0, \quad i \in E_0, \quad j \in E. \end{aligned}$$

Из (17) следует, что

$$G_{ij}(t) = Q_{ij}(t) + \sum_{s \neq j, s \in E_k} \int_0^t G_{sj}(t-x) dQ_{is}(x), \quad t > 0, \quad i, j \in E_k, \quad (23a)$$

$$\bar{G}_{ij}(t) = 1 - \sum_{s \in E_k} Q_{is}(t) + \sum_{s \neq j, s \in E_k} \int_0^t \bar{G}_{kj}(t-x) dQ_{ik}(x), \quad t > 0, \quad i, j \in E_k, \quad (23b)$$

так как $G_{ij}(t) = 0$, $t > 0$, $i \in E_k$, $j \notin E_k$, $k = 1, 2, \dots, K$. Для функций восстановления получаем равенства

$$H_{ij}(t) = 0, \quad t > 0, \quad i \in E_k, \quad j \notin E_k, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (24)$$

Из (20) и (24) получаем (21). Равенство (22) есть равенство (20), записанное в новых обозначениях для конечного множества состояний E .

Исследуем поведение функций восстановления $H_{ij}(t)$ при $i, j \in E$.

Если $i, j \in E_k$, $k = 1, 2, \dots, K$, то из системы (23a) для преобразований Лапласа–Стилтьеса получаем

$$G_{ij}^*(p) = Q_{ij}^*(p) + \sum_{s \neq j, s \in E_k} Q_{is}^*(p) G_{sj}^*(p), \quad i, j \in E_k.$$

Следовательно, переходя к пределу при $p \rightarrow 0$, получаем алгебраическую систему уравнений

$$G_{ij}^*(0) = Q_{ij}^*(0) + \sum_{s \neq j, s \in E_k} Q_{is}^*(0) G_{sj}^*(0), \quad i, j \in E_k. \quad (25)$$

Так как $\sum_{s \in E_k} p_{is} = \sum_{s \in E_k} Q_{is}^*(0) = 1$, то единственное решение системы (25) определяется равенством

$$G_{ij}^*(0) = G_{ij}(\infty) = 1, \quad i, j \in E_k.$$

Единственность решения доказывается стандартным образом. Если существует другое решение $\tilde{G}_{ij}^*(0)$ системы (25), то разность $\alpha_{ij} = \tilde{G}_{ij}^*(0) - G_{ij}^*(0)$ удовлетворяет однородной системе линейных уравнений

$$\alpha_{ij} = \sum_{s \neq j, s \in E_k} p_{is} \alpha_{sj}, \quad i, j \in E_k.$$

Определитель этой системы отличен от нуля [5], поэтому для решения справедливо равенство $\alpha_{ij} = 0$.

Таким образом, распределения $G_{ij}(t)$, $i, j \in E_k$, являются собственными.

Тогда процессы восстановления с запаздыванием, определяемые функциями распределения $(G_{ij}(t), G_{jj}(t))$, $i, j \in E_k$, $k = 1, 2, \dots, K$, являются устойчивыми (возвратными) процессами восстановления [12], для которых $\lim_{t \rightarrow \infty} H_{ij}(t) = \infty$.

При $i, j \in E_0$ из (17) с учетом блочной структуры полумарковского ядра $Q_{ij}(t)$ получим

$$G_{ij}(t) = Q_{ij}(t) + \sum_{s \neq j, s \in E_0} \int_0^t G_{sj}(t-x) dQ_{is}(x), \quad t > 0, \quad i, j \in E_0, \quad (26)$$

или

$$G_{ij}^*(p) = Q_{ij}^*(p) + \sum_{s \neq j, s \in E_0} Q_{is}^*(p) G_{sj}^*(p), \quad i, j \in E_0.$$

Переходя к пределу при $p \rightarrow 0$, получаем алгебраическую систему уравнений

$$G_{ij}^*(0) = Q_{ij}^*(0) + \sum_{s \neq j, s \in E_0} Q_{is}^*(0) G_{sj}^*(0), \quad i, j \in E_0. \quad (27)$$

Определитель системы (27) отличен от нуля [5], поэтому она имеет единственное решение. Так как $\sum_{s \in E_0} p_{is} = \sum_{s \in E_0} Q_{is}^*(0) < 1$, то для этого решения справедливы соотношения

$$G_{ij}^*(0) = G_{ij}(\infty) \neq 1, \quad i, j \in E_0.$$

Таким образом, распределения $G_{ij}(t)$, $i, j \in E_0$, — несобственные.

Тогда процессы восстановления с запаздыванием, определяемые функциями распределения $(G_{ij}(t), G_{jj}(t))$, $i, j \in E_0$, являются обрывающимися процессами восстановления [12], для которых $\lim_{t \rightarrow \infty} H_{ij}(t) < \infty$.

Исследуем функции восстановления $H_{ij}(t)$ при $i \in E_0$, $j \in E_k$, $k = 1, 2, \dots, K$. В этом случае для распределений $G_{ij}(t)$ получаем из (17) систему интегральных уравнений

$$G_{ij}(t) = Q_{ij}(t) + \sum_{s \neq j, s \in E_k} \int_0^t G_{sj}(t-x) dQ_{is}(x) + \sum_{s \in E_0} \int_0^t G_{sj}(t-x) dQ_{is}(x), \quad (28)$$

поскольку остальные элементы матрицы $G_{ij}(t)$ тождественно равны нулю. В самом деле, при $j \in E_k$, $s \in E_m$, $k \neq m$, $k = 1, 2, \dots, K$, имеем систему уравнений

$$G_{sj}(t) = Q_{sj}(t) + \sum_{l \in E_k} \int_0^t G_{lj}(t-x) dQ_{sl}(x), \quad t > 0,$$

в которой все функции $Q_{sj}(t)$ равны нулю. Следовательно, справедливы равенства

$$G_{sj}(t) = 0, \quad j \in E_k, \quad s \in E_m, \quad k \neq m.$$

Обозначим $\tilde{H}_k^*(p)$, $\tilde{Q}_0^*(p)$, $H_k^*(p)$, $Q_k^*(p)$ матрицы с элементами соответственно

$$\begin{aligned} H_{ij}^*(p) &= \int_0^\infty e^{-px} dH_{ij}(x), & i \in E_0, \quad j \in E_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K, \\ Q_{ij}^*(p) &= \int_0^\infty e^{-px} dQ_{ij}(x), & i, j \in E_0, \\ H_{ij}^*(p) &= \int_0^\infty e^{-px} dH_{ij}(x), & i, j \in E_k, \quad k = 1, 2, \dots, K, \\ Q_{ij}^*(p) &= \int_0^\infty e^{-px} dQ_{ij}(x), & i \in E_0, \quad j \in E_k, \quad k = 1, 2, \dots, K. \end{aligned}$$

В этих обозначениях из уравнений (28) получаем для преобразований Лапласа–Стилтьеса уравнения

$$\tilde{H}_k^*(p) = (I - \tilde{Q}_0^*(p))^{-1} Q_k^*(p) + (I - \tilde{Q}_0^*(p))^{-1} Q_k^*(p) H_k^*(p). \quad (29)$$

Заметим, что обратная матрица $(I - \tilde{Q}_0^*(p))^{-1}$ существует, поскольку исследуется регулярный процесс, а обратная матрица есть фундаментальная матрица поглощающей цепи Маркова [5].

Если из множества невозвратных состояний E_0 нельзя перейти в подмножество E_k , т.е. $Q_{ij}(t) \leq p_{ij} = 0$, $i \in E_0$, $j \in E_k$, то из (29) следует, что

$$Q_k^*(p) = 0, \quad \tilde{H}_k^*(p) = 0, \quad H_{ij}(t) \equiv 0, \quad i \in E_0, \quad j \in E_k.$$

Если существуют $i \in E_0$, $j \in E_k$, для которых $Q_{ij}(t) > 0$, то из (29) с учетом ранее доказанного утверждения $\lim_{t \rightarrow \infty} H_{nm}(t) = \infty$, $n, m \in E_k$, следует равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H_{ij}(t) = \infty.$$

Этим завершается доказательство леммы 2.

Пусть $M_{ij} = \int_0^\infty x dG_{ij}(x) = \int_0^\infty [1 - G_{ij}(x)] dx$ — математическое ожидание момента первого достижения ведущей компонентой состояния $j \in E$ при условии, что в нулевой момент времени она принимает значение $i \in E$.

Лемма 3. Если математические ожидания m_i , $i \in E$, конечны, то конечны и математические ожидания M_{ij} , $i, j \in E_k$, $k = 1, 2, \dots, K$.

Доказательство. Утверждение леммы справедливо, поскольку M_{ij} удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$M_{ij} = m_i + \sum_{s \neq j, s \in E_k} p_{is} M_{sj}, \quad (30)$$

определитель которой отличен от нуля.

Теперь сформулируем основной результат.

Теорема. Если при любой допустимой стратегии $\vec{G} \in \Omega$ процесс $\xi(t) = \xi_{\nu(t)}$, принимающий значения из конечного пространства E , регулярен, выполняются условия

$$m_i = \int_0^\infty \bar{F}_i(x) dx < \infty, \quad \int_0^\infty x \bar{F}_i(x) dx < \infty,$$

$$\int_0^\infty \int_{U_i} \int_0^z x dx R_{ij}(x, z, u) dQ_{ij}(z, u) G_i(du) < \infty, \quad i, j \in E,$$

и для каждого $k = 1, 2, \dots, K$ существует $i \in E_k$ такое, что $s_i \neq 0$, то справедливо асимптотическое равенство

$$S_i(t) = S_i t + O(1), \quad t \rightarrow \infty, \quad (31)$$

и коэффициент S_i является дробно-линейным функционалом относительно мер, определяющих допустимые стратегии.

Доказательство. Прежде всего заметим, что при выполнении условий теоремы выполняются условия доказанных выше лемм.

Далее для построения асимптотического разложения (31) воспользуемся равенствами (21), (22) и тауберовой теоремой [12].

Разложим функцию

$$H_{ij}^*(p) = \frac{G_{ij}^*(p)}{1 - G_{jj}^*(p)}, \quad i, j \in E_k,$$

в ряд по степеням p в окрестности нуля.

Для функции $G_{ij}^*(p)$ имеем разложение

$$G_{ij}^*(p) = \int_0^\infty e^{-px} dG_{ij}(x) = 1 - pM_{ij} + O(p^2), \quad p \rightarrow 0, \quad (32)$$

если существуют математические ожидания M_{ij} , $i, j \in E_k$, и вторые моменты

$$\int_0^\infty x^2 dG_{ij}(x) = \int_0^\infty x \bar{G}_{ij}(x) dx < \infty, \quad i, j \in E_k.$$

Математические ожидания M_{ij} существуют в силу леммы 3 и условий теоремы. Исследуем вторые моменты. Умножив равенства (23b) на независимую переменную t и проинтегрировав в пределах от нуля до бесконечности, получаем при $i, j \in E_k$

$$\int_0^\infty t \bar{G}_{ij}(t) dt = \int_0^\infty t \bar{F}_i(t) dt + \sum_{s \neq j, s \in E_k} m_{is} M_{sj} + \sum_{s \neq j, s \in E_k} p_{is} \int_0^\infty t \bar{G}_{sj}(t) dt, \quad (33)$$

где использованы ранее принятые обозначения (7), (13) и обозначения

$$M_{ij} = \int_0^\infty x dG_{ij}(x) = \int_0^\infty [1 - G_{ij}(x)] dx.$$

По условиям теоремы свободные члены системы (33) ограничены, а так как определитель матрицы этой системы отличен от нуля, получаем, что существует ограниченное решение $\int_0^\infty x \bar{G}_{ij}(x) dx < \infty$. Таким образом, доказана справедливость разложения (32).

Для преобразования Лапласа–Стилтьеса функции восстановления получаем следующее разложение: при $p \rightarrow 0$

$$H_{ij}^*(p) = \frac{G_{ij}^*(p)}{1 - G_{jj}^*(p)} = \frac{1 - pM_{ij} + O(p^2)}{pM_{jj} + O(p^2)} = \frac{1}{pM_{jj}} + O(1), \quad i, j \in E_k. \quad (34)$$

Для функции $s_i^*(p)$ при выполнении условий теоремы имеем разложение

$$s_i^*(p) = \int_0^\infty e^{-px} ds_i(x) = s_i + O(p), \quad p \rightarrow 0.$$

Следовательно, для произведения справедливо разложение

$$H_{ij}^*(p)s_j^*(p) = \frac{s_j}{pM_{jj}} + O(1), \quad i, j \in E_k,$$

и равенство

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{ps_j^*(p)H_{ij}^*(p)M_{jj}}{s_j} = 1.$$

Если воспользоваться тауберовой теоремой [12], то получаем

$$\int_0^t s_j(t-x) dH_{ij}(x) = \frac{s_j t}{M_{jj}} + O(1), \quad t \rightarrow \infty. \quad (35)$$

Тогда из равенства (21) при $i \in E_k$ следует, что

$$S_i(t) = \sum_{j \in E_k} \frac{s_j t}{M_{jj}} + O(1), \quad i \in E_k, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (36)$$

Предположим теперь, что процесс стартует из невозвратного состояния $i \in E_0$. Сначала построим разложение при $i \in E_0, j \in E_k, k = 1, 2, \dots, K$.

Проанализируем двойную сумму в правой части равенства (22). Обратная матрица $(I - \tilde{Q}_0^*(p))^{-1}$ существует, и для нее справедливо следующее представление (см. [5]):

$$(I - \tilde{Q}_0^*(p))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{Q}_0^*(p))^n.$$

Поэтому элемент матрицы $(I - \tilde{Q}_0^*(p))^{-1} Q_0^*(p)$ с индексами $i \in E_0, j \in E_k, k = 1, 2, \dots, K$, является преобразованием Лапласа–Стилтьеса функции

$$\gamma_{ij}(t) = \sum_{s \in E_0} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t Q_{sj}(t-x) dQ_{is}^{(n)}(x), \quad (37)$$

$$i \in E_0, \quad j \in E_k, \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

где $Q_{ij}^{(n)}(x)$ обозначает элемент матрицы $Q^{(n)}(t)$, которая определяется как n -кратная свертка матрицы $Q(t)$, имеющей элементы $Q_{ij}(t), i, j \in E_0$ (см. [9]):

$$Q_{ij}^{(0)}(t) = 0, \quad t < 0, \quad Q_{ij}^{(0)}(t) = \delta_{ij}, \quad t \geq 0$$

$$(\delta_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad \delta_{ij} = 1, \quad i = j),$$

$$Q_{ij}^{(1)}(t) = Q_{ij}(t), \quad Q_{ij}^{(n)}(t) = \sum_{s \in E_0} \int_0^t Q_{sj}(t-x) dQ_{is}^{(n-1)}(x), \quad n > 1.$$

Нетрудно заметить, что функция $\gamma_{ij}(t)$ есть вероятность того, что ведущая компонента $\xi(t)$ управляемого полумарковского процесса перейдет до момента t в состояние $j, j \in E_k$, принимая до этого перехода значения только из множества E_0 при условии, что $\xi(0) = i \in E_0$.

При $t \rightarrow \infty$ получаем условную вероятность того, что, стартуя из состояния $i \in E_0$ (при условии $\xi(0) = i$), цепь Маркова с переходными вероятностями (7) перейдет в состояние $j, j \in E_k$, принимая до этого перехода значения только из множества E_0 :

$$\gamma_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_{ij}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s \in E_0} p_{sj} p_{is}^{(n)},$$

где $p_{is}^{(n)} = \lim_{x \rightarrow \infty} Q_{is}^{(n)}(x)$, а $Q_{is}^{(n)}(x)$ есть n -кратная свертка матрицы $Q_{is}(x), i, s \in E_0$.

Далее, из (29) следует, что

$$H_{ij}(t) = \gamma_{ij}(t) + \sum_{s \in E_k} \int_0^t \gamma_{is}(t-x) dH_{sj}(x), \quad i \in E_0, \quad j \in E_k. \quad (38)$$

Из (38) аналогично (35) получаем

$$H_{ij}(t) = \frac{t}{M_{jj}} \sum_{s \in E_k} \gamma_{is} + O(1), \quad i \in E_0, \quad j \in E_k, \quad t \rightarrow \infty.$$

Сумма $\sum_{s \in E_k} \gamma_{is}$ определяет вероятность перехода вложенной цепи Маркова из состояния $i \in E_0$ в замкнутое множество сообщающихся состояний E_k .

Таким образом, для двойной суммы в правой части равенства (22) получаем разложение при $t \rightarrow \infty$:

$$\sum_{k=1}^K \sum_{j \in E_k} \int_0^t s_j(t-x) dH_{ij} = \sum_{k=1}^K \sum_{j \in E_k} \left(\sum_{s \in E_k} \gamma_{is} \right) \frac{s_j t}{M_{jj}} + O(1). \quad (39)$$

Для первого слагаемого в (22) при $t \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$s_i(t) = O(1), \quad i \in E_0.$$

Для третьего слагаемого в (22) докажем справедливость асимптотического равенства: при $t \rightarrow \infty$

$$\sum_{j \in E_0} \int_0^t s_j(t-x) dH_{ij}(x) = O(1), \quad i \in E_0. \quad (40)$$

Исследуем функции восстановления $H_{ij}(t)$ при $i, j \in E_0$. Из уравнений (26) получаем

$$\tilde{H}_{ij}^*(p) = (I - \tilde{Q}_0^*(p))^{-1} \tilde{Q}_0^*(p) = \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{Q}_0^*(p))^n. \quad (41)$$

Таким образом, для функций восстановления имеем равенства

$$\delta_{ij} + H_{ij}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{ij}^{(n)}(t), \quad i, j \in E_0. \quad (42)$$

Выше было доказано (лемма 2), что $\lim_{t \rightarrow \infty} H_{ij}(t) < \infty$ при $i, j \in E_0$. В условиях теоремы при $p \rightarrow 0$ имеем

$$Q_{ij}^*(p) = p_{ij} + O(p), \quad i, j \in E_0, \quad \tilde{Q}^*(p) = \tilde{P} + O(p), \quad p \rightarrow 0,$$

где $\tilde{P}$ — матрица переходных вероятностей (7) при $i, j \in E_0$. Тогда для разложения степени при $p \rightarrow 0$ и $n > 0$ имеем

$$(\tilde{Q}^*(p))^n = \tilde{P}^n + O(p), \quad Q_{ij}^{(n)*}(p) = p_{ij}^{(n)} + O(p), \\ Q_{ij}^{(n)}(t) = p_{ij}^{(n)} + o(1), \quad i, j \in E_0.$$

Наконец, для функций восстановления при $i, j \in E_0$ получаем из (42) равенства

$$H_{ij}^*(p) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_{ij}^{(n)*}(p) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} + O(p), \\ \lim_{t \rightarrow \infty} H_{ij}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}, \quad i, j \in E_0. \quad (43)$$

Следовательно, равенство (40) справедливо.

Объединяя соотношения (39) и (40), получаем асимптотическое разложение функции (22):

$$S_i(t) = \sum_{k=1}^K \sum_{j \in E_k} \left(\sum_{s \in E_k} \gamma_{is} \right) \frac{s_j t}{M_{jj}} + O(1), \quad t \rightarrow \infty. \quad (44)$$

Таким образом, равенства (36) и (44) доказывают утверждение теоремы, причем

$$\begin{aligned} S^{(k)} &= S_i = \sum_{j \in E_k} \frac{s_j}{M_{jj}}, \quad i \in E_k, \quad k = 1, 2, \dots, K, \\ S_i &= \sum_{k=1}^K \left(\sum_{j \in E_k} \frac{s_j}{M_{jj}} \right) \left(\sum_{s \in E_k} \gamma_{is} \right), \quad i \in E_0. \end{aligned} \quad (45)$$

Заметим, что при $i \in E_k$ исследуемый коэффициент не зависит от состояния, а зависит только от номера замкнутого класса.

Далее выясним зависимость коэффициентов (45) от вероятностных мер $\vec{G} = (G_1, G_2, \dots, G_N)$, которые определяют марковскую однородную рандомизированную стратегию управления.

По формуле полного математического ожидания получаем для математических ожиданий M_{ij} , $i, j \in E$, систему алгебраических уравнений

$$M_{ij} = m_{ij} + \sum_{s \in E} M_{sj} p_{is}. \quad (46)$$

С учетом структуры матрицы переходных вероятностей вложенной цепи Маркова из уравнений (46) получаем

$$M_{ij} = m_{ij} + \sum_{s \in E_k} M_{sj} p_{is}, \quad i, j \in E_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K, \quad (47)$$

$$\begin{aligned} M_{ij} &= m_{ij} + \sum_{s \in E_0} M_{sj} p_{is} + \sum_{s \in E_k} M_{sj} p_{is}, \\ i &\in E_0, \quad j \in E_k, \quad k = 1, 2, \dots, K. \end{aligned} \quad (48)$$

Для каждого замкнутого класса сообщающихся состояний существует стационарное распределение $\vec{\pi}^{(k)} = (\pi_{ki}, i \in E_k)$, удовлетворяющее условиям

$$\pi_{ki} = \sum_{j \in E_k} \pi_{kj} p_{ji}, \quad \sum_{j \in E_k} \pi_{kj} = 1, \quad \pi_{kj} > 0, \quad i \in E_k, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (49)$$

Нормированное решение этой системы алгебраических уравнений представляется в виде отношения двух определителей: $\pi_{ki} = \Delta_i^{(k)} / \Delta^{(k)}$, где $\Delta^{(k)}$ — определитель транспонированной матрицы $P^{(k)}$ с элементами

p_{ij} , $i, j \in E_k$, а $\Delta_i^{(k)}$ — определитель транспонированной матрицы $P^{(k)}$, в которой i -й столбец заменен единицами.

В силу того, что переходные вероятности $p_{ij} = p_{ij}(G_i)$, определяемые равенствами (7), являются линейными функционалами, по определению детерминанта имеем:

(i) определитель $\Delta^{(k)} = \Delta^{(k)}(G_i, i \in E_k)$ есть линейный функционал относительно вероятностных мер $G_i, i \in E_k$;

(ii) определитель $\Delta_i^{(k)} = \Delta_i^{(k)}(G_j, j \in E_k \setminus \{i\})$ есть линейный функционал относительно всех вероятностных мер $G_j, j \in E_k$, кроме меры G_i .

Далее, если умножить левую и правую части равенства (47) на π_{ki} и просуммировать, то при $j \in E_k, k = 1, 2, \dots, K$, приходим к равенству

$$M_{jj} = \frac{\sum_{i \in E_k} m_i \pi_{ki}}{\pi_{kj}} = \frac{\sum_{i \in E_k} m_i(G_i) \Delta_i^{(k)}(G_j, j \in E_k \setminus \{i\})}{\Delta_j^{(k)}(G_l, l \in E_k \setminus \{j\})}. \quad (50)$$

Подставляя зависимость (50) в соотношение (45) и учитывая, что функционалы $m_i = m_i(G_i)$ и $s_i = s_i(G_i)$, определяемые равенствами (13) и (12), являются линейными функционалами, получаем при $i \in E_k, k = 1, 2, \dots, K$, что

$$S^{(k)} = S_i(\vec{G}^{(k)}) = \sum_{j \in E_k} \frac{s_j}{M_{jj}} = \frac{\sum_{j \in E_k} s_j(G_j) \Delta_j^{(k)}(G_l, l \in E_k \setminus \{j\})}{\sum_{j \in E_k} m_j(G_j) \Delta_j^{(k)}(G_l, l \in E_k \setminus \{j\})} \quad (51)$$

есть дробно-линейный функционал относительно распределений $\vec{G}^{(k)} = (G_i, i \in E_k)$, определяющих марковскую однородную стратегию управления при старте управляемого полумарковского процесса из произвольного состояния любого замкнутого класса сообщающихся состояний.

По существу, полученный результат повторяет результаты, изложенные в [1], когда исследовался управляемый полумарковский процесс с одним классом сообщающихся состояний вложенной цепи Маркова.

Предположим теперь, что процесс стартует из некоторого невозвратного состояния $i \in E_0$.

При анализе коэффициентов (45) для $i \in E_0$ исследуем сначала вероятность

$$\sum_{s \in E_k} \gamma_{is} = \sum_{s \in E_k} \sum_{l \in E_0} p_{ls} \sum_{n=0}^{\infty} p_{il}^{(n)}, \quad i \in E_0.$$

Ранее мы ввели обозначение $\tilde{P}$ для матрицы переходных вероятностей p_{ij} , $i, j \in E_0$, тогда сумма $\sum_{n=0}^{\infty} p_{il}^{(n)} = \alpha_{il}$, $i, l \in E_0$, есть элемент обратной матрицы $(I - \tilde{P})^{-1}$.

По определению обратной матрицы каждый ее элемент α_{il} представляется в виде отношения двух определителей: $\alpha_{il} = \Delta_{li}^{(0)} / \Delta^{(0)}$ в знаменателе стоит определитель матрицы $\tilde{P}$, в числителе — алгебраическое дополнение соответствующего элемента.

Переходные вероятности $p_{ij} = p_{ij}(G_i)$, $i, j \in E_0$, суть линейные функционалы только от одной вероятностной меры G_i , $i \in E_0$, следовательно, определитель матрицы $\tilde{P}$ является линейным функционалом от распределений $\vec{G}^{(0)} = (G_i, i \in E_0)$, $\Delta^{(0)} = \Delta^{(0)}(G_i, i \in E_0)$.

Числитель элемента α_{il} обратной матрицы определяется как детерминант матрицы, которая получается из матрицы $\tilde{P}$ вычеркиванием l -й строки и i -го столбца, умноженный на $(-1)^{(i+l)}$. Следовательно, функционал $\Delta_{li}^{(0)}$ зависит от вероятностных мер $(G_n, n \in E_0 \setminus \{l\})$, т.е. $\Delta_{li}^{(0)} = \Delta_{li}^{(0)}(G_n, n \in E_0 \setminus \{l\})$.

Тогда в принятых обозначениях получаем

$$\gamma_{is} = \sum_{l \in E_0} p_{ls} \sum_{n=0}^{\infty} p_{il}^{(n)} = \sum_{l \in E_0} p_{ls} \alpha_{il} = \frac{\sum_{l \in E_0} \Delta_{li}^{(0)}(G_n, n \in E_0 \setminus \{l\}) p_{ls}(G_l)}{\Delta^{(0)}(G_n, i \in E_0)},$$

или

$$\gamma_i^{(k)} = \sum_{s \in E_k} \gamma_{is} = \frac{\sum_{s \in E_k} \sum_{l \in E_0} \Delta_{li}^{(0)}(G_n, n \in E_0 \setminus \{l\}) p_{ls}(G_l)}{\Delta^{(0)}(G_n, n \in E_0)}, \quad i \in E_0, \quad (52)$$

т.е. исследуемое выражение есть дробно-линейный функционал относительно распределений $\vec{G}^{(0)} = (G_i, i \in E_0)$.

Подставляя соотношения (51) и (52) в (45), при $i \in E_0$ получаем

$$\begin{aligned} S_i &= S_i(\vec{G}) = S_i(G_1, G_2, \dots, G_N) = \sum_{k=1}^K \left(\sum_{s \in E_k} \gamma_{is} \right) \left(\sum_{j \in E_k} \frac{s_j}{M_{jj}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^K \frac{\sum_{s \in E_k} \sum_{l \in E_0} \Delta_{li}^{(0)}(G_n, n \in E_0 \setminus \{l\}) p_{ls}(G_l)}{\Delta^{(0)}(G_n, n \in E_0)} \\ &\quad \times \frac{\sum_{j \in E_k} s_j(G_j) \Delta_j^{(k)}(G_l, l \in E_k \setminus \{j\})}{\sum_{j \in E_k} m_j(G_j) \Delta_j^{(k)}(G_l, l \in E_k \setminus \{j\})}. \end{aligned} \quad (53)$$

Проанализируем структуру дробей в правой части (53). При фиксированном k каждый знаменатель является линейным функционалом относительно вероятностных мер $\vec{G}^{(k)} = (G_l, l \in E_k)$. Так как множества сообщающихся состояний не пересекаются: $E_k E_s = \emptyset$, $k \neq s$, то общий знаменатель этих дробей

$$\Delta^{(0)}(G_l, l \in E_0) \prod_{k=1}^K \left(\sum_{i \in E_k} m_i(G_i) \Delta_i^{(k)}(G_l, l \in E_k \setminus \{i\}) \right)$$

есть линейный функционал относительно вероятностных мер $\vec{G} = (G_l, l \in E)$.

Таким образом, доказано, что знаменатель функционала (53) есть линейный функционал относительно вероятностных мер $\vec{G} = (G_l, l \in E)$.

При фиксированном k каждый числитель является линейным функционалом относительно вероятностных мер $\vec{G}^{(k)} \cup \vec{G}^{(0)}$. Дополнительный множитель этой дроби

$$\prod_{s=1, s \neq k}^K \left(\sum_{i \in E_s} m_i(G_i) \Delta_i^{(s)}(G_l, l \in E_s \setminus \{i\}) \right)$$

есть линейный функционал относительно вероятностных мер

$$\bigcup_{s=1, s \neq k}^K \vec{G}^{(s)}.$$

Следовательно, доказано, что числитель функционала (53) также есть линейный функционал относительно вероятностных мер $\vec{G} = (G_l, l \in E)$. Тем самым завершается доказательство теоремы.

В задачах управления марковскими цепями, марковскими и полумарковскими процессами дробно-линейная структура целевого функционала, определяющего качество управления, позволяет поставить вопрос о структуре оптимальной стратегии управления (т.е. структуре вероятностных мер $\vec{G} = (G_l, l \in E)$), которая обеспечивает оптимальное значение целевого функционала. Эти вопросы исследовались в ряде работ, см. [1], [2], [19], [14].

В заключение сформулируем алгоритм поиска оптимальной стратегии. Если использовать обозначения (51) и (52), то равенство (53) можно переписать в виде

$$S_i = S_i(\vec{G}) = \sum_{k=1}^K \left(\sum_{s \in E_k} \gamma_{is} \right) \left(\sum_{j \in E_k} \frac{s_j}{M_{jj}} \right) = \sum_{k=1}^K \gamma_i^{(k)} S^{(k)}.$$

В этом соотношении дробно-линейные функционалы $S^{(k)}$ зависят от распределений $\vec{G}^{(k)} = (G_l, l \in E_k)$, $k = 1, 2, \dots, K$. Так как коэффициенты $\gamma_i^{(k)}$ неотрицательны, то сначала надо найти распределения $\vec{G}^{(*)} = (G_l^{(*)}, l \in E_k)$, $k = 1, 2, \dots, K$, на которых достигаются экстремумы функционалов $S^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, K$, а затем определять оптимальные распределения $\vec{G}^{(*)} = (G_l^{(*)}, l \in E_0)$, на которых достигается экстремум функционала

$$\sum_{k=1}^K \gamma_i^{(k)}(G_l, l \in E_0) S^{(k)}(G_s^{(*)}, s \in E_k).$$

Таким образом, определяем оптимальную стратегию управления $\vec{G}^{(*)}$, на которой достигается экстремум функционала (53).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барзилович Е.Ю., Беляев Ю.К., Каштанов В.А., Коваленко И.Н., Соловьев А.Д., Ушаков И.А. Вопросы математической теории надежности. М.: Радио и связь, 1983, 376 с.
2. Джевелл В.С. Управляемые полумарковские процессы. — Киберн. сб., 1967, № 4, с. 97–137.
3. Дынкин Е.Б., Юшкевич А.А. Управляемые марковские процессы и их приложения. М.: Наука, 1975, 154 с.
4. Каштанов В.А., Янишевский И.М. Совместное распределение момента катастрофы и аддитивного функционала доходов. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 3, с. 650–655.
5. Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова. М.: Наука, 1970, 271 с.
6. Кемени Дж., Снелл Дж., Кнепп А. Счетные цепи Маркова. М.: Наука, 1987, 413 с.
7. Кокс Д.Р., Смит В.Л. Теория восстановления. М.: Советское радио, 1967, 300 с.
8. Королюк В.С., Турбин А.Ф. Полумарковские процессы и их приложения. Киев: Наукова думка, 1976, 184 с.
9. Королюк В.С., Турбин А.Ф. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. Киев: Наукова думка, 1982, 236 с.
10. Майн Х., Осаки С. Марковские процессы принятия решений. М.: Наука, 1977, 175 с.
11. Сильвестров Д.С. Полумарковские процессы с дискретным множеством состояний (основы расчета функциональных и надежностных характеристик стохастических систем). М.: Сов. радио, 1980, 272 с.
12. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М.: Мир, 1967, 751 с.
13. Ширяев А.Н. Вероятность. Кн. 2. М.: МЦНМО, 2004, 408 с.
14. Kashtanov V. A. Discrete distributions in control problems. — Probabilistic Methods in Discrete Mathematics. Proceedings of the Fourth International Petrozavodsk Conference (Petrozavodsk, 1996). Utrecht: VSP, 1997, p. 267–274.
15. Kashtanov V. A. The controlled semi-Markov processes in problem of maintenance and effectiveness. — MMR' 2000. Second International Conference on Mathematical Methods in Reliability (Bordeaux, France, 2000), Abstracts' Book, v. 2, p. 587–590.

Поступила в редакцию
28.IV.2014

Исправленный вариант
15.VII.2014