Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Черный, Сходимость некоторых интегралов, связанных с процессами Бесселя, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, том 45, выпуск 2, 251–267

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp462>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 16:40:00

© 2000 г.

ЧЕРНЫЙ А. С.*

СХОДИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛОВ, СВЯЗАННЫХ С ПРОЦЕССАМИ БЕССЕЛЯ

В статье исследуется сходимость интегралов Лебега от случайных процессов вида $f(\rho_t)$, где f — неотрицательная борелевская функция, а $(\rho_t, t \geq 0)$ — процесс Бесселя размерности δ , выходящий из точки $\rho_0 \geq 0$. Полученные результаты применяются к доказательству сингулярности распределений процессов Бесселя различных размерностей.

Ключевые слова и фразы: процессы Бесселя, закон 0–1 Энгельберга–Шмидта, локальное время броуновского движения, регулярные непрерывные строго марковские процессы, сингулярность распределений.

1. Введение. 1. Один из возможных способов определения процессов Бесселя состоит в следующем. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$Z_t = z_0 + \delta t + 2 \int_0^t \sqrt{Z_s} dB_s, \quad (1.1)$$

где $z_0 \geq 0$, $\delta \geq 0$, а $(B_t, t \geq 0)$ — стандартное одномерное броуновское движение. Как известно (см. [14, гл. IX, § 3]), это уравнение имеет единственное неотрицательное сильное решение $(Z_t, t \geq 0)$. Процесс $\rho_t = \sqrt{Z_t}$ называется процессом Бесселя размерности δ , выходящим из точки $\rho_0 = \sqrt{z_0}$. Подробнее о процессах Бесселя можно узнать из [3], [12], [14].

При $\delta > 1$ процесс Бесселя размерности δ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$\rho_t = \rho_0 + \int_0^t \frac{\delta - 1}{2\rho_s} ds + B_t. \quad (1.2)$$

Процесс Бесселя является *регулярным непрерывным строго марковским процессом с естественной шкалой* (scale function), определяемой

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия; e-mail: cherny@mech.math.msu.su

по формуле:

$$s(x) = \begin{cases} -x^{2-\delta}, & \text{если } \delta > 2, \\ 2 \ln x, & \text{если } \delta = 2, \\ x^{2-\delta}, & \text{если } 0 \leq \delta < 2. \end{cases} \quad (1.3)$$

Мера скорости (speed measure) процесса Бесселя имеет следующую плотность относительно меры Лебега:

$$\begin{cases} \left(\frac{\delta}{2} - 1\right)^{-1} x^{\delta-1}, & \text{если } \delta > 2, \\ x, & \text{если } \delta = 2, \\ \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^{-1} x^{\delta-1}, & \text{если } 0 \leq \delta < 2. \end{cases} \quad (1.4)$$

Определение регулярных марковских процессов, естественной шкалы и меры скорости можно найти, например, в [14, гл. VII, § 3]. Формулы (1.3) и (1.4) содержатся в [14, гл. XI, § 1].

Из явного вида $s(x)$ вытекают следующие свойства процессов Бесселя:

$$\delta \geq 2 \implies \mathbf{P}\{\forall t > 0, \rho_t > 0\} = 1, \quad (1.5)$$

$$0 \leq \delta < 2 \implies \mathbf{P}\{\exists t \geq 0: \rho_t = 0\} = 1. \quad (1.6)$$

Точка $x = \{0\}$ является границей-выходом при $\delta \geq 2$, отражающей точкой при $0 < \delta < 2$ и ловушкой при $\delta = 0$.

Процесс Бесселя является возвратным при $0 < \delta \leq 2$ и невозвратным при $\delta > 2$:

$$\delta > 2 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \rho_t = \infty \quad \text{п.н.}, \quad (1.7)$$

$$\delta = 2 \implies \forall x > 0, \quad \mathbf{P}\{\exists t \geq 0: \rho_t = x\} = 1, \quad (1.8)$$

$$0 < \delta < 2 \implies \forall x \geq 0, \quad \mathbf{P}\{\exists t \geq 0: \rho_t = x\} = 1. \quad (1.9)$$

2. Нам понадобятся некоторые свойства *локального времени* броуновского движения. Их доказательство содержится, например, в [14, гл. VI, § 1]. Локальным временем броуновского движения B_t в точке $x \in \mathbf{R}$ называется процесс L_t^x такой, что

$$(B_t - x)^- = (B_0 - x)^- - \int_0^t I(B_s \leq x) dB_s + \frac{1}{2} L_t^x, \quad (1.10)$$

где использовано обозначение: $z^- = -(z \wedge 0)$. Равенство (1.10) называется *формулой Танака*.

Процесс $(L_t^x, x \in \mathbf{R}, t \geq 0)$ обладает модификацией, непрерывной по паре переменных (x, t) . В дальнейшем будем сразу считать, что для локального времени выбрана эта модификация.

Для любой неотрицательной борелевской функции h и любого момента остановки T справедливо равенство:

$$\int_0^T h(B_s) ds \stackrel{\text{п.н.}}{=} \int_{\mathbf{R}} h(x) L_T^x dx. \quad (1.11)$$

Для любого $a \in \mathbf{R}$ мера dL_t^a п.н. сосредоточена на множестве $\{t: B_t = a\}$. Отсюда, с учетом непрерывности L_t^x по x , получаем следующее свойство локального времени: если $a \leq B_0 \leq b$, то

$$\mathbf{P}\{\forall x \notin [a, b], L_{T_a(B) \wedge T_b(B)}^x = 0\} = 1, \quad (1.12)$$

где использовано обозначение: $T_c(B) = \inf\{s \geq 0: B_s = c\}$ ($c \in \mathbf{R}$).

Локальное время броуновского движения, выходящего из точки $x_0 \in \mathbf{R}$, обладает также следующим свойством:

$$\mathbf{P}\{\forall \varepsilon > 0, L_\varepsilon^{x_0} > 0\} = 1. \quad (1.13)$$

3. Прежде чем переходить к формулировке результатов данной работы, сформулируем закон 0–1 *Энгельберта–Шмидта*. Его доказательство содержится в [5] (см. также [11, гл. 3, § 3.6]).

Предложение 1.1. Пусть $(B_t, t \geq 0)$ — (одномерное) броуновское движение и f — неотрицательная борелевская функция. Следующие условия эквивалентны:

- а) $\mathbf{P}\{\forall t > 0, \int_0^t f(B_s) ds < \infty\} > 0$;
- б) $\mathbf{P}\{\forall t > 0, \int_0^t f(B_s) ds < \infty\} = 1$;
- в) функция f локально интегрируема.

В настоящей работе доказано аналогичное утверждение для процессов Бесселя (следствие 2.1). Доказано даже более сильное утверждение (теорема 2.1). Эта теорема утверждает, что для процесса Бесселя $(\rho_t, t \geq 0)$ и неотрицательной борелевской функции f существует момент остановки $\xi \leq \infty$ такой, что

$$\mathbf{P}\left\{\forall t < \xi, \int_0^t f(\rho_s) ds < \infty\right\} = 1, \quad (1.14)$$

$$\mathbf{P}\left\{\exists t > \xi: \int_0^t f(\rho_s) ds < \infty\right\} = 0. \quad (1.15)$$

При этом ξ имеет вид: $\xi = T_l(\rho) \wedge T_r(\rho)$. Значения l и r удовлетворяют неравенствам $-\infty \leq l \leq \rho_0 \leq r \leq +\infty$ и легко определяются по функции f .

Из соотношений (1.14), (1.15) не ясно, сходится ли интеграл

$$\int_0^\xi f(\rho_s) ds. \quad (1.16)$$

В настоящей работе исследуется сходимость этого интеграла (теорема 2.2). В теоремах 2.3, 2.4 изучается сходимость интегралов

$$\int_0^\infty f(\rho_s) ds. \quad (1.17)$$

Некоторые из полученных результатов уже известны в литературе. В частности, в работе [8] изучается сходимость интегралов Лебега от функционалов $f(\rho_t)$ и доказывается закон 0–1 для случая $\delta \geq 2$, $\rho_0 > 0$. В работах [13], [16] рассмотрен случай $\delta \geq 2$, $\rho_0 = 0$. Случай $0 < \delta < 2$ ранее в литературе не рассматривался.

Сходимость интегралов (1.17) изучалась в работах [8], [16] для случая $\delta \geq 2$.

Что касается интегралов (1.16), то ранее их сходимость не изучалась.

Аналогичные вопросы исследовались не только для броуновского движения и процессов Бесселя. Так, в статьях [7], [16] рассмотрены функционалы от (некоторых) локальных мартингалов и семимартингалов, а в статье [9] — функционалы от броуновского движения со сносом.

Формулировка основных результатов данной работы содержится в п. 2. Их доказательства собраны в п. 3. В конце статьи (п. 4) полученные результаты применяются к доказательству сингулярности распределений, задаваемых процессами Бесселя различных размерностей. Из утверждений, содержащихся в [15], следует, что распределения двух процессов Бесселя размерностей $\eta > \delta > 2$, выходящих из точки $\rho_0 = 0$, сингулярны на σ -алгебре $\mathcal{F}_{0+} = \bigcap_{\epsilon > 0} \sigma(X_s, s \leq \epsilon)$. В настоящей работе это утверждение доказывается другим методом, применимым без ограничения $\delta > 2$. При $\rho_0 > 0$ мы доказываем сингулярность распределений процессов Бесселя различных размерностей на σ -алгебре $\mathcal{F}_\infty = \sigma(X_s, s \geq 0)$.

2. Основные результаты. В этом пункте мы формулируем теоремы и следствия к ним. Прежде всего, дадим следующее определение.

О п р е д е л е н и е. Неотрицательная борелевская функция $g(x)$, заданная на $[0, \infty)$, локально интегрируема в точке $a \geq 0$, если существует $\epsilon > 0$ такое, что $\int_{(a-\epsilon) \vee 0}^{a+\epsilon} g(x) dx < \infty$. Множество точек, в которых функция g локально интегрируема, обозначим через C_g . Заметим, что это открытое в $[0, \infty)$ множество.

Одним из основных результатов работы является следующая теорема.

Теорема 2.1. Пусть ρ_t — процесс Бесселя размерности $\delta \geq 0$, выходящий из точки $\rho_0 \geq 0$ ($\rho_0 > 0$ при $\delta = 0$). Пусть f — неотрица-

тельная борелевская функция на $[0, \infty)$. Положим

$$g(x) = \begin{cases} x f(x), & \text{если } \delta > 2, \\ x (|\ln x| \vee 1) f(x), & \text{если } \delta = 2, \\ x^{\delta-1} f(x), & \text{если } 0 < \delta < 2, \\ x f(x), & \text{если } \delta = 0. \end{cases}$$

Тогда для момента остановки $\xi = \inf\{s \geq 0: \rho_s \notin C_g\}$ выполнено:

$$\mathbf{P}\left\{\forall t < \xi, \int_0^t f(\rho_s) ds < \infty\right\} = 1,$$

$$\mathbf{P}\left\{\exists t > \xi: \int_0^t f(\rho_s) ds < \infty\right\} = 0.$$

З а м е ч а н и я. (i) В статье [6, лемма 1] доказано аналогичное утверждение для броуновского движения.

(ii) Очевидно, что

$$\xi = T_l(\rho) \wedge T_r(\rho), \quad (2.1)$$

где

$$r = \sup\{x \geq \rho_0: x \in C_g\}, \quad (2.2)$$

$$l = \inf\{x \leq \rho_0: x \in C_g \cup (-\infty, 0)\}. \quad (2.3)$$

В частности, если $C_g \supseteq [0, \rho_0]$, то $l = -\infty$ и, тем самым, $T_l(\rho) \stackrel{\text{п.н.}}{=} \infty$ (так как процесс ρ_t неотрицателен). Заметим, что в данном случае величине l можно придать любое строго отрицательное значение, однако, вообще говоря, нельзя положить $l = 0$, поскольку может оказаться, что $\mathbf{P}\{T_0(\rho) < \infty\} > 0$.

Следствие 2.1. (i) Пусть $\delta \geq 2$ и $\rho_0 > 0$. Следующие утверждения эквивалентны:

а) $\mathbf{P}\{\forall t > 0, \int_0^t f(\rho_s) ds < \infty\} = 1$;

б) функция f локально интегрируема на $(0, \infty)$, т.е. $C_f \supseteq (0, \infty)$.

(ii) Пусть $0 < \delta < 2$ или $\rho_0 = 0$. Следующие утверждения эквивалентны:

а) $\mathbf{P}\{\forall t > 0, \int_0^t f(\rho_s) ds < \infty\} > 0$;

б) $\mathbf{P}\{\forall t > 0, \int_0^t f(\rho_s) ds < \infty\} = 1$;

с) функция g локально интегрируема на $[0, \infty)$, т.е. $C_g = [0, \infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (i) С учетом (1.5), из условий $\delta \geq 2$, $\rho_0 > 0$ вытекает, что $\mathbf{P}\{\forall t \geq 0, \rho_t > 0\} = 1$. Отсюда и из теоремы 2.1 следует, что условие а) равносильно локальной интегрируемости g на $(0, \infty)$, что, в свою очередь, равносильно локальной интегрируемости f на $(0, \infty)$.

(ii) С учетом (1.7)–(1.9), при $0 < \delta < 2$ или $\rho_0 = 0$ выполнено: $\forall x \geq 0, \mathbf{P}\{\exists t \geq 0: \rho_t = x\} = 1$. Применение теоремы 2.1 завершает доказательство.

Следствие 2.2. Пусть $\delta > 0$, $\rho_0 = 0$ и $d \in \mathbf{R}$. Тогда

$$d > -(2 \wedge \delta) \implies \mathbf{P} \left\{ \forall t > 0, \int_0^t \rho_s^d ds < \infty \right\} = 1,$$

$$d \leq -(2 \wedge \delta) \implies \mathbf{P} \left\{ \forall \varepsilon > 0, \int_0^\varepsilon \rho_s^d ds = \infty \right\} = 1.$$

Теорема 2.1 не дает ответа на вопрос о сходимости интеграла (1.16). Из (1.14) и (2.1) вытекает, что для ответа на этот вопрос достаточно изучить сходимость интегралов

$$\int_{T_l(\rho)-\varepsilon}^{T_l(\rho)} f(\rho_s) ds, \quad \varepsilon > 0,$$

на множестве $\{T_l(\rho) < \infty\}$ и

$$\int_{T_r(\rho)-\varepsilon}^{T_r(\rho)} f(\rho_s) ds, \quad \varepsilon > 0,$$

на множестве $\{T_r(\rho) < \infty\}$. Интегралы такого рода рассматриваются в следующей теореме.

Теорема 2.2. Пусть $\delta \geq 0$, $\rho_0 \geq 0$, $\gamma \geq 0$ и $\gamma \neq \rho_0$. Положим

$$g(x) = |x - \gamma| I(x \in [\gamma, \rho_0]) f(x),$$

где $[\gamma, \rho_0]$ — отрезок с концами γ и ρ_0 (при этом может быть $\gamma > \rho_0$). Если $\gamma \in C_g$, то

$$\mathbf{P} \left(\{T_\gamma < \infty\} \cap \left\{ \exists \varepsilon > 0: \int_{T_\gamma(\rho)-\varepsilon}^{T_\gamma(\rho)} f(\rho_s) ds < \infty \right\} \right) = \mathbf{P}\{T_\gamma < \infty\}. \quad (2.4)$$

Если $\gamma \notin C_g$, то

$$\mathbf{P} \left(\{T_\gamma < \infty\} \cap \left\{ \forall \varepsilon > 0: \int_{T_\gamma(\rho)-\varepsilon}^{T_\gamma(\rho)} f(\rho_s) ds = \infty \right\} \right) = \mathbf{P}\{T_\gamma < \infty\}. \quad (2.5)$$

С помощью теоремы 2.2 можно исследовать сходимость интеграла (1.16) на множестве $\{\xi < \infty\}$. Следующие две теоремы позволяют исследовать сходимость интеграла (1.17).

Теорема 2.3. (i) Пусть $\delta > 2$, $\rho_0 > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\rho_0}^{\infty} x f(x) dx < \infty \\ \implies \mathbf{P} \left(\{\xi = \infty\} \cap \left\{ \int_0^{\infty} f(\rho_s) ds < \infty \right\} \right) = \mathbf{P}\{\xi = \infty\}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\int_{\rho_0}^{\infty} x f(x) dx = \infty \implies \int_0^{\infty} f(\rho_s) ds = \infty \quad \text{н.н.} \quad (2.7)$$

(ii) Пусть $\delta > 2$ и $\rho_0 = 0$. Тогда

$$\int_0^\infty x f(x) dx < \infty \implies \int_0^\infty f(\rho_s) ds < \infty \quad \text{п.н.}, \quad (2.8)$$

$$\int_0^\infty x f(x) dx = \infty \implies \int_0^\infty f(\rho_s) ds = \infty \quad \text{п.н.} \quad (2.9)$$

З а м е ч а н и е. Может случиться так, что $\mathbf{P}\{\xi < \infty\} > 0$ и $\mathbf{P}\{\xi = \infty\} > 0$. Это происходит, если $\delta > 2$, $\rho_0 > 0$, а функция f локально интегрируема на $[\rho_0, \infty)$, но не является локально интегрируемой на $(0, \rho_0)$. В этом случае интеграл (1.17) расходится п.н. на множестве $\{\xi < \infty\}$, а его сходимость на множестве $\{\xi = \infty\}$ зависит от сходимости интеграла $\int_{\rho_0}^\infty x f(x) dx$.

Для случая $0 < \delta \leq 2$ картина совершенно иная.

Теорема 2.4. Пусть $0 < \delta \leq 2$, $\rho_0 \geq 0$. Тогда

$$\int_0^\infty f(x) dx > 0 \implies \int_0^\infty f(\rho_s) ds = \infty \quad \text{п.н.}$$

Из теоремы 2.3 вытекает

Следствие 2.3. Пусть $\delta > 2$, $\rho_0 > 0$ и $d \in \mathbf{R}$. Тогда

$$d < -2 \implies \int_0^\infty \rho_s^d ds < \infty \quad \text{п.н.},$$

$$d \geq -2 \implies \int_0^\infty \rho_s^d ds = \infty \quad \text{п.н.}$$

3. Доказательства теорем. Докажем предварительно несколько лемм.

Лемма 3.1. Пусть $\delta \neq 2$ и $(B_t, t \geq 0)$ — броуновское движение, выходящее из точки $x_0 \geq 0$. Положим

$$\lambda = (2 - \delta)^{-1}, \quad \sigma(x) = \lambda^2 x^{\lambda(2\delta-2)} I(x > 0),$$

$$A_t = \int_0^t \sigma(B_s) ds, \quad \tau_t = \inf\{s \geq 0: A_s > t\}.$$

(i) Предположим, что либо $\delta > 2$ и $x_0 > 0$, либо $0 < \delta < 2$ и $x_0 \geq 0$. Тогда процесс $(B_{\tau_t}, t \geq 0)$ совпадает по распределению с процессом $(\rho_t^{2-\delta}, t \geq 0)$, где ρ_t — процесс Бесселя размерности δ , выходящий из точки $\rho_0 = x_0^\lambda$.

(ii) Предположим, что $\delta = 0$. Тогда процесс $(B_{\tau_t}, t \leq T_0(B))$ совпадает по распределению с процессом $(\rho_t^2, t \leq T_0(\rho))$, где ρ_t — процесс Бесселя нулевой размерности, выходящий из точки $\rho_0 = \sqrt{x_0}$.

Лемма 3.2. Пусть $(B_t, t \geq 0)$ — броуновское движение, выходящее из точки $x_0 \in \mathbf{R}$. Положим

$$\sigma(x) = 4^{-1} \exp x, \quad A_t = \int_0^t \sigma(B_s) ds, \quad \tau_t = \inf\{s \geq 0: A_s > t\}.$$

Тогда процесс $(B_{\tau_t}, t \geq 0)$ совпадает по распределению с процессом $(2 \ln \rho_t, t \geq 0)$, где ρ_t — процесс Бесселя размерности 2, выходящий из точки $\rho_0 = \exp(x_0/2)$.

З а м е ч а н и е. В дальнейшем всегда будем использовать обозначение λ для $(2 - \delta)^{-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 3.1. Доказательство проведем только для случая $\delta > 2$. Выберем константы a и b так, что $0 < a < x_0 < b < \infty$. Положим $X_t = B_{\tau_t}$, $X_t^{ab} = X_{t \wedge T_a(X) \wedge T_b(X)}$. Тогда X_t^{ab} является непрерывным регулярным строго марковским процессом (далее будем называть такие процессы просто регулярными) на отрезке $[a, b]$ с естественной шкалой $s_1(x) = x$ и мерой скорости $m_1(dx)$, имеющей плотность $2\sigma(x)$ относительно меры Лебега (см. [14, гл. X, § 2]).

Процесс ρ_t является регулярным процессом на интервале $(0, \infty)$ с естественной шкалой $s_2(x) = -x^{2-\delta}$ и мерой скорости $m_2(dx)$, имеющей плотность $-2\lambda x^{\delta-1}$ (см. (1.3), (1.4)). Функция $F: x \mapsto x^{2-\delta}$ задает гомеоморфизм $(0, \infty)$ в себя. Процесс $Y_t = F(\rho_t)$ является регулярным процессом на $(0, \infty)$ с естественной шкалой $s_3(x) = -s_2(F^{-1}(x))$ и мерой скорости $m_3 = m_2 \circ F^{-1}$. Легко проверить, что $s_3(x) = x$, а m_3 имеет плотность $2\sigma(x)$.

Таким образом, процессы X_t^{ab} и $Y_t^{ab} = Y_{t \wedge T_a(Y) \wedge T_b(Y)}$ являются регулярными на $[a, b]$ и имеют одинаковую естественную шкалу и меру скорости. Следовательно, их распределения совпадают (см. [4, гл. 15, § 3]). Учитывая произвольность a и b и тот факт, что процесс Y_t не достигает границ интервала $(0, \infty)$ за конечное время (см. (1.5)), получаем совпадение распределений $(X_t, t \geq 0)$ и $(Y_t, t \geq 0)$.

Доказательство этой леммы для случаев $\delta < 2$, $\delta = 0$ и доказательство леммы 3.2 проводятся аналогично.

Лемма 3.3. Пусть $(B_t, t \geq 0)$ — броуновское движение, выходящее из точки $a \in \mathbf{R}$, и $b < a$. Положим

$$Z_\theta^{ab} = L_{T_b(B)}^{\theta+b}, \quad \theta \geq 0,$$

где L_t^x обозначает локальное время B_t в точке x . Тогда процесс Z_θ^{ab} обладает следующими свойствами:

(i) распределение процесса $(Z_\theta^{ab}, 0 \leq \theta \leq a-b)$ совпадает с распределением процесса $(|W_\theta|^2, 0 \leq \theta \leq a-b)$, где W_θ — двумерное броуновское движение, выходящее из нуля;

(ii) для любого $\theta \geq 0$ выполнено неравенство:

$$\mathbf{E} Z_\theta^{ab} \leq 2(a-b) \wedge 2\theta.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. (i) Данное утверждение немедленно вытекает из теоремы Рея-Найта (см. [14, гл. XI, § 2]) и свойства автомодельности броуновского движения.

(ii) Зафиксируем $\theta > a - b$. Согласно формуле (1.10), процесс $M_t = (B_t - (\theta + b))^- - \frac{1}{2} L_t^{\theta+b}$ является локальным мартингалом. Процесс $M_{t \wedge T_b(B)}$ также является локальным мартингалом и ограничен сверху. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[\theta - \frac{1}{2} Z_{\theta}^{ab} \right] &= \mathbf{E} \left[\theta - \frac{1}{2} L_{T_b(B)}^{\theta+b} \right] = \mathbf{E} M_{T_b(B)} \geq \mathbf{E} M_0 \\ &= (a - (\theta + b))^- = -a + \theta + b. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $\theta > a - b$ выполнено: $\mathbf{E} Z_{\theta}^{ab} \leq 2(a - b)$. Отсюда, с учетом (i), вытекает требуемое утверждение.

З а м е ч а н и е. В утверждении (ii) леммы 3.3 справедливо равенство. Это следует, например, из [1, формула 1.2.3.1].

Нам понадобится следующее утверждение, доказанное в статье [2].

Предложение 3.1. Пусть $-\infty \leq p < q \leq +\infty$, μ — мера на (p, q) (не обязательно конечная), $(U_t, p < t < q)$ — случайный процесс на (p, q) с измеримыми траекториями, причем $\mathbf{E} |U_t| < \infty$ для любого $t \in (p, q)$. Предположим, существуют константы $d > 1$, $c > 0$ такие, что

$$\mathbf{E} |U_t|^d \leq c (\mathbf{E} |U_t|)^d, \quad p < t < q.$$

Тогда

$$\int_p^q |U_t| \mu(dt) < \infty \text{ н.н.} \iff \int_p^q \mathbf{E} |U_t| \mu(dt) < \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2.1. Доказательство проведем для $\delta > 2$. Предположим сначала, что $\rho_0 > 0$. В силу леммы 3.1 (i), мы можем сразу считать, что $\rho_t = B_{\tau_t}^{\lambda}$, $t \geq 0$.

Пусть $\rho_0 \in C_g$. В этом случае $\xi = T_l(\rho) \wedge T_r(\rho)$, где l и r определяются формулами (2.2) и (2.3). При этом $l < \rho_0 < r$. Выберем $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ так, что $l < \alpha < \rho_0 < \beta < r$. Положим

$$\begin{aligned} a &= \alpha^{2-\delta}, & b &= \beta^{2-\delta}, \\ T_1 &= T_{\alpha}(\rho) \wedge T_{\beta}(\rho), & T_2 &= T_a(B) \wedge T_b(B). \end{aligned}$$

Используя замену переменных в интеграле Лебега–Стилтьеса и учитывая формулу (1.11), мы можем написать:

$$\begin{aligned} \int_0^{T_1} f(\rho_s) ds &= \int_0^{T_1} f(B_{\tau_s}^{\lambda}) ds = \int_0^{T_2} f(B_s^{\lambda}) dA_s \\ &= \int_0^{T_2} f(B_s^{\lambda}) \sigma(B_s) ds \stackrel{\text{н.н.}}{=} \int_0^{\infty} h(x) \sigma(x) L_{T_2}^x dx, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $h(x) = f(x^{\lambda})$, а $\sigma(x)$ была определена в формулировке леммы 3.1. Функция σ ограничена на $[a, b]$, а функция h интегрируема на $[a, b]$, что

следует из выбора α, β . Таким образом, из равенства (3.1), непрерывности L_t^x по x и свойства (1.12) вытекает, что $\mathbf{P}\{\int_0^{T_1} f(\rho_s) ds < \infty\} = 1$. В силу произвольности α и β , получаем:

$$\mathbf{P}\left\{\forall t < T_l(\rho) \wedge T_r(\rho), \int_0^t f(\rho_s) ds < \infty\right\} = 1.$$

Пусть теперь $\rho_0 > 0$, $\rho_0 \notin C_g$. Тогда $\xi = 0$. Выберем α, β так, что $0 < \alpha < \rho_0 < \beta < \infty$. Равенство (3.1) остается справедливым в тех же обозначениях, что и раньше. Из свойства (1.13) локального времени вытекает, что $L_{T_2}^{x_0} > 0$ п.н. Из условий $\rho_0 > 0$ и $\rho_0 \notin C_g$ следует, что $x_0 \notin C_h$. Таким образом, с учетом равенства (3.1), имеем $\mathbf{P}\{\int_0^{T_1} f(\rho_s) ds = \infty\} = 1$. Отсюда, с учетом произвольности α и β , получаем:

$$\rho_0 > 0, \rho_0 \notin C_g \implies \mathbf{P}\left\{\forall \varepsilon > 0, \int_0^\varepsilon f(\rho_s) ds = \infty\right\} = 1. \quad (3.2)$$

Из этого утверждения и строго марковского свойства процесса ρ_t следует, что в случае $\rho_0 > 0$, $\rho_0 \in C_g$ выполнено условие:

$$\mathbf{P}\left\{\exists \varepsilon > 0: \int_\xi^{\xi+\varepsilon} f(\rho_s) ds < \infty\right\} = 0.$$

Итак, при $\rho_0 > 0$ теорема доказана.

Перейдем к случаю $\rho_0 = 0$. Предположим, что $\rho_0 \in C_g$. Тогда $\xi = T_r(\rho)$. Выберем α, β так, что $0 < \alpha < \beta < r$. Процесс

$$\tilde{\rho}_t = \rho_{t+T_\alpha(\rho)} - \rho_{T_\alpha(\rho)}, \quad t \geq 0,$$

является процессом Бесселя размерности δ , выходящим из точки α . В силу леммы 3.1 (i), мы можем считать, что $\tilde{\rho}_t = B_{\tau_t}^\lambda$, где B_t выходит из точки $a = \alpha^{2-\delta}$. Положим $b = \beta^{2-\delta}$. При этом $0 < b < a$. Имеем:

$$\begin{aligned} \int_{T_\alpha(\rho)}^{T_\beta(\rho)} f(\rho_s) ds &= \int_0^{T_\beta(\tilde{\rho})} f(\tilde{\rho}_s) ds = \int_0^{T_b(B)} f(B_s^\lambda) \sigma(B_s) ds \\ &\stackrel{\text{п.н.}}{=} \int_b^\infty f(x^\lambda) \sigma(x) L_{T_b(B)}^x dx \\ &= \int_0^\infty h(x) \sigma(x+b) Z_x^{ab} dx, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$h(x) = f((x+b)^\lambda), \quad x > 0, \quad Z_x^{ab} = L_{T_b(B)}^{x+b}, \quad x > 0.$$

Справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty h(y) (y+b) \sigma(y+b) dy &= \lambda^2 \int_0^\infty h(y) (y+b)^{\lambda\delta} dy \\ &= \lambda^2 \int_b^\infty f(y^\lambda) y^{\lambda\delta} dy = |\lambda| \int_0^\beta x f(x) dx < \infty. \end{aligned} \quad (3.4)$$

С учетом п. (ii) леммы 3.3, из (3.4) вытекает, что

$$\mathbf{E} \left[\int_0^\infty h(x) \sigma(x+b) Z_x^{ab} dx \right] \leq 2 \int_0^\infty h(x) \sigma(x+b) x dx = \Theta < \infty,$$

где Θ зависит только от β . Отсюда и из (3.3) следует, что

$$\mathbf{E} \left[\int_{T_\alpha(\rho)}^{T_\beta(\rho)} f(\rho_s) ds \right] \leq \Theta = \Theta(\beta).$$

В силу произвольности α , имеем $\mathbf{E} [\int_0^{T_\beta(\rho)} f(\rho_s) ds] \leq \Theta < \infty$. С учетом выбора β , получаем:

$$\mathbf{P} \left\{ \forall t < T_r(\rho), \int_0^t f(\rho_s) ds < \infty \right\} = 1.$$

Из (3.2) и строго марковского свойства процесса ρ_t вытекает, что

$$\mathbf{P} \left\{ \exists t > T_r(\rho): \int_0^t f(\rho_s) ds < \infty \right\} = 0.$$

Пусть теперь $\rho_0 = 0$, $\rho_0 \notin C_g$. Тогда $\xi = 0$. Докажем, что

$$\mathbf{P} \left\{ \forall \varepsilon > 0, \int_0^\varepsilon f(\rho_s) ds = \infty \right\} = 1. \quad (3.5)$$

Если точка 0 является предельной для множества $(0, \infty) \setminus C_g$, то (3.5) вытекает из (3.2) и строго марковского свойства процесса ρ_t . Поэтому будем сразу считать, что существует $\gamma > 0$ такое, что $(0, \gamma) \in C_g$. Выберем α и β так, что $0 < \alpha < \beta < \gamma$. Равенства, аналогичные (3.4), показывают, что тогда

$$\int_0^z (x+b) h(x) \sigma(x+b) dx = \int_{(b+z)^\lambda}^\beta x f(x) dx < \infty, \quad (3.6)$$

$$\int_0^\infty (x+b) h(x) \sigma(x+b) dx = \int_0^\beta x f(x) dx = \infty, \quad (3.7)$$

где используются те же обозначения, что и в (3.4). Из (3.7) вытекает, что

$$\int_0^\infty x h(x) \sigma(x+b) dx = \infty. \quad (3.8)$$

Пусть $(W_t, t \geq 0)$ — двумерное броуновское движение, выходящее из нуля. Рассмотрим множество

$$D = \left\{ \omega: \int_0^\infty h(x) \sigma(x+b) |W_x(\omega)|^2 dx = \infty \right\}.$$

Из неравенства (3.6) следует, что D принадлежит «хвостовой» σ -алгебре $\mathcal{G} = \cap_{t>0} \sigma(W_s, s > t)$. Из закона 0-1 Блюменталья и свойства инверсии времени для броуновского движения вытекает, что $\mathbf{P}(D)$

равно либо 0, либо 1. Но из предложения 3.1 и равенства (3.8) получаем, что $P(D) > 0$. Таким образом,

$$\int_0^\infty h(x) \sigma(x+b) |W_x|^2 dx = \infty \quad \text{п.н.}$$

С учетом п. (i) леммы 3.3, имеем:

$$\int_0^{a-b} h(x) \sigma(x+b) Z_x^{ab} dx \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \infty.$$

Отсюда и из равенства (3.3) следует, что

$$\int_{T_\alpha(\rho)}^{T_\beta(\rho)} f(\rho_s) ds \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \infty.$$

С другой стороны,

$$\int_{T_\alpha(\rho)}^{T_\beta(\rho)} f(\rho_s) ds \xrightarrow[\alpha \rightarrow 0]{\text{п.н.}} \int_0^{T_\beta(\rho)} f(\rho_s) ds,$$

откуда, с учетом произвольности β , вытекает (3.5). Итак, теорема 2.1 доказана.

Доказательство теоремы 2.2 опирается на следующее утверждение (см. [14, гл. VII, § 4]).

Предложение 3.2. Пусть $(B_t, t \geq 0)$ — броуновское движение, выходящее из точки $a \in \mathbf{R}$, и $c < a$. Пусть $(V_t, t \geq 0)$ — трехмерный процесс Бесселя, выходящий из нуля. Положим

$$S_{a-c}(V) = \sup\{s \geq 0: V_s = a - c\}.$$

Тогда распределение процесса $(B_t, 0 \leq t \leq T_c(B))$ совпадает с распределением процесса

$$V_{S_{a-c}(V)-t} + c, \quad 0 \leq t \leq S_{a-c}(V).$$

Доказательство теоремы 2.2. Доказательство проведем для $\delta > 2$. С учетом (1.5), достаточно рассмотреть только $\gamma > 0$. Предположим, что $0 < \rho_0 < \gamma$. В этом случае $P\{T_\gamma(\rho) < \infty\} = 1$. Как и раньше, будем считать, что $\rho_t = B_{\tau_t}^\lambda$. Выберем α так, что $\rho_0 < \alpha < \gamma$, и положим $a = \alpha^{2-\delta}$, $c = \gamma^{2-\delta}$. Используя предложение 3.2, мы можем написать:

$$\begin{aligned} \int_{T_\alpha(\rho)}^{T_\gamma(\rho)} f(\rho_s) ds &= \int_{T_a(B)}^{T_c(B)} f(B_s^\lambda) \sigma(B_s) ds \\ &\stackrel{\text{law}}{=} \int_0^{S_{a-c}(V)} f((c+V_s)^\lambda) \sigma(c+V_s) ds, \end{aligned}$$

где V_t — трехмерный процесс Бесселя, выходящий из нуля. Применяя теорему 2.1 и учитывая, что $S_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\text{п.н.}} 0$, а $c > 0$, получаем

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon > 0: \int_{\gamma-\varepsilon}^{\gamma} (\gamma - x) f(x) dx &< \infty \\ \Rightarrow \exists \varepsilon > 0: \int_c^{c+\varepsilon} (y - c) f(y^\lambda) \sigma(y) dy &< \infty \\ \Rightarrow \mathbf{P} \left\{ \exists \varepsilon = \varepsilon(\omega) > 0: \int_0^\varepsilon f((c + V_s)^\lambda) \sigma(c + V_s) ds < \infty \right\} &= 1 \\ \Rightarrow \mathbf{P} \left\{ \exists \varepsilon = \varepsilon(\omega) > 0: \int_0^{S_\varepsilon(V)} f((c + V_s)^\lambda) \sigma(c + V_s) ds < \infty \right\} &= 1 \\ \Rightarrow \mathbf{P} \left\{ \exists \alpha = \alpha(\omega) < \gamma: \int_{T_\alpha(\rho)}^{T_\gamma(\rho)} f(\rho_s) ds < \infty \right\} &= 1 \\ \Rightarrow \mathbf{P} \left\{ \exists \varepsilon = \varepsilon(\omega) > 0: \int_{T_\gamma(\rho)-\varepsilon}^{T_\gamma(\rho)} f(\rho_s) ds < \infty \right\} &= 1. \end{aligned}$$

Тем самым, утверждение (2.4) для $\delta > 2$, $\gamma > \rho_0$ доказано. Остальные случаи, а также (2.5) рассматриваются аналогично.

Доказательство теоремы 2.3. Проведем доказательство для (2.6). Будем сразу считать, что $\rho_t = B_{\tau_t}^\lambda$, где B_t выходит из точки $x_0 = \rho_0^{2-\delta}$. Из свойства (1.7) процессов Бесселя вытекает, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} B_{\tau_t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \rho_t^{2-\delta} = 0 \quad \text{п.н.}$$

Следовательно, $\tau_\infty = T_0(B)$ п.н. Положим $\bar{f}(x) = f(x) I(x > \rho_0)$. Имеем:

$$\int_0^\infty \bar{f}(\rho_s) ds \stackrel{\text{п.н.}}{=} \int_0^{T_0(B)} \bar{f}(B_s^\lambda) \sigma(B_s) ds \stackrel{\text{law}}{=} \int_0^{S_{x_0}(V)} \bar{f}(V_s^\lambda) \sigma(V_s) ds,$$

где V_t — трехмерный процесс Бесселя, выходящий из нуля. Можно сразу считать, что $\rho_0 \in C_g$ (так как иначе $\xi = 0$). Тогда справедливы импликации:

$$\begin{aligned} \int_{\rho_0}^\infty x f(x) dx < \infty &\Rightarrow \int_0^\infty x \bar{f}(x) dx < \infty \\ &\Rightarrow \int_0^\infty y \bar{f}(y^\lambda) \sigma(y) dy < \infty \\ &\Rightarrow \mathbf{P} \left\{ \int_0^{S_{x_0}(V)} \bar{f}(V_s^\lambda) \sigma(V_s) ds < \infty \right\} = 1 \\ &\Rightarrow \mathbf{P} \left\{ \int_0^\infty \bar{f}(\rho_s) ds < \infty \right\} = 1. \end{aligned}$$

Теперь требуемое в (2.6) утверждение вытекает из того факта, что на множестве $\{\xi < \infty\}$

$$\int_0^\infty \bar{f}(\rho_s) ds < \infty \implies \int_0^\infty f(\rho_s) ds < \infty.$$

Утверждение (2.7) и п. (ii) проверяются аналогично.

Доказательство теоремы 2.4. Доказательство проведем для $0 < \delta < 2$. Используя лемму 3.1 (i), полагаем $\rho_t = B_{\tau_t}^\lambda$. Для процесса A_t , определенного в формулировке этой леммы, выполнено: $A_t \leq \int_0^t \sigma(|B_s|) ds$. Функция σ локально интегрируема на $[0, \infty)$. Согласно закону 0-1 Энгельберта-Шмидта (предложение 1.1), $\int_0^t \sigma(|B_s|) ds < \infty$ п.н. Таким образом, $\forall t > 0$, $A_t < \infty$ п.н., откуда следует, что $\tau_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \infty$. В результате приходим к равенству:

$$\int_0^\infty f(\rho_s) ds \stackrel{\text{п.н.}}{=} \int_0^\infty f(B_s^\lambda) \sigma(B_s) ds,$$

и требуемое утверждение вытекает из следующего свойства броуновского движения (см. [14, гл. X, § 3]):

$$\int_{\mathbf{R}} h(x) dx > 0 \implies \int_0^\infty h(B_s) ds = \infty \quad \text{п.н.}$$

4. Применение полученных результатов. Обозначим через P_a^δ распределение процесса Бесселя размерности $\delta \geq 0$, выходящего из точки $a \geq 0$ (т.е. P_a^δ — вероятностная мера на пространстве $C([0, \infty))$).

Основным результатом этого раздела является следующее утверждение.

Теорема 4.1. Пусть $\delta \geq 0$, $\eta \geq 0$ и $\eta \neq \delta$. Тогда

(i) при любом $a \geq 0$ меры P_a^η и P_a^δ сингулярны на σ -алгебре $\mathcal{F}_\infty = \sigma(X_s, s \geq 0)$, где X_t обозначает канонический процесс на $C([0, \infty))$;

(ii) меры P_0^η и P_0^δ сингулярны на σ -алгебре $\mathcal{F}_{0+} = \bigcap_{\epsilon > 0} \sigma(X_s, s \leq \epsilon)$.

При доказательстве теоремы 4.1 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4.1. Для процесса Бесселя размерности $\delta \geq 2$, выходящего из точки $\rho_0 \geq 0$, выполнено:

$$\frac{1}{\ln t} \int_1^t \rho_s^{-2} ds \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \frac{1}{\delta - 2}.$$

Доказательство. Предположим сначала, что $\rho_0 = 0$. В этом случае процесс ρ_t обладает следующим свойством автомодельности:

$$\forall c > 0, \quad \text{Law}\left(\frac{1}{\sqrt{c}} \rho_{ct}, t \geq 0\right) = \text{Law}(\rho_t, t \geq 0). \quad (4.1)$$

Для доказательства (4.1) достаточно заметить, что процесс $(\rho_{ct}^2/c, t \geq 0)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению (1.1) и, следовательно, совпадает по распределению с процессом $(\rho_t^2, t \geq 0)$.

Из (4.1) вытекает, что последовательность $\zeta_k = \int_{e^k}^{e^{k+1}} \rho_s^{-2} ds$, $k = 0, 1, \dots$, является стационарной. По теореме Биркгофа–Хинчина,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \zeta_k = \frac{1}{n} \int_1^{e^n} \rho_s^{-2} ds \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \mathbf{E}[\zeta_1 | \mathcal{G}],$$

где $\mathcal{G}$ — σ -алгебра инвариантных множеств. При этом любое множество из $\mathcal{G}$ принадлежит σ -алгебре $\cap_{n \in \mathbf{N}} \sigma(\zeta_n, \zeta_{n+1}, \dots)$, которая, в свою очередь, вложена в σ -алгебру $\mathcal{X} = \cap_{t > 0} \sigma(\rho_s, s \geq t)$.

Докажем, что σ -алгебра $\mathcal{X}$ является тривиальной, т.е. любое множество из этой σ -алгебры имеет меру 0 или 1. Процесс Бесселя является феллеровским (см. [14, гл. XI, § 1]), и, следовательно, для него выполнен закон 0–1 Блюменталья. Именно, σ -алгебра $\mathcal{F}_{0+}^\rho = \cap_{\varepsilon > 0} \sigma(\rho_s, s \leq \varepsilon)$ является тривиальной. Кроме того, для процесса Бесселя, выходящего из нуля, имеет место следующее свойство инверсии времени (см. [15]):

$$\text{Law}(t\rho_{1/t}, t > 0) = \text{Law}(\rho_t, t > 0). \quad (4.2)$$

Из тривиальности $\mathcal{F}_{0+}^\rho$ и (4.2) вытекает, что σ -алгебра $\mathcal{X}$ является тривиальной.

Итак,

$$\frac{1}{n} \int_1^{e^n} \rho_s^{-2} ds \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \mathbf{E} \left[\int_1^e \rho_s^{-2} ds \right].$$

В силу неотрицательности процесса ρ_t^{-2} , получаем:

$$\frac{1}{\ln t} \int_1^t \rho_s^{-2} ds \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \mathbf{E} \left[\int_1^e \rho_s^{-2} ds \right]. \quad (4.3)$$

Для вычисления правой части в (4.3) воспользуемся тем фактом, что распределение случайной величины ρ_t^2 имеет следующую плотность (см. [14, гл. XI, § 1]): $p(x) = (2t)^{-\delta/2} \Gamma(\delta/2)^{-1} y^{\delta/2-1} \exp(-y/2t)$, где Γ обозначает гамма-функцию Эйлера. Простые выкладки показывают, что

$$\mathbf{E} \left[\int_1^e \rho_s^{-2} ds \right] = \frac{1}{\delta - 2}.$$

Итак, при $\rho_0 = 0$ лемма доказана.

Для процесса Бесселя, выходящего из нуля, и произвольного $a > 0$ имеем: $T_a(\rho) < \infty$ п.н. (см. (1.7), (1.8)). В силу доказанного выше,

$$\frac{1}{\ln t} \int_1^t \rho_{T_a(\rho)+s}^{-2} ds = \frac{1}{\ln t} \int_{T_a(\rho)+1}^{T_a(\rho)+t} \rho_s^{-2} ds \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \frac{1}{\delta - 2}. \quad (4.4)$$

Но, согласно строго марковскому свойству,

$$\text{Law}(\rho_{T_a(\rho)+t}, t \geq 0) = \text{Law}(\tilde{\rho}_t, t \geq 0),$$

где $\tilde{\rho}_t$ — процесс Бесселя той же размерности δ , выходящий из точки a . Формула (4.4) доказывает лемму в общем случае.

Доказательство теоремы 4.1. (i) Проведем доказательство для $a > 0$ (при $a = 0$ п. (i) вытекает из (ii)). Будем для определенности считать, что $\delta < \eta$.

При $\delta = 0$ утверждение очевидно, поскольку точка 0 является поглощающей для процесса Бесселя нулевой размерности.

Предположим теперь, что $0 < \delta < \eta < 2$. Тогда $P_a^\delta\{T_0(X) < \infty\} = P_a^\eta\{T_0(X) < \infty\} = 1$ (см. (1.6)). Из следствия 2.2 и строго марковского свойства процессов Бесселя вытекает, что при $-\eta < d < -\delta$ выполнено:

$$\int_{T_0(X)}^{T_0(X)+1} X_s^d ds = \infty \quad P_a^\delta\text{-п.н.}, \quad (4.5)$$

$$\int_{T_0(X)}^{T_0(X)+1} X_s^d ds < \infty \quad P_a^\eta\text{-п.н.} \quad (4.6)$$

Отсюда получаем сингулярность P_a^η и P_a^δ на $\mathcal{F}_\infty$.

При $0 < \delta < 2 \leq \eta$ требуемое утверждение вытекает из того, что $P_a^\delta\{T_0(X) < \infty\} = 1$, а $P_a^\eta\{T_0(X) < \infty\} = 0$.

При $2 \leq \delta < \eta$ достаточно воспользоваться леммой 4.1.

(ii) При $\delta = 0$ утверждение очевидно.

При $0 < \delta < 2$, $\delta < \eta$, выберем d так, что $-(\eta \wedge 2) < d < -\delta$. Тогда требуемое утверждение вытекает из (4.5), (4.6) (в этом случае $T_0(X) = 0$).

Остается рассмотреть случай $2 \leq \delta < \eta$. Пусть ρ_t — процесс Бесселя размерности δ . Положим $\tilde{\rho}_t = t\rho_{1/t}$. В силу свойства инверсии времени (см. (4.2)), процесс $(\tilde{\rho}_t, t \geq 0)$ совпадает по распределению с $(\rho_t, t \geq 0)$. По лемме 4.1 для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\frac{1}{\ln t} \int_{1/t}^{1/n} \rho_s^{-2} ds = \frac{1}{\ln t} \int_n^t s^{-2} \rho_{1/s}^{-2} ds = \frac{1}{\ln t} \int_n^t \tilde{\rho}_s^{-2} ds \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \frac{1}{\delta - 2}.$$

Итак, для множества

$$A_n = \left\{ X \in C([0, \infty)): \frac{1}{\ln t} \int_{1/t}^{1/n} X_s^{-2} ds \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\delta - 2} \right\}$$

выполнено: $P_0^\delta(A_n) = 1$. Аналогично, $P_0^\eta(B_n) = 1$ для множества

$$B_n = \left\{ X \in C([0, \infty)): \frac{1}{\ln t} \int_{1/t}^{1/n} X_s^{-2} ds \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\eta - 2} \right\}.$$

Следовательно, для $A = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$, $B = \liminf_{n \rightarrow \infty} B_n$ имеем: $P_0^\delta(A) = 1$, $P_0^\eta(B) = 1$. При этом множества A и B принадлежат σ -алгебре $\mathcal{F}_{0+}$ и $A \cap B = \emptyset$. Это означает сингулярность мер P_0^δ и P_0^η на $\mathcal{F}_{0+}$. Итак, теорема 4.1 полностью доказана.

З а м е ч а н и я. (i) Если $a > 0$ и $\delta \wedge \eta \geq 2$, то меры P_a^η и P_a^δ эквивалентны на σ -алгебре $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$.

(ii) Если $a > 0$ и $\delta \wedge \eta < 2$, то меры P_a^η и P_a^δ не являются ни эквивалентными, ни сингулярными на $\mathcal{F}_t, t > 0$.

Автор благодарит профессора А. Н. Ширяева за оказанное внимание, поддержку и полезные рекомендации. Автор также благодарен профессору М. Йору и профессору Х.Ю. Энгельберту за ценные замечания, позволившие улучшить качество работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Borodin A. N., Salminen P. Handbook of Brownian Motion — Facts and Formulae. Basel: Birkhäuser, 1996, 462 p.
2. Csörgő M., Horwath L., Shao Q.-M. Convergence of integrals of uniform empirical and quantile processes. — Stochastic Process. Appl., 1993, v. 45, № 2, p. 278–294.
3. Дубинс Л. Е., Шенн Л. А., Ширяев А. Н. Оптимальные правила остановки и максимальные неравенства для процессов Бесселя. — Теория вероятн. и ее примен., 1993, т. 38, в. 2, с. 288–330.
4. Дынкин Е. Б. Марковские процессы. М.: Физматгиз, 1963, 859 с.
5. Engelbert H. J., Schmidt W. On the behaviour of certain functionals of the Wiener process and applications to stochastic differential equations. — Lecture Notes in Control and Inform. Sci., 1981, v. 36, p. 47–55.
6. Engelbert H. J., Schmidt W. On one-dimensional stochastic differential equations with generalized drift. — Lecture Notes in Control and Inform. Sci., 1985, v. 69, p. 143–155.
7. Engelbert H. J., Schmidt W. 0–1-Gesetze für die Konvergenz von Integralfunktionalen gewisser Semimartingale. — Math. Nachr., 1985, v. 123, p. 177–185.
8. Engelbert H. J., Schmidt W. On the behaviour of certain Bessel functionals. An application to a class of stochastic differential equations. — Math. Nachr., 1987, v. 131, p. 219–234.
9. Engelbert H. J., Senf T. On functionals of a Wiener process with drift and exponential local martingales. — Math. Res., 1991, v. 61, p. 45–58.
10. Жакоб Ж., Ширяев А. Н. Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 1. М.: Физматлит, 1994, 542 с.
11. Karatzas I., Shreve S. E. Brownian motion and stochastic calculus. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1988, 470 p.
12. Pitman J. W., Yor M. Bessel processes and infinitely divisible laws. — Lecture Notes in Math., 1981, v. 851, p. 285–370.
13. Pitman J. W., Yor M. Some divergent integrals of Brownian motion. — Adv. Appl. Probab., 1986, v. 18, p. 109–116.
14. Revuz D., Yor M. Continuous martingales and Brownian motion. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1994, 560 p.
15. Shiga T., Watanabe S. Bessel diffusions as a one-parameter family of diffusion processes. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1973, v. 27, p. 37–46.
16. Xue X.-X. A zero-one law for integral functionals of Bessel processes. — Lecture Notes in Math., 1990, v. 1426, p. 137–153.

Поступила в редакцию
21.XI.1998