Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Сенатов, О построении асимптотических разложений высокой точности, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2015, том 60, выпуск 2, 290–310

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4620>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 13:16:22

© 2015 г.

СЕНАТОВ В. В.*

**О ПОСТРОЕНИИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ
ВЫСОКОЙ ТОЧНОСТИ**

Предложены новые асимптотические разложения в центральной предельной теореме, позволяющие аппроксимировать распределения нормированных сумм независимых случайных величин с точностью, которая на несколько порядков превосходит точность оценки теоремы Берри–Эссеена.

Ключевые слова и фразы: асимптотические разложения, центральная предельная теорема, точность аппроксимации, теорема Берри–Эссеена.

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним и единичной дисперсией. Пусть P — общее распределение этих случайных величин, P_n — распределение нормированной суммы $(X_1 + \dots + X_n)n^{-1/2}$, Φ — стандартный нормальный закон. В силу центральной предельной теоремы (ЦПТ) при больших n распределение P_n близко к Φ . В связи с этим возникает задача об оценке точности аппроксимации распределений P_n распределением Φ — одна из традиционных задач теории вероятностей. Далее нам понадобятся числовые характеристики распределения P , его моменты $\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k P(dx)$ и абсолютные моменты $\beta_k = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k P(dx)$, $k = 1, 2, \dots$, по определению, $\alpha_0 = \beta_0 = 1$. Говоря о моментах k -го порядка, мы всегда предполагаем, что они существуют.

Самым известным утверждением о точности аппроксимации в ЦПТ является теорема Берри–Эссеена, которая гарантирует, что при всех действительных x

$$|F_n(x) - G(x)| \leq c \frac{\beta_3}{\sqrt{n}},$$

где F_n — функция распределения меры P_n , G — функция распределения стандартного нормального закона, c — постоянная. Задача о верхней оценке привлекала внимание десятков исследователей на протяжении последних семидесяти лет и недавно она получила решение, близкое к

*Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, Москва, Россия; e-mail: v.senatov@yandex.ru

окончательному (см. [6]). Нижняя оценка c ,

$$c \geq \frac{3 + \sqrt{10}}{6\sqrt{2\pi}} = 0.4097 \dots,$$

была получена К.-Г. Эссееном в 1956 г. Так как в силу неравенства Ляпунова $\beta_3 \geq 1$ для любого распределения P с нулевым средним и единичной дисперсией, из нижней оценки c следует, что теорема Берри–Эссеена может гарантировать точность 0.001 аппроксимации F_n функцией G лишь при $n > 160000$, при n порядка нескольких десятков утверждение теоремы Берри–Эссеена практически бессодержательно. Этот давно и хорошо известный факт привел к развитию нескольких направлений в исследовании точности аппроксимации в ЦПТ, среди которых — изучение асимптотических разложений. Справедливости ради стоит отметить, что асимптотические разложения в ЦПТ появились задолго до теоремы Берри–Эссеена, правда, оценки точности этих аппроксимаций, за двумя исключениями, связанными с результатами Я. В. Успенского (их формулировки можно найти в [1], [3, с. 234], [4, с. 95]), долгое время нельзя было доводить до численных значений.

Нас будут интересовать асимптотические разложения в локальных формах ЦПТ. Существуют две локальные формы ЦПТ, одна из них связана с плотностями распределений P_n (если они существуют), другая — с величинами скачков функций распределения $F_n(x)$ в их точках разрыва в случае, когда распределение P решетчато.

Говоря о разложениях для плотностей, мы всегда предполагаем, что для некоторого числа $\nu > 0$ выполнено условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^\nu dt < \infty, \quad (1)$$

где f — характеристическая функция распределения P . Выполнение этого условия гарантирует при $n \geq \nu$ существование непрерывной плотности $p_n(x)$ распределения P_n , которую можно вычислять по формуле обращения

$$p_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt, \quad -\infty < x < \infty, \quad (2)$$

и справедливость локальной формы ЦПТ: $p_n(x) \rightarrow \varphi(x)$, $n \rightarrow \infty$, для всех действительных x . Здесь и далее $\varphi(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ — плотность стандартного нормального закона.

Из существования плотности p_n для некоторого n следует, что $f(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, и число

$$\alpha(T) = \max \{|f(t)|: |t| \geq T\},$$

которое нам понадобится далее, строго меньше единицы для любого $T > 0$.

Говоря о разложениях для величин скачков решетчатых функций распределения, мы всегда предполагаем, что распределение P сосредоточено на некотором множестве, принадлежащем решетке $D = \{a + kh: k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, где a — некоторое действительное число, а $h > 0$ — шаг распределения P , т.е. максимальное число, которое можно использовать в определении множества D . В этом случае для любого натурального n распределение P_n сосредоточено на некотором множестве, принадлежащем решетке $D_n = \{a_n + kh/\sqrt{n}: k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, где a_n — произвольная точка множества D_n , например, $a_n = a\sqrt{n}$. Формулу обращения для решетчатых распределений можно записать в виде

$$\frac{\sqrt{n}}{h} p_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi\sqrt{n}/h}^{\pi\sqrt{n}/h} e^{-itx} f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt, \quad x \in D_n, \quad (3)$$

где мы обозначили $p_n(x)$ скачок функции распределения $F_n(x)$ в точке $x \in D_n$. Совпадение этого обозначения с аналогичным обозначением для плотности не должно привести к недоразумениям. В случае решетчатого распределения P число

$$\alpha(T) = \max \{|f(t)|: T \leq |t| \leq \pi/h\},$$

которое нам понадобится далее, также строго меньше единицы для любого $0 < T < \pi/h$. Совпадение этого обозначения с аналогичным в случае гладких распределений также не должно вызвать недоразумений.

Правые части формул обращения (2) и (3) отличаются лишь областями интегрирования. Это приводит к тому, что главные части асимптотических разложений для функций $p_n(x)$, $-\infty < x < \infty$, в гладком случае, и $\sqrt{n}p_n(x)/h$, $x \in D_n$, в случае решетчатых распределений совпадают. Это следует и из результатов К.-Г. Эссеена и Б. В. Гнеденко, см., например, [2], теоремы 13 и 15 параграфа 3 главы VII и комментариев к этой главе. Оценки остаточных частей разложений для гладкого и решетчатого случаев отличаются лишь в одном слагаемом, убывающем при росте n экспоненциально быстро (об этом говорится ниже).

Мы называем главными частями разложений суммы величин, выписанных в явном виде и не содержащих неизвестных функций или постоянных. Остаточными частями разложений мы называем суммы величин, для которых указаны лишь их явные оценки. Если нам потребуется записать сумму главной и остаточной частей разложения, мы в слагаемые остаточной части будем добавлять множители γ . Этим символом обозначаются различные (даже в пределах одной и той же формулы) функции, абсолютные величины которых не превосходят единицы. Равенство $u(t) = \gamma U(t)$, где $\gamma = \gamma(t)$, эквивалентно неравенству $|u(t)| \leq |U(t)|$.

В этой работе нам понадобятся численные иллюстрации, одно из назначений которых — показать, зачем мы будем модифицировать те или иные разложения. Для этого мы будем использовать симметричное распределение Бернулли (СРБ), сосредоточенное в двух точках -1 и 1 которым приписаны вероятности 0.5 . Для СРБ все моменты четных порядков равны единице, оно является решетчатым и его шаг равен двум.

В [5] были получены новые общие результаты об асимптотических разложениях в локальных формах ЦПТ и приведены три следствия этих результатов для распределений P с конечными моментами четвертого, пятого и шестого порядков. Для определенности мы будем говорить о разложениях для плотностей. Для распределений P с конечным моментом шестого порядка главная часть разложения плотности $p_n(x)$, $n \geq \nu$, содержит, помимо плотности $\varphi(x)$ стандартного нормального закона, произведения $H_l(x)\varphi(x)$, где $H_l(x)$, $l = 3, 4, \dots, 12$, $l \neq 11$ — многочлены Чебышёва–Эрмита. Коэффициенты при этих функциях зависят от n и от моментов P . Всего в главной части используется 11 комбинаций моментных характеристик распределения P , из которых 7 связаны с третьим моментом. Оценка остаточной части этого разложения содержит 25 слагаемых, связанных со своими комбинациями моментных характеристик распределения P , из которых 16 связаны с третьим моментом и еще 4 с другими моментами P нечетных порядков. Для того, чтобы сделать эти и приводимые ниже разложения сколь-нибудь обозримыми, мы далее рассматриваем только симметричные распределения. В этом случае упомянутое следствие для распределений с конечным моментом шестого порядка имеет следующий вид.

Если для распределения P выполнено условие (1), то в случае $\beta_6 < \infty$ при $n \geq \max(\nu, 5)$ плотность $p_n(x)$ при всех действительных x допускает представление

$$p_n(x) = \varphi(x) + \frac{\theta_4}{4!n} H_4(x)\varphi(x) + \frac{\theta_6^{(4)}}{6!n^2} H_6(x)\varphi(x) + \frac{n-1}{2n} \frac{1}{n^2} \left(\frac{\theta_4}{4!}\right)^2 H_8(x)\varphi(x) + R + K, \quad (4)$$

где

$$|R| \leq \frac{\beta_6}{6!} \frac{B_{6,n}}{n^2} + \frac{\|\theta_8^{(4)}\|}{8!} \frac{B_{8,n}}{n^3} + \frac{1}{2} \left(\frac{|\theta_4|}{4!} \frac{\|\theta_6^{(4)}\|}{6!} + \frac{\beta_4 + 3}{4!} \frac{|\theta_6^{(4)}|}{6!} \right) \frac{B_{10,n}}{n^3} + \frac{1}{6} \left(\frac{\theta_4}{4!} \right)^2 \frac{\beta_4 + 3}{4!} \frac{B_{12,n}}{n^3}. \quad (5)$$

О величине K которая при росте n убывает экспоненциально быстро, мы скажем ниже.

Утверждения, как сформулированные выше, так и те, что приведены ниже, справедливы и для решетчатых распределений. В этом случае в формулировках утверждений нужно снять условие (1), условия $n \geq \max(\nu, k)$ следует заменить на $n \geq k$, слова «плотность $p_n(x)$ » нужно заменить на «величина $\sqrt{n}p_n(x)/h$ », слова «при всех действительных x » нужно заменить на «при всех $x \in D_n$ », в левых частях равенств заменить $p_n(x)$ на величину $\sqrt{n}p_n(x)/h$ и заменить одно слагаемое из тех, что составляют величину K , на другое, о чем пойдет речь ниже. Далее для решетчатых распределений мы будем величину $\sqrt{n}p_n(x)/h$ обозначать $\tilde{p}_n(x)$. Из разложений для плотностей довольно просто получить также разложения для функций распределения (см., например, [4, гл. 4, § 15]).

В (4) и далее $H_l(x) = (-1)^l \varphi^{(l)}(x)/\varphi(x)$, $l = 0, 1, \dots$, — многочлены Чебышёва–Эрмита. Первые пять многочленов Чебышёва–Эрмита суть

$$\begin{aligned} H_0(x) &\equiv 1, & H_1(x) &= x, & H_2(x) &= x^2 - 1, \\ H_3(x) &= x^3 - 3x, & H_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3. \end{aligned}$$

Числа

$$\theta_l = \int_{-\infty}^{\infty} H_l(x) P(dx),$$

которые мы называем моментами Чебышёва–Эрмита распределения P , можно вычислять по формуле

$$\frac{\theta_l}{l!} = \sum_{j=0}^{[l/2]} \frac{\alpha_{l-2j}}{(l-2j)!} \frac{(-1)^j}{2^j \cdot j!}, \quad l = 0, 1, \dots$$

Для любого распределения P величина $\theta_0 = 1$. Для стандартного нормального закона все моменты Чебышёва–Эрмита, начиная с первого, равны нулю. Для распределений с нулевым средним и единичной дисперсией $\theta_1 = \theta_2 = 0$, $\theta_3 = \alpha_3$, $\theta_4 = \alpha_4 - 3$, в частности, для СРБ $\theta_4 = -2$. Для симметричных распределений могут быть отличны от нуля моменты Чебышёва–Эрмита только четных порядков и предыдущая формула приобретает вид

$$\frac{\theta_{2l}}{(2l)!} = \sum_{j=0}^l \frac{\alpha_{2l-2j}}{(2l-2j)!} \frac{(-1)^j}{2^j \cdot j!}, \quad l = 0, 1, \dots$$

Числа $\theta_l^{(r)}$, которые мы будем называть квазимоментами Чебышёва–Эрмита, вычисляются по той же формуле, что и θ_l , но в сумме, указанной выше, слагаемые, связанные со степенными моментами порядков больших r , опускаются. В частности, для СРБ $\theta_6^{(4)}/6! = (-\alpha_4 + 2)/48 = 1/48$ и $\theta_8^{(4)}/8! = -1/384$. Числа $\|\theta_l\|$ и $\|\theta_l^{(r)}\|$ при четных l вычисляются по

тем же формулам, что θ_l и $\theta_l^{(r)}$, в которых $(-1)^j$ заменяется на 1. В частности, для СРБ $\|\theta_6^{(4)}\|/6! = 5/48$ и $\|\theta_8^{(4)}\|/8! = 7/384$.

Разумеется, всюду вместо β_{2l} , l — натуральное, можно писать α_{2l} , но нам удобно использовать для старшего из моментов обозначение абсолютного момента.

Числа $B_{l,n}$ определяются равенствами

$$B_{l,n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} |t|^l \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) dt, \quad l = 4, 5, \dots,$$

где $\mu(t) = \max\{|f(t)|, e^{-t^2/2}\}$. На параметр T , выбор которого находится в нашем распоряжении, в случае гладких распределений никаких формальных ограничений не налагается, однако для конкретных распределений ограничения могут появиться, если мы захотим получить хорошие оценки для $B_{l,n}$. В случае решетчатых распределений в качестве T можно брать любое положительное число, не превосходящее π/h . В обоих случаях для распределений с конечным четвертым моментом существует значение T , при котором $B_{l,n} \rightarrow B_l$, $n \rightarrow \infty$, где B_l — абсолютный момент l -го порядка стандартного нормального закона, деленный на $\sqrt{2\pi}$ (подробнее см. в [5]). Далее мы считаем, что параметр T выбран именно таким образом.

В разложениях, как в приведенном выше, так и в тех, что будут получены далее, величина K является суммой слагаемых, первое из которых не превосходит

$$\frac{\sqrt{n}}{\pi} \alpha^{n-\nu}(T) \int_T^\infty |f(t)|^\nu dt$$

в случае гладких распределений и

$$\frac{\sqrt{n}}{\pi} \alpha^n(T) \left(\frac{\pi}{h} - T \right)$$

в случае решетчатых распределений. Определения чисел $\alpha(T)$ в этих случаях несколько отличаются друг от друга, но в обоих случаях это слагаемое при росте n стремится к нулю экспоненциально быстро. Второе слагаемое в K не превосходит величины

$$\frac{1}{\pi T \sqrt{n}} e^{-T^2 n/2},$$

которая также при росте n стремится к нулю экспоненциально быстро. Оценки остальных слагаемых из K получаются из главных частей разложений заменой множителей перед произведениями $H_l(x)\varphi(x)$, $l \geq 4$, их абсолютными значениями, а самих произведений — величинами

$$\frac{1}{\pi} \int_{T\sqrt{n}}^\infty t^l e^{-t^2/2} dt,$$

которые при росте n также стремятся к нулю экспоненциально быстро.

В оценках остаточных частей разложений, которые рассматриваются в этой работе, ровно одно слагаемое, первое, имеет правильный порядок убывания при росте n . Будем называть это слагаемое «основным», а остальные слагаемые, они при росте n стремятся к нулю быстрее «основного», будем называть «вспомогательными». Причина, по которой мы здесь используем кавычки, станет ясна из дальнейшего. «Основные» слагаемые в оценках остаточных частей разложений, как приведенного выше, так и тех, что будут получены далее в этой работе, неумлучшаемы в том смысле, что если их умножить на произвольную постоянную, которая меньше единицы (и сколь угодно близка к ней), то оценка станет неверной, начиная с некоторого n . Об этом говорится в [5].

Оценки остаточных частей разложений, которые будут получены далее, довольно громоздки, они являются суммами многих слагаемых. Для того чтобы получить представление о вкладах этих слагаемых в сумму, проще всего вычислить их для какого-либо конкретного распределения. В качестве такого распределения мы возьмем СРБ, характеристическая функция которого $f(t) = \cos t$. На интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ справедливо неравенство $0 < \cos t \leq e^{-t^2/2}$. Для СРБ в качестве величины T можно взять число $\pi/2$. При таком выборе T слагаемое в оценке K , связанное с $\alpha(T)$, станет равным нулю, а в оценках слагаемых, составляющих величину K , появятся множители $e^{-\pi^2 n/8}$, что сделает их пренебрежимо малыми по сравнению со слагаемыми, входящими в оценки величин R . На интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ функция $\mu(t) = e^{-t^2/2}$, поэтому

$$B_{l,n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi\sqrt{n}/2}^{\pi\sqrt{n}/2} |t|^l \exp\left(- (n-1) \frac{t^2}{2n}\right) dt \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{(l+1)/2} B_l.$$

Мы получим полезную информацию о точности аппроксимации, которую гарантируют асимптотические разложения, если вычислим лишь приближенные значения оценок их остаточных частей. Такие оценки мы будем получать, заменяя величины $B_{l,n}$ их асимптотическими значениями B_l . Так полученные оценки величин R можно назвать прикидочными. Поскольку мы, как правило, будем вычислять только прикидочные оценки, слово «прикидочные» будет обычно опускаться, это не должно привести к недоразумениям. Величинами K для СРБ мы будем пренебрегать.

Главная часть разложения (4) для $\tilde{p}_n(x)$, $x \in D_n$, для СРБ есть

$$\varphi(x) \left(1 - \frac{1}{12n} H_4(x) + \frac{1}{48n^2} H_6(x) + \frac{n-1}{2n} \frac{1}{144n^2} H_8(x) \right).$$

Вычисляя оценку остаточной части этого разложения, мы получим ве-

личину, которую, несколько загробляя, можно записать в виде

$$\frac{\beta_6}{120n^2} + \frac{0.77}{n^3} + \frac{2.3}{n^3} + \frac{0.81}{n^3} = \frac{\beta_6}{120n^2} + \frac{3.88}{n^3} \approx \frac{1}{120n^2} \left(1 + \frac{466}{n}\right).$$

Мы видим, что при n порядка нескольких десятков и даже немногих сотен в оценке остаточной части указанного разложения «вспомогательные» слагаемые играют главную роль. Это нас и не устраивает.

Далее эта оценка будет уточняться, будут получены другие разложения, в оценках остаточных частей которых соотношения между «основным» и суммой «вспомогательных» слагаемых лучше, чем в указанной. Отметим, однако, что при $n = 1600$, т.е. когда оценка теоремы Берри–Эссеена еще не может гарантировать ни для какого распределения точность аппроксимации, лучшую 10^{-2} , для СРБ правая часть (5), только что вычисленная, не превосходит $4.3 \cdot 10^{-9}$. Столь большие значения n для нас не очень интересны, нас интересуют n порядка нескольких десятков. Нас не смущает сравнение точности аппроксимаций в локальной и интегральной формах ЦПТ, поскольку если для данного распределения справедлива ЦПТ в локальной форме, то в ней оценки точности аппроксимации оказываются несколько хуже, чем можно получить в интегральной форме ЦПТ.

Стоит отметить, что при построении оценки (5) рассуждения в некоторых местах были достаточно грубыми, поэтому грубой оказалась и оценка. Так, при оценке разности характеристических функций $f(t/\sqrt{n})$ и $g(t/\sqrt{n})$ (g — характеристическая функция стандартного нормального закона) использовалось почти очевидное неравенство

$$\left| f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right| \leq \frac{\beta_4 + 3}{4!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^4$$

для распределений с конечным четвертым и нулевым третьим моментом, в то время как для распределений с конечным шестым моментом и нулевыми моментами третьего и пятого порядков справедливо более точное неравенство

$$\left| f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right| \leq \frac{\theta_4}{4!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^4 + \left(\frac{\beta_6}{6!} + \frac{1}{48}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^6$$

(об этом говорится в доказательстве леммы 2). Использование последнего неравенства позволяет для СРБ в оценках остаточных частей в два раза уменьшить значения слагаемых, содержащих множитель $\beta_4 + 3$, правда, при этом в оценках появятся дополнительные слагаемые, убывающие при росте n быстрее остальных. Еще одна причина грубости оценок связана с тем, что в суммах, составляющих величины $\|\theta_l^{(r)}\|$, теряется чередование знаков слагаемых, которое есть в суммах, дающих

величины $\theta_l^{(r)}$. Это чередование знаков можно отчасти восстановить, заменив в оценках $\|\theta_l^{(r)}\|$ на сумму $|\theta_l^{(r)}|$ и слагаемого, связанного с $\|\theta_{l+2}^{(r)}\|$. Под знаком модуля чередование знаков сохраняется и величина $|\theta_l^{(r)}|$ может оказаться существенно меньше $\|\theta_l^{(r)}\|$ (и мы это только что видели, для СРБ величина $\|\theta_6^{(4)}\|$ в пять раз больше $|\theta_6^{(4)}|$). В оценке, правда, появится величина, связанная с $\|\theta_{l+2}^{(r)}\|$, но она будет убывать при росте n быстрее той, что связана с $|\theta_l^{(r)}|$.

Учет сказанного выше приводит к следующему утверждению.

Теорема 1. *Для любого симметричного распределения P с нулевым средним и единичной дисперсией, такого, что для некоторого $\nu > 0$ выполнено условие (1), при конечности момента β_6 для всех действительных x и всех $n \geq \max(\nu, 3)$ плотность $p_n(x)$ допускает представление (4), в котором для величины R справедлива оценка*

$$|R| \leq \frac{\beta_6}{6!} \frac{B_{6,n}}{n^2} + \frac{1}{2} \frac{|\theta_4|}{4!} \frac{\beta_6}{6!} \frac{B_{10,n}}{n^3} + \frac{1}{2} \frac{|\theta_6^{(4)}|}{6!} \left(\frac{\beta_6}{6!} + \frac{1}{48} \right) \frac{B_{12,n}}{n^4} + \frac{1}{6} \frac{|\theta_4|}{4!} \left(\frac{\beta_6}{6!} + \frac{1}{48} \right) \frac{B_{14,n}}{n^4} + \frac{|\theta_8^{(4)}|}{8!} \frac{B_{8,n}}{n^3} + \frac{|\theta_4|}{4!} \frac{|\theta_6^{(4)}|}{6!} \frac{B_{10,n}}{n^3} + \frac{1}{6} \frac{|\theta_4|}{4!} \frac{B_{12,n}}{n^3} + \frac{\|\theta_{10}^{(4)}\|}{10!} \frac{B_{10,n}}{n^4} + \frac{1}{2} \frac{|\theta_4|}{4!} \frac{\|\theta_8^{(4)}\|}{8!} \frac{B_{12,n}}{n^4}. \quad (6)$$

Это же представление справедливо для функций $\tilde{p}_n(x)$, $x \in D_n$, в случае решетчатых распределений. В случае решетчатых распределений условие (1) снимается и приведенное выше ограничение на n следует заменить на $n \geq 3$.

Доказательство этого утверждения приведено ниже. В оценке (6) сначала выписаны слагаемые, связанные с β_6 , затем — слагаемые, убывающие при росте n как n^{-3} и не связанные с β_6 (эту группу слагаемых мы будем называть основной), а затем — остальные слагаемые.

Мы уже приводили для СРБ значения всех величин из правой части последнего неравенства, за исключением $\|\theta_{10}^{(4)}\|$. Легко проверить, что для СРБ $\|\theta_{10}^{(4)}\|/10! = 7/2880$.

Вычисление для СРБ части оценки (6), связанной с β_6 , приводит к величине, не превосходящей

$$\frac{\beta_6}{120n^2} + \frac{0.022}{n^3} + \frac{0.97}{n^4} + \frac{1.4}{n^4} = \frac{1}{120n^2} \left(1 + \frac{2.64}{n} + \frac{285}{n^2} \right).$$

Вычисление части оценки правой части (6), связанной с основной группой слагаемых, приводят к величине, приближенно равной

$$\frac{0.11}{n^3} + \frac{0.66}{n^3} + \frac{0.4}{n^3} = \frac{1.17}{n^3} = \frac{1}{120n^2} \cdot \frac{140.4}{n}.$$

Вычисление части оценки правой части (6), связанной с оставшимися слагаемыми, приводит к величине, не превосходящей

$$\frac{0.92}{n^4} + \frac{3.16}{n^4} = \frac{4.08}{n^4} = \frac{1}{120n^2} \cdot \frac{490}{n^2}.$$

Мы видим, что для СРБ при n порядка 100 основная группа слагаемых вносит довольно существенный вклад в оценку. Единственный способ убрать ее из оценки остаточной части разложения — «перевести» в главную часть, при этом, правда, в оценке остаточной части появятся дополнительные слагаемые, убывающие при росте n быстрее, чем n^{-3} . Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Для любого симметричного распределения P с нулевым средним и единичной дисперсией, такого, что для некоторого $\nu > 0$ выполнено условие (1), при конечности момента β_6 для всех действительных x и всех $n \geq \max(\nu, 4)$ плотность $p_n(x)$ допускает представление

$$\begin{aligned} p_n(x) = & \varphi(x) + \frac{\theta_4}{4!n} H_4(x)\varphi(x) + \frac{\theta_6^{(4)}}{6!n^2} H_6(x)\varphi(x) \\ & + \frac{n-1}{2n} \frac{1}{n^2} \left(\frac{\theta_4}{4!}\right)^2 H_8(x)\varphi(x) + \frac{\theta_8^{(4)}}{8!n^3} H_8(x)\varphi(x) \\ & + \frac{n-1}{n} \frac{1}{n^3} \frac{\theta_4}{4!} \frac{\theta_6^{(4)}}{6!} H_{10}(x)\varphi(x) \\ & + \frac{(n-1)(n-2)}{6n^2} \frac{1}{n^3} \left(\frac{\theta_4}{4!}\right)^3 H_{12}(x)\varphi(x) + R + K, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} |R| \leq & \frac{\beta_6}{6!} \frac{B_{6,n}}{n^2} + \frac{1}{2} \frac{|\theta_4|}{4!} \frac{\beta_6}{6!} \frac{B_{10,n}}{n^3} + \frac{1}{2} \frac{|\theta_6^{(4)}|}{6!} \frac{\beta_6}{6!} \frac{B_{12,n}}{n^4} + \frac{1}{6} \left(\frac{\theta_4}{4!}\right)^2 \frac{\beta_6}{6!} \frac{B_{14,n}}{n^4} \\ & + \frac{1}{3} \frac{|\theta_4|}{4!} \frac{|\theta_6^{(4)}|}{6!} \left(\frac{\beta_6}{6!} + \frac{1}{48}\right) \frac{B_{16,n}}{n^5} + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_6}{6!} + \frac{1}{48}\right) \frac{|\theta_8^{(4)}|}{8!} \frac{B_{14,n}}{n^5} \\ & + \frac{1}{24} \left|\frac{\theta_4}{4!}\right|^3 \left(\frac{\beta_6}{6!} + \frac{1}{48}\right) \frac{B_{18,n}}{n^5} + \frac{|\theta_{10}^{(4)}|}{10!} \frac{B_{10,n}}{n^4} + \frac{|\theta_4|}{4!} \frac{|\theta_8^{(4)}|}{8!} \frac{B_{12,n}}{n^4} \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_6^{(4)}}{6!}\right)^2 \frac{B_{12,n}}{n^4} + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_4}{4!}\right)^2 \frac{|\theta_6^{(4)}|}{6!} \frac{B_{14,n}}{n^4} + \frac{1}{24} \left(\frac{\theta_4}{4!}\right)^4 \frac{B_{16,n}}{n^4} \\ & + \frac{\|\theta_{12}^{(4)}\|}{12!} \frac{B_{12,n}}{n^5} + \frac{1}{2} \frac{|\theta_4|}{4!} \frac{\|\theta_{10}^{(4)}\|}{10!} \frac{B_{14,n}}{n^5} + \frac{1}{2} \frac{|\theta_6^{(4)}|}{6!} \frac{\|\theta_8^{(4)}\|}{8!} \frac{B_{14,n}}{n^5} \\ & + \frac{1}{6} \left(\frac{\theta_4}{4!}\right)^2 \frac{\|\theta_8^{(4)}\|}{8!} \frac{B_{16,n}}{n^5}, \end{aligned} \quad (8)$$

а величина K является суммой слагаемых, убывающих экспоненциально быстро при росте n , вид этих слагаемых приведен в доказательстве теоремы.

Это же представление справедливо для функций $\tilde{p}_n(x)$, $x \in D_n$, в случае решетчатых распределений. В случае решетчатых распределений условие (1) снимается и приведенное выше ограничение на n следует заменить на $n \geq 4$.

Как и в правой части формулы (6), в правой части (8) сначала выписаны слагаемые, связанные с β_6 . Затем идут слагаемые, убывающие при росте n как n^{-4} , и не связанные с β_6 , мы вновь назовем эту группу слагаемых основной, и затем — остальные слагаемые. В (8) появилась величина $\|\theta_{12}^{(4)}\|/12!$, которая нам еще не встречалась, нетрудно проверить, что для СРБ она равна $1/3840$.

Вычислим для СРБ часть оценки (8) связанную с величиной β_6 . Эта часть не превосходит

$$\frac{\beta_6}{120n^2} + \frac{0.022}{n^3} + \frac{0.147}{n^4} + \frac{19.39}{n^5} \approx \frac{1}{120n^2} \left(1 + \frac{2.64}{n} + \frac{17.64}{n^2} + \frac{2327}{n^3} \right).$$

Сумма слагаемых основной группы приближенно равна

$$\frac{1}{n^4} (0.066 + 0.903 + 0.903 + 3.91 + 1.63) \approx \frac{7.5}{n^4} = \frac{1}{120n^2} \cdot \frac{900}{n^2}.$$

Сумма оставшихся слагаемых не превосходит

$$\frac{1}{n^5} (1.1 + 5.48 + 10.27 + 17.1) < \frac{34}{n^5} = \frac{1}{120n^2} \cdot \frac{4080}{n^3}.$$

Легко видеть, что для СРБ при $n = 30$ вклад в оценку основной группы слагаемых совпадает с вкладом «основного» слагаемого, суммарный вклад остальных слагаемых существенно меньше.

Основную группу слагаемых из правой части (8) также можно перевести в главную часть разложения, но это приводит к очень громоздким формулам: главная часть разложения будет состоять из 12 слагаемых, а оценка величины R — из 21 слагаемого.

Заканчивая обсуждение разложений для СРБ, скажем, что в точке $x = 0$ разность между $\tilde{p}_n(x)$ и главной частью разложения (4) при $n = 36$ составляет $-2.96 \dots \cdot 10^{-6}$.

Приступим к доказательству приведенных выше утверждений.

Доказательства теорем основаны на использовании формул обращения для преобразований Фурье и на представлении функции $f^n(t/\sqrt{n})$ в формах, указанных в леммах 2 и 3, формулировки и доказательства которых приведены ниже. Доказательства теорем дают алгоритм, позволяющий из разложений $f^n(t/\sqrt{n})$ получать разложения для $p_n(x)$ или $\tilde{p}_n(x)$ вместе с оценками остаточных частей. Для определенности мы будем рассматривать случай гладких распределений. Для решетчатых распределений мы укажем лишь то место, где появляется

отличие в оценке остаточной части разложения по сравнению с гладким случаем.

Формула обращения (2), которая справедлива и для стандартного нормального закона, позволяет при $n \geq \nu$ записать разность $p_n(x) - \varphi(x)$ в виде

$$p_n(x) - \varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \left(f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-t^2/2} \right) dt, \quad -\infty < x < \infty. \quad (9)$$

За редкими исключениями, мы можем получать хорошие оценки функции $f(t)$, а вместе с ней и функции $\mu(t) = \max(|f(t)|, e^{-t^2/2})$, лишь на некотором конечном интервале $(-T, T)$, $T > 0$. В связи с этим нам приходится разбивать область интегрирования в правой части (9) на интервал $(-T\sqrt{n}, T\sqrt{n})$ и его дополнение. Абсолютная величина интеграла по этому дополнению не превосходит

$$\frac{1}{\pi} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} \left| f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right|^n dt + \frac{1}{\pi} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} e^{-t^2/2} dt.$$

Первая из этих величин равна

$$\frac{\sqrt{n}}{\pi} \int_T^{\infty} |f(t)|^{n-\nu} |f(t)|^{\nu} dt \leq \frac{\sqrt{n}}{\pi} \alpha^{n-\nu}(T) \int_T^{\infty} |f(t)|^{\nu} dt,$$

что при росте n стремится к нулю экспоненциально быстро, поскольку $\alpha(T)$ строго меньше единицы для любого $T > 0$. Вторая из этих величин, как хорошо известно, не превосходит

$$\frac{1}{\pi T \sqrt{n}} e^{-T^2 n/2},$$

и нам осталось лишь разобраться с интегралом

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} \left(f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-t^2/2} \right) dt. \quad (10)$$

Для решетчатых распределений формула обращения (3) позволяет утверждать, что

$$\frac{\sqrt{n}}{h} p_n(x) - \varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi\sqrt{n}/h}^{\pi\sqrt{n}/h} e^{-itx} f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-t^2/2} dt.$$

И в этом случае мы, за редкими исключениями, можем получать хорошие оценки функции $f(t)$, а вместе с ней и функции $\mu(t)$, лишь на некотором интервале $(-T, T)$, $0 < T < \pi/h$. Поэтому и здесь нам придется разбивать область интегрирования в первом интеграле в правой части на интервал $(-T\sqrt{n}, T\sqrt{n})$ и его дополнение до $(-\pi\sqrt{n}/h, \pi\sqrt{n}/h)$.

В связи с этим область интегрирования во втором интеграле в правой части также разбивается на интервал $(-T\sqrt{n}, T\sqrt{n})$ и его дополнение до всей действительной прямой. В соответствии с этим, правая часть последнего равенства равна сумме величины (10) и величины, модуль которой не превосходит

$$\frac{1}{\pi} \int_{T\sqrt{n}}^{\pi\sqrt{n}/h} \left| f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right|^n dt + \frac{1}{\pi} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} e^{-t^2/2} dt.$$

Второе слагаемое — то же самое, что и в предыдущем случае, а первое равно

$$\frac{\sqrt{n}}{\pi} \int_T^{\pi/h} |f(t)|^n dt \leq \frac{\sqrt{n}}{\pi} \alpha^n(T) \left(\frac{\pi}{h} - T \right),$$

где $\alpha(T) < 1$, что вновь при росте n стремится к нулю экспоненциально быстро. Это — единственное место, где возникает различие в оценках остаточных частей разложений для гладкого и решетчатого случаев.

Рассмотрим величину (10). Ее вид один и тот же как для гладких, так и для решетчатых распределений. Леммы 2 и 3, приведенные ниже, позволяют представить разность $f^n(t/\sqrt{n}) - e^{-t^2/2}$ в виде суммы величин, которые либо имеют вид $a(n, P)e^{-t^2/2}(it)^l$, либо имеют вид $\gamma b(n, P)\mu^{n-1}(t/\sqrt{n})t^l$, где l — натуральное число и $\gamma = \gamma(t)$ — функции, модули которых не превосходят единицы.

Сумма величин вида $a(n, P)e^{-t^2/2}(it)^l$ составляет главную часть разложения разности $f^n(t/\sqrt{n}) - e^{-t^2/2}$. Очевидно, что для каждой из этих величин

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} a(n, P)e^{-t^2/2}(it)^l dt = a(n, P) \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} e^{-itx} e^{-t^2/2}(it)^l dt.$$

Правая часть этого равенства в силу хорошо известных соотношений

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-t^2/2}(it)^l dt = H_l(x)\varphi(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

есть

$$a(n, P)H_l(x)\varphi(x) + K, \quad (11)$$

где

$$|K| \leq |a(n, P)| \frac{1}{\pi} \int_{T\sqrt{n}}^{\infty} t^l e^{-t^2/2} dt,$$

что при росте n стремится к нулю экспоненциально быстро. Сумму первых слагаемых из (11) по всем слагаемым главной части разложения разности $f^n(t/\sqrt{n}) - e^{-t^2/2}$ мы включим в главную часть разложения $p_n(x)$. Сумма величин K из (11) по всем слагаемым главной части разложения разности $f^n(t/\sqrt{n}) - e^{-t^2/2}$ войдет в остаточную часть разложения $p_n(x)$.

Сумма величин $\gamma b(n, P) \mu^{n-1}(t/\sqrt{n}) t^l$ составляет остаточную часть разложения разности $f^n(t/\sqrt{n}) - e^{-t^2/2}$. Интегралы от этих величин войдут в остаточную часть разложения $p_n(x)$. Каждый из таких интегралов внесет в остаточную часть разложения $p_n(x)$ вклад, не превосходящий

$$|b(n, P)| \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} \mu^{n-1}(t/\sqrt{n}) |t|^l dt = |b(n, P)| B_{l,n}.$$

На этом мы закончим доказательство теорем. Сказанное выше позволяет, глядя на разложение функции $f^n(t/\sqrt{n})$, сразу выписать как главную часть разложения $p_n(x)$, $-\infty < x < \infty$, для гладких распределений или $\tilde{p}_n(x)$, $x \in D_n$, для решетчатых распределений, так и оценку остаточной части. Для завершения доказательства теоремы 1 нужно воспользоваться леммой 2, а для завершения доказательства теоремы 2 — леммой 3.

Лемма 1. Для симметричных распределений с единичной дисперсией и конечным моментом порядка $2k+2$, k — натуральное, функция $e^{t^2/2} f(t)$ допускает следующие представления

$$e^{t^2/2} f(t) = 1 + \sum_{l=2}^k \frac{\theta_{2l}}{(2l)!} (it)^{2l} + \sum_{l=k+1}^{k+s} \frac{\theta_{2l}^{(2k)}}{(2l)!} (it)^{2l} + \gamma e^{t^2/2} \frac{\beta_{2k+2}}{(2k+2)!} t^{2k+2} + \gamma e^{t^2/2} \frac{\|\theta_{2(k+s+1)}^{(2k)}\|}{(2k+2s+2)!} t^{2k+2s+2}, \quad (12)$$

где s — произвольное натуральное число и γ — функции, абсолютные величины которых не превосходят единицы.

З а м е ч а н и е. Утверждение леммы справедливо и при $s = 0$. В этом случае в правой части последнего равенства следует опустить вторую сумму по l , а сумму двух последних слагаемых можно записать как

$$\gamma e^{t^2/2} \frac{\|\theta_{2k+2}\|}{(2k+2)!} t^{2k+2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство леммы основано на хорошо известном разложении характеристической функции $f(t)$ в отрезок ряда Тейлора, которое мы запишем в виде

$$f(t) = \sum_{l=0}^k \frac{\alpha_{2l}}{(2l)!} (it)^{2l} + \gamma \frac{\beta_{2k+2}}{(2k+2)!} t^{2k+2},$$

где γ — функция, абсолютная величина которой не превосходит единицы. Произведение

$$e^{t^2/2} f(t) = e^{t^2/2} \sum_{l=0}^k \frac{\alpha_{2l}}{(2l)!} (it)^{2l} + \gamma e^{t^2/2} \frac{\beta_{2k+2}}{(2k+2)!} t^{2k+2}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-(it)^2/2} \sum_{l=0}^k \frac{\alpha_{2l}}{(2l)!} (it)^{2l} + \gamma e^{t^2/2} \frac{\beta_{2k+2}}{(2k+2)!} t^{2k+2} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (it)^{2j}}{2^j j!} \sum_{l=0}^k \frac{\alpha_{2l}}{(2l)!} (it)^{2l} + \gamma e^{t^2/2} \frac{\beta_{2k+2}}{(2k+2)!} t^{2k+2}.
\end{aligned}$$

Произведение ряда для экспоненты и главной части разложения $f(t)$ в отрезок ряда Тейлора можно вычислять с помощью таблицы, состоящей из $k+1$ столбца и бесконечно многих строк, в заголовках столбцов которой стоят слагаемые из главной части разложения $f(t)$, в заголовках строк — слагаемые из ряда для экспоненты, а элементом, стоящим в l -м столбце и j -й строке является произведение их заголовков, т.е. величина

$$\frac{\alpha_{2l}}{(2l)!} \frac{(-1)^j}{2^j j!} (it)^{2l+2j}, \quad l = 0, 1, \dots, k, \quad j = 0, 1, \dots$$

Ясно, что сумма всех элементов таблицы совпадает с упомянутым выше произведением. Очевидно, что левый верхний элемент таблицы — число 1. Скажем, что это — элемент тривиальной диагонали. Диагонали строятся справа — налево, сверху — вниз. Легко понять, что сумма элементов l -й нетривиальной диагонали, т.е. сумма (по j) элементов, стоящих в $(l-j)$ -м столбце и j -й строке, $l = 1, \dots, k$, $j = 0, 1, \dots, l$, есть

$$\sum_{j=0}^l \frac{\alpha_{2l-2j}}{(2l-2j)!} \frac{(-1)^j}{2^j j!} (it)^{2l} = \frac{\theta_{2l}}{(2l)!} (it)^{2l}.$$

Отметим, что сумма элементов первой нетривиальной диагонали равна нулю, так как мы рассматриваем распределения с единичным вторым моментом.

Все эти величины мы включим в главную часть разложения произведения $e^{t^2/2} f(t)$. Мы можем включить в главную часть разложения этого произведения любое число s неполных диагоналей таблицы. Нетрудно проверить, что сумма элементов l -й неполной диагонали совпадает с $\theta_{2l}^{(2k)} (it)^{2l} / (2l)!$, $k+1 \leq l \leq k+s$.

Оценим абсолютную величину суммы элементов таблицы, оставшихся после того как мы включили в главную часть разложения функции $e^{t^2/2} f(t)$ суммы элементов тривиальной диагонали, k нетривиальных полных диагоналей и s неполных диагоналей. Легко видеть, что сумма элементов, оставшихся в l -м столбце, $l = 0, 1, \dots, k$, есть

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=k+s+1-l}^{\infty} \frac{\alpha_{2l}}{(2l)!} (it)^{2l} \frac{(-1)^j}{2^j j!} (it)^{2j} \\
&= (-1)^{k+s-l+1} \frac{\alpha_{2l}}{(2l)!} (it)^{2k+2s+2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (it)^{2j}}{2^{k+s-l+1+j} (k+s-l+1+j)!}.
\end{aligned}$$

Абсолютная величина правой части этого равенства не превосходит

$$t^{2k+2s+2} \frac{\alpha_{2l}}{(2l)!} \frac{1}{2^{k+s-l+1}(k+s-l+1)!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{2j}}{2^j j!} \\ = e^{t^2/2} \frac{\alpha_{2l}}{(2l)!} \frac{1}{2^{k+s-l+1}(k+s-l+1)!} t^{2k+2s+2}.$$

Просуммируем величины

$$\frac{\alpha_{2l}}{(2l)!} \frac{1}{2^{k+s-l+1}(k+s-l+1)!}$$

по $0 \leq l \leq k$, перейдя к новой переменной суммирования $j = k + s - l + 1$, $s + 1 \leq j \leq k + s + 1$. Мы получим

$$\sum_{j=s+1}^{k+s+1} \frac{\alpha_{2k+2s+2-2j}}{(2k+2s+2-2j)!} \frac{1}{2^j j!} = \frac{\|\theta_{2k+2s+2}^{(2k)}\|}{(2k+2s+2)!}.$$

На этом мы завершим доказательство леммы.

Лемма 2. Для функции $f^n(t/\sqrt{n})$, где f — характеристическая функция симметричного распределения с единичной дисперсией и конечным моментом шестого порядка при любом натуральном $n \geq 3$ справедливо следующее представление:

$$f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = e^{-t^2/2} + \frac{\theta_4}{4!n} (it)^4 e^{-t^2/2} + \frac{\theta_6^{(4)}}{6!n^2} (it)^6 e^{-t^2/2} \\ + \frac{n-1}{2n} \frac{1}{n^2} \left(\frac{\theta_4}{4!}\right)^2 (it)^8 e^{-t^2/2} \\ + n\mu^{n-1} \left(\gamma \frac{\beta_6}{6!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^6 + \gamma \frac{\theta_8^{(4)}}{8!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^8 + \gamma \frac{\|\theta_{10}^{(4)}\|}{10!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{10} \right) \\ + C_n^2 \mu^{n-1} \left(\gamma \frac{\theta_4}{4!} \frac{\beta_6}{6!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{10} + 2\gamma \frac{\theta_4}{4!} \frac{\theta_6^{(4)}}{6!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{10} + \gamma \frac{\theta_4}{4!} \frac{\|\theta_8^{(4)}\|}{8!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{12} \right) \\ + C_n^2 \mu^{n-1} \gamma \frac{\theta_6^{(4)}}{6!} \left(\frac{\beta_6}{6!} + \frac{1}{48} \right) \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{12} \\ + C_n^3 \mu^{n-1} \left(\gamma \left(\frac{\theta_4}{4!}\right)^3 \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{12} + \gamma \left(\frac{\theta_4}{4!}\right)^2 \left(\frac{\beta_6}{6!} + \frac{1}{48}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{14} \right),$$

где символом γ обозначены различные функции, абсолютные величины которых не превосходят единицы, а $\mu^{n-1} = \mu^{n-1}(t/\sqrt{n})$.

Доказательство. Доказательство этой леммы опирается на многократное использование хорошо известного равенства

$$a^l - b^l = \sum_{j=0}^{l-1} a^{l-j-1} b^j (a - b), \quad (13)$$

которое справедливо для любого натурального l и любых комплексных чисел a и b . Воспользуемся также утверждением предыдущей леммы. Нам будет удобно записывать характеристическую функцию $e^{-t^2/2}$ стандартного нормального закона, предельного в ЦПТ, в том же виде, в каком записывается допредельная характеристическая функция, т.е. мы будем записывать $e^{-t^2/2}$ как $g^n(t/\sqrt{n})$, где $g(t) = e^{-t^2/2}$. Мы часто будем опускать аргументы у функций f , g , μ и некоторых других функций, это не должно привести к недоразумениям, все эти аргументы, если не оговорено противное, суть $t/\sqrt{n}$.

По формуле (13) разность

$$f^n - g^n = \sum_{j=0}^{n-1} f^{n-j-1} g^j (f - g) = \psi \sum_{j=0}^{n-1} f^{n-j-1} g^{j+1},$$

где $\psi = e^{t^2/2n} f(t/\sqrt{n}) - 1$. Используя представление (12) леммы 1 для $k = 2$ и $s = 2$, видим, что

$$\begin{aligned} f^n - g^n &= \left(\frac{\theta_4}{4!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^4 + \frac{\theta_6^{(4)}}{6!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^6 + \frac{\theta_8^{(4)}}{8!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^8 \right) \sum_{j=0}^{n-1} f^{n-j-1} g^{j+1} \\ &+ \left(\gamma \frac{\beta_6}{6!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^6 + \gamma \frac{\|\theta_{10}^{(4)}\|}{10!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{10} \right) \sum_{j=0}^{n-1} f^{n-j-1} g^j. \end{aligned} \quad (14)$$

Обратим внимание на то, что в первой сумме по j показатели степеней у функции g суть $j+1$, в то время как во второй сумме они суть j . Это связано с тем, что во второй сумме одна функция g используется для того, чтобы подавить экспоненты $e^{t^2/2n}$, происходящие от экспонент в двух последних слагаемых правой части (12).

Последнее слагаемое в (14) можно записать как

$$\gamma \frac{\beta_6}{6!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^6 n \mu^{n-1} + \gamma \frac{\|\theta_{10}^{(4)}\|}{10!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{10} n \mu^{n-1}.$$

В таком виде мы включим его в остаточную часть разложения функции $f^n(t/\sqrt{n})$. Отметим, что все функции γ , абсолютные значения которых не превосходят единицы, в этих выкладках различны.

Рассмотрим величину

$$\frac{\theta_8^{(4)}}{8!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^8 \sum_{j=0}^{n-1} f^{n-j-1} g^{j+1},$$

которую можно выделить из правой части (14). Ее можно записать как

$$\gamma \frac{\theta_8^{(4)}}{8!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^8 n \mu^{n-1},$$

и в таком виде включить в остаточную часть разложения леммы.

Рассмотрим величину

$$\frac{\theta_6^{(4)}}{6!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^6 \sum_{j=0}^{n-1} f^{n-j-1} g^{j+1}, \quad (15)$$

которую можно выделить из правой части (14). Запишем сумму по j в виде

$$\sum_{j_1=0}^{n-1} f^{n-j_1-1} g^{j_1+1} = \sum_{j_1=0}^{n-2} (f^{n-j_1-1} - g^{n-j_1-1}) g^{j_1+1} + n g^n.$$

Вновь используя равенство (13), мы видим, что последняя сумма по j_1 равна

$$\sum_{j_1=0}^{n-2} \sum_{j_2=0}^{n-j_1-2} f^{n-j_1-j_2-2} g^{j_2} (f - g) g^{j_1+1} = \sum_{0 \leq j_1+j_2 \leq n-2} f^{n-j_1-j_2-2} g^{j_1+j_2+1} (f - g).$$

В правой части последнего равенства суммирование проводится по всем наборам неотрицательных целых чисел j_1, j_2 таких, что их сумма не превосходит $n - 2$. Аналогичные переходы от повторных сумм к кратным приходится делать довольно часто, и в связи с этим отметим, что число наборов неотрицательных целых чисел $j_1, \dots, j_s$, s — натуральное, таких, что $j_1 + \dots + j_s \leq n - s$ равно C_n^s .

Из сказанного следует, что величина (15) равна

$$\frac{\theta_6^{(4)}}{6!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^6 n e^{-t^2/2} + \frac{\theta_6^{(4)}}{6!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^6 \sum_{0 \leq j_1+j_2 \leq n-2} f^{n-j_1-j_2-2} g^{j_1+j_2+1} (f - g). \quad (16)$$

Первое из этих слагаемых мы включим в главную часть разложения.

Для оценки суммы оставшихся слагаемых в (16) воспользуемся неравенством

$$|f - g| \leq \frac{|\theta_4|}{4!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^4 + \left(\frac{\beta_6}{6!} + \frac{1}{48} \right) \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^6, \quad (17)$$

которое легко следует из разложений в отрезки рядов Тейлора

$$f(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{\alpha_4}{4!} t^4 + \gamma \frac{\beta_6}{6!} t^6, \quad e^{-t^2/2} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{3}{4!} t^4 + \gamma \frac{15}{6!} t^6.$$

Применяя эту оценку, мы можем сумму оставшихся слагаемых из (16) записать в виде

$$\gamma \frac{\theta_4}{4!} \frac{\theta_6^{(4)}}{6!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{10} C_n^2 \mu^{n-1} + \gamma \frac{\theta_6^{(4)}}{6!} \left(\frac{\beta_6}{6!} + \frac{1}{48} \right) \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{12} C_n^2 \mu^{n-1}. \quad (18)$$

В таком виде мы и включим ее в остаточную часть разложения.

Рассмотрим величину

$$\frac{\theta_4}{4!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^4 \sum_{j=0}^{n-1} f^{n-j-1} g^{j+1},$$

которую можно выделить из (14). Действуя аналогично предыдущему, мы видим, что она равна

$$\frac{\theta_4}{4!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^4 n e^{-t^2/2} + \frac{\theta_4}{4!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^4 \sum_{0 \leq j_1 + j_2 \leq n-2} f^{n-j_1-j_2-2} g^{j_1+j_2+1} (f-g).$$

Первое слагаемое мы включим в главную часть разложения леммы.

Преобразуем второе слагаемое, воспользовавшись утверждением леммы 1 при $k = 2$, $s = 1$. Мы можем записать его в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\theta_4}{4!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^4 \left(\frac{\theta_4}{4!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^4 + \frac{\theta_6^{(4)}}{6!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^6 \right) \sum_{0 \leq j_1 + j_2 \leq n-2} f^{n-j_1-j_2-2} g^{j_1+j_2+2} \\ & + \frac{\theta_4}{4!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^4 \left(\gamma \frac{\beta_6}{6!} \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^6 + \gamma \frac{\|\theta_8^{(4)}\|}{8!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^8 \right) \\ & \times \sum_{0 \leq j_1 + j_2 \leq n-2} f^{n-j_1-j_2-2} g^{j_1+j_2+1}. \end{aligned} \quad (19)$$

Второе слагаемое мы можем записать как

$$\gamma \frac{\theta_4}{4!} \frac{\beta_6}{6!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{10} C_n^2 \mu^{n-1} + \gamma \frac{\theta_4}{4!} \frac{\|\theta_8^{(4)}\|}{8!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{12} C_n^2 \mu^{n-1}.$$

В таком виде мы и включим его в остаточную часть разложения.

Сумму величин из (19), связанную с $\theta_6^{(4)}$, можно записать в виде

$$\gamma \frac{\theta_4}{4!} \frac{\theta_6^{(4)}}{6!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{10} C_n^2 \mu^{n-1}.$$

Такая величина уже встречалась нам в (18), правда, функция γ там была, вообще говоря, иной, но нетрудно понять, что в итоге мы должны включить в остаточную часть разложения величину

$$2\gamma \frac{\theta_4}{4!} \frac{\theta_6^{(4)}}{6!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{10} C_n^2 \mu^{n-1}.$$

Нам осталось рассмотреть

$$\left(\frac{\theta_4}{4!} \right)^2 \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^8 \sum_{0 \leq j_1 + j_2 \leq n-2} f^{n-j_1-j_2-2} g^{j_1+j_2+2}.$$

Действуя аналогично предыдущему, легко убедиться в том, что эта величина совпадает с

$$C_n^2 \left(\frac{\theta_4}{4!} \right)^2 \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^8 e^{-t^2/2} + \left(\frac{\theta_4}{4!} \right)^2 \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^8 \sum_{0 \leq j_1 + j_2 + j_3 \leq n-3} f^{n-j_1-j_2-j_3-3} g^{j_1+j_2+j_3+2} (f-g). \quad (20)$$

Первое слагаемое мы отнесем в главную часть разложения леммы.

Если для суммы оставшихся слагаемых в (20) воспользоваться оценкой (17), то мы сможем записать ее в виде

$$\gamma \left(\frac{\theta_4}{4!} \right)^3 \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{12} C_n^3 \mu^{n-1} + \gamma \left(\frac{\theta_4}{4!} \right)^2 \left(\frac{\beta_6}{6!} + \frac{1}{48} \right) \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{14} C_n^3 \mu^{n-1}.$$

Эту сумму мы включаем в остаточную часть разложения леммы.

Собирая вместе полученные результаты, мы убеждаемся в справедливости утверждения леммы.

Лемма 3. Для функции $f^n(t/\sqrt{n})$, где f — характеристическая функция симметричного распределения с единичной дисперсией и конечным моментом шестого порядка при любом натуральном $n \geq 4$ справедливо следующее представление:

$$\begin{aligned} f^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) &= e^{-t^2/2} + \frac{\theta_4}{4!n} (it)^4 e^{-t^2/2} + \frac{\theta_6^{(4)}}{6!n^2} (it)^6 e^{-t^2/2} \\ &+ \frac{n-1}{2n} \frac{1}{n^2} \left(\frac{\theta_4}{4!} \right)^2 (it)^8 e^{-t^2/2} + \frac{\theta_8^{(4)}}{8!n^3} (it)^8 e^{-t^2/2} \\ &+ \frac{n-1}{n} \frac{1}{n^3} \frac{\theta_4}{4!} \frac{\theta_6^{(4)}}{6!} (it)^{10} e^{-t^2/2} + \frac{(n-1)(n-2)}{6n^2} \frac{1}{n^3} \left(\frac{\theta_4}{4!} \right)^3 (it)^{12} e^{-t^2/2} \\ &+ n\mu^{n-1} \left(\gamma \frac{\beta_6}{6!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^6 + \gamma \frac{\theta_{10}^{(4)}}{10!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{10} + \gamma \frac{\|\theta_{12}^{(4)}\|}{12!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{12} \right) \\ &+ C_n^2 \mu^{n-1} \left(\gamma \frac{\theta_4}{4!} \frac{\beta_6}{6!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{10} + 2\gamma \frac{\theta_4}{4!} \frac{\theta_8^{(4)}}{8!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{12} + \gamma \left(\frac{\theta_6^{(4)}}{6!} \right)^2 \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{12} \right. \\ &\quad \left. + \gamma \frac{\theta_6^{(4)}}{6!} \frac{\beta_6}{6!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{12} \right) \\ &+ C_n^2 \mu^{n-1} \left(\gamma \frac{\theta_4}{4!} \frac{\|\theta_{10}^{(4)}\|}{10!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{14} + \gamma \frac{\theta_6^{(4)}}{6!} \frac{\|\theta_8^{(4)}\|}{8!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{14} \right. \\ &\quad \left. + \gamma \left(\frac{\beta_6}{6!} + \frac{1}{48} \right) \frac{\theta_8^{(4)}}{8!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{14} \right) \\ &+ C_n^3 \mu^{n-1} \left(3\gamma \left(\frac{\theta_4}{4!} \right)^2 \frac{\theta_6^{(4)}}{6!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{14} + \gamma \left(\frac{\theta_4}{4!} \right)^2 \frac{\beta_6}{6!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{14} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\gamma \frac{\theta_4}{4!} \frac{\theta_6^{(4)}}{6!} \left(\frac{\beta_6}{6!} + \frac{1}{48} \right) \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{16} \\
& + C_n^3 \mu^{n-1} \gamma \left(\frac{\theta_4}{4!} \right)^2 \frac{\|\theta_8^{(4)}\|}{8!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{16} \\
& + C_n^4 \mu^{n-1} \left(\gamma \left(\frac{\theta_4}{4!} \right)^4 \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{16} + \gamma \left(\frac{\theta_4}{4!} \right)^3 \left(\frac{\beta_6}{6!} + \frac{1}{48} \right) \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^{18} \right),
\end{aligned}$$

где символом γ обозначены различные функции, абсолютные величины которых не превосходят единицы, а $\mu^{n-1} = \mu^{n-1}(t/\sqrt{n})$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 2, привлечения новых идей не требуется, поэтому мы его опускаем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гамкрелидзе Н. Г. Муавра–Лапласа теорема. Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия. М.: Большая российская энциклопедия, 1999.
2. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 416 с.
3. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. 2 изд., М.: Наука, 1973.
4. Сенатов В. В. Центральная предельная теорема: Точность аппроксимации и асимптотические разложения. М.: Книжный дом «Либроком», 2009, 352 с.
5. Сенатов В. В. О неулучшаемых оценках для асимптотических разложений в ЦПТ. — Теория вероятн. и ее примен., 2012, т. 57, в. 4, с. 640–666.
6. Шевцова И. Г. Об асимптотически правильных постоянных в неравенстве Берри–Эссеена. — Теория вероятн. и ее примен., 2010, т. 55, в. 3, с. 619–621.

Поступила в редакцию
27.II.2012

Сокращенный вариант
15.IV.2015