Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Булинский, Оценка радиуса окрестности взаимодействия для марковского случайного поля, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2015, том 60, выпуск 2, 377–383

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4624>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:47:48

© 2015 г.

СЕМИНАР ПАМЯТИ Ю. В. ПРОХОРОВА

15 декабря 2015 года исполнилось 85 лет со дня рождения академика Юрия Васильевича Прохорова, бессменного руководителя отдела теории вероятностей и математической статистики с 1960 по 2013 год и главного редактора журнала «Теория вероятностей и ее применения» до 2013 года.

В этот день в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук состоялось расширенное заседание семинара отдела, посвященное памяти Ю. В. Прохорова. Были сделаны научные доклады:

Ал. В. Булинский, Оценка радиуса окрестности взаимодействия для марковского случайного поля;

О. В. Висков, В. И. Хохлов, О четырех направлениях исследований Ю. В. Прохорова и их перспективах;

В. В. Ульянов, О свойствах многочленов от случайных элементов;

М. Е. Широков, А. С. Холево, О компактности подмножеств вероятностных мер на квантовых состояниях;

Д. М. Чибисов, О законе больших чисел Я. Бернулли и усиленном законе больших чисел;

А. Л. Якимив, Тауберова теорема для производящих функций кратных последовательностей.

Содержание докладов публикуется в виде кратких сообщений в настоящем номере журнала.

© 2015 г.

БУЛИНСКИЙ А. В.*

ОЦЕНКА РАДИУСА ОКРЕСТНОСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ МАРКОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ¹⁾

Рассматривается марковское случайное поле X , отвечающее конечному графу G . Вершины этого графа лежат в некотором метрическом пространстве. Значения элементов поля принадлежат произвольному конечному множеству. Вероятностное распределение поля предполагается строго положительным на непустых конфигурациях. Иначе говоря (согласно теореме Аверинцева–Клиффорда–Хаммерсли), изучается гиббсовское случайное поле с потенциалом ближайших соседей. Для каждой

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Москва, Россия; e-mail: bulinski@yandex.ru

¹⁾ Исследование выполнено в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова и в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00162).

вершины j графа G исследуется почти наверное предельное поведение статистических оценок радиуса минимального шара, содержащего соседние с j вершины. Эти оценки строятся по выборке независимых случайных полей, имеющих такое же распределение, как данное поле X .

Ключевые слова и фразы: марковское случайное поле, гиббсовское случайное поле, конечный граф, метрическое пространство, оценка окрестности взаимодействия.

Пусть $X = \{X_j, j \in T\}$ — случайное поле, заданное на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и конечном множестве T . Будем считать, что $X_j: \Omega \rightarrow S$ при каждом $j \in T$, где S — конечное множество (с σ -алгеброй 2^S всех его подмножеств). Тривиальные случаи одноточечных S и T исключаем из рассмотрения. Множество T будем рассматривать как совокупность вершин некоторого графа G , ребра которого определяются системой окрестностей $N_j \subset T, j \in T$ ($j \notin N_j$, а если $i \in N_j$, то $j \in N_i$). А именно, считаем, что j соединено ребрами только с вершинами из N_j (пишут $N_j = \partial\{j\}$). Другими словами, N_j представляет собой множество соседей вершины j , которое назовем окрестностью взаимодействия (для j). Напомним, что X называется марковским случайным полем, соответствующим графу G , если для каждого $j \in T$ справедливо соотношение

$$\mathbf{P}(X_j = x_j | X_i = x_i, i \in T \setminus \{j\}) = \mathbf{P}(X_j = x_j | X_i = x_i, i \in N_j) \quad (1)$$

при любой конфигурации $x = \{x_j, j \in T\} \in S^T$ такой, что $\mathbf{P}(X_i = x_i, i \in T \setminus \{j\}) \neq 0$. Марковские случайные поля имеют разнообразные приложения (см., например, [1] и [3]).

Для $x \in S^T$, случайного поля X и непустого множества $U \subset T$ положим $x(U) := \{x_i, i \in U\}$, $X(U) := \{X_i, i \in U\}$. Мы пишем $X(U) = x(U)$, если $X_i = x_i$ для всех $i \in U$. Точнее говоря, $\{X(U) = x(U)\} := \bigcap_{i \in U} \{X_i = x_i\}$. В дальнейшем будем рассматривать поле X такое, что $\mathbf{P}(X(U) = x(U)) > 0$ для любого $x \in S^T$ и каждого непустого множества $U \subset T$. Тогда по теореме Аверинцева–Клиффорда–Хаммерсли (см., например, [4, с. 300]) X является марковским случайным полем (отвечающим графу G) тогда и только тогда, когда X представляет собой гиббсовское случайное поле, определяемое потенциалом ближайшего соседа.

Пусть (T, ρ) — метрическое пространство. Для $j \in T$ и $r > 0$ введем шар $B_r(j)$, т.е. множество $\{i \in T: \rho(i, j) \leq r\}$. В силу телескопического свойства условного математического ожидания, очевидно, что соотношение (1) влечет за собой равенство

$$\mathbf{P}(X_j = x_j | X(T \setminus \{j\}) = x(T \setminus \{j\})) = \mathbf{P}(X_j = x_j | X(M) = x(M)) \quad (2)$$

для любого множества M такого, что $N_j \subset M \subset T \setminus \{j\}$. Следовательно, (2) выполнено для $M = B_r(j) \setminus \{j\}$, если $N_j \subset B_r(j) \setminus \{j\}$, и можно ставить вопрос о нахождении минимального такого шара $B_r(j)$, т.е. нахождении минимального $r = r(j)$, являющегося радиусом этого шара.

Допустим, что в нашем распоряжении имеется выборка, состоящая из n реализаций $x^{(k)} = \{x_j^{(k)}, j \in T\}$ независимых одинаково распределенных марковских (отвечающих графу G) случайных полей $X^{(k)} = \{X_j^{(k)}, j \in T\}$ таких, что распределения $X^{(k)}$ и X совпадают для $k = 1, \dots, n$. Требуется статистически оценить величину $r(j)$ для $j \in T$. Варианты этой задачи рассматривались, например, в [2], [5]–[7]. В [2] и [6] изучались марковские цепи на $\mathbf{Z}$ (и их обобщения), в [5] и [7] для одной реализации поля X , заданного на множестве $\mathbf{Z}^d$, соответствующие оценки строились по наблюдениям $\{x_j, j \in T_k\}$ на растущих конечных множествах $T_k \subset \mathbf{Z}^d, k \in \mathbf{N}$.

Рассмотрим массив случайных величин

$$X_j^{(1:n)} = (X_j^{(1)}, \dots, X_j^{(n)}), \\ X^{(1:n)}(B_r(j) \setminus \{j\}) = (X^{(1)}(B_r(j) \setminus \{j\}), \dots, X^{(n)}(B_r(j) \setminus \{j\})).$$

Зафиксируем произвольную точку $j \in T$. Для $x \in S$, $r > 0$ и $z \in S^{B_r(j) \setminus \{j\}}$ определим

$$\begin{aligned} p_j^{(r)}(x, z) &:= \mathbf{P}\left(X_j = x, X(B_r(j) \setminus \{j\}) = z\right), \\ p_j^{(r)}(x | z) &:= \mathbf{P}\left(X_j = x | X(B_r(j) \setminus \{j\}) = z\right), \\ \mathbf{N}_{n,j}^{(r)}(x, z) &:= \sum_{k=1}^n \mathbb{I}\left\{X_j^{(k)} = x, X^{(k)}(B_r(j) \setminus \{j\}) = z\right\}, \\ \mathbf{N}_{n,j}^{(r)}(z) &:= \sum_{x \in S} \mathbf{N}_{n,j}^{(r)}(x, z), \end{aligned}$$

где $\mathbb{I}\{A\}$ — индикатор события A . Для упрощения записи мы не указываем зависимость случайной величины $\mathbf{N}_{n,j}^{(r)}(x, z)$ от $X^{(1)}(B_r(j)), \dots, X^{(n)}(B_r(j))$ (аналогичное замечание относится и к $\mathbf{N}_{n,j}^{(r)}(z)$). Для $j \in T$ и $r > 0$ введем $V_r(j) := S^{B_r(j) \setminus \{j\}}$.

Оценка максимального правдоподобия величины $p_j^{(r)}(x | z)$ для $x \in S$ при заданном $z \in V_r(j)$ дается формулой

$$\hat{p}_{n,j}^{(r)}(x | z) = \frac{\mathbf{N}_{n,j}^{(r)}(x, z)}{\mathbf{N}_{n,j}^{(r)}(z)}.$$

При этом, если $\mathbf{N}_{n,j}^{(r)}(z) = 0$, считаем, что $\hat{p}_{n,j}^{(r)}(x | z) = 1/|S|$ для всех $x \in S$, где $|S|$ обозначает мощность S .

Определим

$$L\left(X_j^{(1:n)} | X^{(1:n)}(B_r(j) \setminus \{j\})\right) := \prod_{x \in S} \prod_{z \in V_r(j)} \hat{p}_{n,j}^{(r)}(x | z)^{\mathbf{N}_{n,j}^{(r)}(x, z)}.$$

Для фиксированной константы $c > 0$ и $n \in \mathbf{N}$ определим логарифмическую функцию псевдоправдоподобия, учитывая штрафную функцию. А именно, положим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(X_j^{(1:n)} | X^{(1:n)}(B_r(j) \setminus \{j\})\right) \\ := \ln L\left(X_j^{(1:n)} | X^{(1:n)}(B_r(j) \setminus \{j\})\right) - c|S|^{B_r(j)-1} \ln n. \end{aligned} \quad (3)$$

Введем статистическую оценку величины $r(j)$ формулой

$$\hat{r}_n(j) := \arg \sup_{r \in (0, \text{diam}(T)]} \mathcal{L}\left(X_j^{(1:n)} | X^{(1:n)}(B_r(j) \setminus \{j\})\right), \quad (4)$$

где $\text{diam}(T) = \max_{u, v \in T} \rho(u, v)$. Фактически верхняя грань берется по r , принадлежащим конечному множеству $K_j := \{r_{1,j}, \dots, r_{m(j),j}\}$, описывающему радиусы различных в T шаров с центром в точке j . Если $\hat{r}_n(j)$ определяется неоднозначно, то берем для определенности наименьшее значение.

Теорема 1. Пусть X — определенное выше марковское случайное поле. Тогда для всех $j \in T$ оценки $\hat{r}_n(j)$, заданные согласно (4), при почти всех $\omega \in \Omega$ обладают свойством

$$\hat{r}_n(j)(\omega) = r(j), \quad (5)$$

если $n \geq N(\omega)$.

Доказательство опирается на две леммы. Напомним, что расстоянием Кульбака–Лейблера (хотя не все свойства метрики выполнены) между вероятностными мерами P и Q , заданными на пространстве $(S, 2^S)$, называется величина

$$D(P \| Q) := \sum_{x \in S} P(\{x\}) \ln \frac{P(\{x\})}{Q(\{x\})},$$

где

$$P(\{x\}) \ln \frac{P(\{x\})}{Q(\{x\})} := 0,$$

если $P(\{x\}) = 0$, и

$$P(\{x\}) \ln \frac{P(\{x\})}{Q(\{x\})} := +\infty$$

при $P(\{x\}) > 0$ и $Q(\{x\}) = 0$.

Лемма 1 (см. [6, лемма 6.3]). Для любых вероятностных мер P и Q на $(S, 2^S)$, принимающих положительные значения на непустых подмножествах S , верно неравенство

$$D(P \| Q) \leq \sum_{x \in S} \frac{(P(\{x\}) - Q(\{x\}))^2}{Q(\{x\})}.$$

Следующий результат опирается на рассуждения из [2] (предложение 4.3) и [5] (лемма 3.2).

Лемма 2. Для любых $j \in T$, $x \in S$, $z \in V_r(j) \setminus \{j\}$ и $r \in (0, \text{diam}(T)]$ п.н. при всех достаточно больших n (т.е. для почти всех $\omega \in \Omega$ и $n \geq n_1(\omega)$) имеет место неравенство

$$\left| \hat{p}_{n,j}^{(r)}(x|z) - p_j^{(r)}(x|z) \right| \leq \sqrt{\frac{\ln \ln n}{\mathbf{N}_{n,j}^{(r)}(z)}}. \quad (6)$$

Доказательство леммы 2. Для фиксированных j , x и z определим случайные величины

$$Y_k^{(r)} := \mathbb{I}\{X_j^{(k)} = x, X^{(k)}(B_r(j) \setminus \{j\}) = z\} - p_j^{(r)}(x|z) \mathbb{I}\{X^{(k)}(B_r(j) \setminus \{j\}) = z\},$$

где $k = 1, \dots, n$ и $r \in (0, \text{diam}(T)]$, и положим

$$Z_n^{(r)} := \sum_{k=1}^n Y_k^{(r)}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Заметим, что для каждого k поведение $Y_k^{(r)}$ определяется лишь значениями $r \in K_j$. Очевидно, что $Z_n^{(r)} = \mathbf{N}_{n,j}^{(r)}(x, z) - p_j^{(r)}(x|z) \mathbf{N}_{n,j}^{(r)}(z)$. Величины $Y_1^{(r)}, \dots, Y_n^{(r)}$ независимы и одинаково распределены. Кроме того,

$$\mathbf{E} Y_k^{(r)} = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{E} (Y_k^{(r)})^2 = p_j^{(r)}(x|z)(1 - p_j^{(r)}(x|z))p_j^{(r)}(z) \leq \frac{p_j^{(r)}(z)}{4},$$

где $p_j^{(r)}(z) = \sum_{x \in S} p_j^{(r)}(x, z)$. По закону повторного логарифма для каждого $\varepsilon > 0$, почти всех $\omega \in \Omega$, любых $j \in T$, $r \in (0, \text{diam}(T)]$ и $n \geq n_2(\omega)$ имеем

$$|Z_n^{(r)}| \leq (1 + \varepsilon) \sqrt{\frac{p_j^{(r)}(z) n \ln \ln n}{2}}.$$

В частности, п.н. при всех достаточно больших n верно неравенство

$$|Z_n^{(r)}| \leq \sqrt{p_j^{(r)}(z) n \ln \ln n}.$$

Поделив обе части последнего неравенства на $\mathbf{N}_{n,j}^{(r)}(z)$, получаем

$$\left| \hat{p}_{n,j}^{(r)}(x|z) - p_j^{(r)}(x|z) \right| \leq \sqrt{\frac{p_j^{(r)}(z) n \ln \ln n}{(\mathbf{N}_{n,j}^{(r)}(z))^2}}. \quad (7)$$

По усиленному закону больших чисел $\mathbf{N}_{n,j}^{(r)}(z)/n \rightarrow p_j^{(r)}(z)$ п.н. при $n \rightarrow \infty$. Заметим, что мы рассматриваем конечное число значений r из множества K_j . Поэтому (7) влечет за собой (6), что и требовалось показать.

Доказательство теоремы 1. Положим $r_0 = r(j)$. Рассмотрим $r \in K_j$. Покажем, что если $r > r_0$, то п.н. при всех достаточно больших n верно соотношение

$$\mathcal{L}\left(X_j^{(1:n)} \mid X^{(1:n)}(B_r(j) \setminus \{j\})\right) < \mathcal{L}\left(X_j^{(1:n)} \mid X^{(1:n)}(B_{r_0}(j) \setminus \{j\})\right). \quad (8)$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}\left(X_j^{(1:n)} \mid X^{(1:n)}(B_{r_0}(j) \setminus \{j\})\right) - \mathcal{L}\left(X_j^{(1:n)} \mid X^{(1:n)}(B_r(j) \setminus \{j\})\right) \\ &= c\left(|S|^{|B_r(j)|-1} - |S|^{|B_{r_0}(j)|-1}\right) \ln n \\ & \quad - \sum_{x \in S, z \in V_r(j)} \mathbf{N}_{n,j}^{(r)}(x, z) \ln \hat{p}_{n,j}^{(r)}(x \mid z) \\ & \quad + \sum_{x \in S, \tilde{z} \in V_{r_0}(j)} \mathbf{N}_{n,j}^{(r_0)}(x, \tilde{z}) \ln \hat{p}_{n,j}^{(r_0)}(x \mid \tilde{z}). \end{aligned} \quad (9)$$

Если $r \in K_j$ и $r > r_0$, то $B_r(j) \neq B_{r_0}(j)$ и

$$|S|^{|B_r(j)|-1} - |S|^{|B_{r_0}(j)|-1} \geq \left(1 - \frac{1}{|S|}\right) |S|^{|B_r(j)|-1}. \quad (10)$$

Учитывая то, что $\hat{p}_{n,j}^{(r)}(x \mid z)$ при каждом $r > 0$ является оценкой максимального правдоподобия величины $p_j^{(r)}(x \mid z)$, а также принимая во внимание (2) (рассматриваем $r \in K_j$, $r > r_0$), приходим к неравенствам

$$\begin{aligned} & \sum_{x \in S, \tilde{z} \in V_{r_0}(j)} \mathbf{N}_{n,j}^{(r_0)}(x, \tilde{z}) \ln \hat{p}_{n,j}^{(r_0)}(x \mid \tilde{z}) \geq \sum_{x \in S, \tilde{z} \in V_{r_0}(j)} \mathbf{N}_{n,j}^{(r_0)}(x, \tilde{z}) \ln p_j^{(r_0)}(x \mid \tilde{z}) \\ &= \sum_{x \in S, z \in V_r(j)} \mathbf{N}_{n,j}^{(r)}(x, z) \ln p_j^{(r_0)}(x \mid \tilde{z}) = \sum_{x \in S, z \in V_r(j)} \mathbf{N}_{n,j}^{(r)}(x, z) \ln p_j^{(r)}(x \mid z). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $\tilde{z}$ является сужением z на $B_{r_0}(j) \setminus \{j\}$. Теперь заметим, что

$$\sum_{x \in S, z \in V_r(j)} \mathbf{N}_{n,j}^{(r)}(x, z) \ln \frac{\hat{p}_{n,j}^{(r)}(x \mid z)}{p_j^{(r)}(x \mid z)} = \sum_{z \in V_r(j)} \mathbf{N}_{n,j}^{(r)}(z) D\left(\hat{p}_{n,j}^{(r)}(\cdot \mid z) \parallel p_j^{(r)}(\cdot \mid z)\right). \quad (12)$$

В силу лемм 1 и 2 получаем, что п.н. при всех достаточно больших n выполнены неравенства

$$\begin{aligned} & \sum_{z \in V_r(j)} \mathbf{N}_{n,j}^{(r)}(z) D\left(\hat{p}_{n,j}^{(r)}(\cdot \mid z) \parallel p_j^{(r)}(\cdot \mid z)\right) \\ & \leq \sum_{z \in V_r(j)} \mathbf{N}_{n,j}^{(r)}(z) \sum_{x \in S} \frac{(\hat{p}_{n,j}^{(r)}(x \mid z) - p_j^{(r)}(x \mid z))^2}{p_j^{(r)}(x \mid z)} \\ & \leq \sum_{z \in V_r(j)} \mathbf{N}_{n,j}^{(r)}(z) \sum_{x \in S} \frac{\ln \ln n}{\mathbf{N}_{n,j}^{(r)}(z) p_j^{(r)}(x \mid z)} \leq \frac{|S|^{|B_r(j)|} \ln \ln n}{p_{j,*}^{(r)}}, \end{aligned} \quad (13)$$

здесь $p_{j,*}^{(r)} := \min\{p_j^{(r)}(x \mid z) : x \in S, z \in V_r(j)\} > 0$, так как мы предположили строгую положительность распределения вероятностей поля X , заданного на конечном множестве T . Поскольку $\ln \ln n = o(\ln n)$ при $n \rightarrow \infty$, видим, что (9)–(13) влекут за собой (п.н. при всех достаточно больших n) выполнение (8).

Установим теперь справедливость (8) при $r \in K_j$, $r < r_0$. Имеем

$$\mathcal{L}\left(X_j^{(1:n)} \mid X^{(1:n)}(B_{r_0}(j) \setminus \{j\})\right) - \mathcal{L}\left(X_j^{(1:n)} \mid X^{(1:n)}(B_r(j) \setminus \{j\})\right)$$

$$= n \left(\sum_{x \in S, \tilde{z} \in V_{r_0}(j)} \frac{N_{n,j}^{(r_0)}(x, \tilde{z})}{n} \ln \frac{\hat{p}_{n,j}^{(r_0)}(x | \tilde{z})}{\hat{p}_{n,j}^{(r)}(x | z)} - c \left(|S|^{|B_{r_0}(j)|-1} - |S|^{|B_r(j)|-1} \right) \frac{\ln n}{n} \right). \quad (14)$$

Мы пользуемся прежними обозначениями, однако теперь z является сужением $\tilde{z}$ на $B_r(j) \setminus \{j\}$, так как $r < r_0$.

По усиленному закону больших чисел с вероятностью единица при $n \rightarrow \infty$ верно соотношение

$$\sum_{x \in S, \tilde{z} \in V_{r_0}(j)} \frac{N_{n,j}^{(r_0)}(x, \tilde{z})}{n} \ln \frac{\hat{p}_{n,j}^{(r_0)}(x | \tilde{z})}{\hat{p}_{n,j}^{(r)}(x | z)} \rightarrow \sum_{x \in S, \tilde{z} \in V_{r_0}(j)} p_j^{(r_0)}(x, \tilde{z}) \ln \frac{p_j^{(r_0)}(x | \tilde{z})}{p_j^{(r)}(x | z)}.$$

Воспользуемся логарифмическим неравенством для сумм, которое означает, что для любых положительных чисел $a_1, \dots, a_m$ и $b_1, \dots, b_m$ имеем

$$\sum_{i=1}^m a_i \ln \frac{a_i}{b_i} \geq \left(\sum_{i=1}^m a_i \right) \ln \frac{\sum_{i=1}^m a_i}{\sum_{i=1}^m b_i},$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $a_i/b_i = \text{const}$, $i = 1, \dots, m$. Получаем

$$\sum_{x \in S, \tilde{z} \in V_{r_0}(j)} p_j^{(r_0)}(x, \tilde{z}) \ln \frac{p_j^{(r_0)}(x | \tilde{z})}{p_j^{(r)}(x | z)} \geq \ln \frac{1}{\sum_{x \in S, \tilde{z} \in V_{r_0}(j)} p_j^{(r_0)}(\tilde{z}) p_j^{(r)}(x | z)} = 0,$$

так как

$$\begin{aligned} \sum_{x \in S, \tilde{z} \in V_{r_0}(j)} p_j^{(r_0)}(\tilde{z}) p_j^{(r)}(x | z) &= \sum_{x \in S, z \in V_r(j), u \in S^{B_{r_0}(j) \setminus B_r(j)}} p_j^{(r_0)}(z, u) p_j^{(r)}(x | z) \\ &= \sum_{x \in S, z \in V_r(j)} p_j^{(r)}(z) p_j^{(r)}(x | z) = 1. \end{aligned}$$

Здесь $p_j^{(r_0)}(z, u) = \mathbf{P}(X(B_r(j) \setminus \{j\}) = z, X(B_{r_0}(j) \setminus B_r(j)) = u)$. Допустим, что для некоторой константы a соотношение $p_j^{(r_0)}(x, \tilde{z}) = a p_j^{(r_0)}(\tilde{z}) p_j^{(r)}(x | z)$ выполнено при всех $x \in S$ и $\tilde{z} \in V_{r_0}(j)$. Тогда $p_j^{(r_0)}(x | \tilde{z}) = a p_j^{(r)}(x | z)$, откуда следует, что $a = 1$. Таким образом, $p_j^{(r_0)}(x | \tilde{z}) = p_j^{(r)}(x | z)$. Ввиду (2) заключаем, что r_0 не является минимальным значением радиуса шара в T с центром в точке j , содержащего окрестность N_j . Полученное противоречие доказывает, что

$$\sum_{x \in S, \tilde{z} \in V_{r_0}(j)} p_j^{(r_0)}(x, \tilde{z}) \ln \frac{p_j^{(r_0)}(x | \tilde{z})}{p_j^{(r)}(x | z)} > 0. \quad (15)$$

Учитывая (14) и (15), а также замечая, что $n^{-1} \ln n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, можем сделать вывод о справедливости (8) и для $r < r_0$ (п.н. при всех достаточно больших n). Теорема 1 полностью доказана.

В заключение отметим, что представляет интерес доказать аналог теоремы 1, относящийся к выборке зависимых одинаково распределенных марковских полей $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$. Такого рода результат позволил бы при определенных условиях для однородного марковского поля $X = \{X_j, j \in \mathbf{Z}^d\}$ рассматривать $X^{(k)} = X(T_k)$, где $k \in \mathbf{N}$, а попарно непересекающиеся конечные множества $T_1, T_2, \dots$ получались бы сдвигами множества T_1 . Для этого потребовался бы, например, результат, описывающий возможный рост функций, берущихся от различных частей траектории одного марковского поля X . Мы также не затрагиваем здесь проблемы фазовых переходов для гиббсовского поля, заданного на бесконечном параметрическом множестве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вунклер Г. Анализ изображений, случайные поля и динамические методы Монте-Карло: Математические основы. Новосибирск: Изд-во СО РАН, филиал «ГЕО», 2002, 343 с.
2. Bianchi A. J., Giolo S. R., Soler J. P., Leonardi F. Finding the basic neighborhood in variable range Markov random fields: application in SNP association studies. arXiv:1302.5589v1.
3. Brémaud P. Markov Chains. Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation, and Queues. New York: Springer, 1999, 444 p.
4. Bulinski A., Spodarev E. Introduction to random fields. — Lecture Notes in Math., 2013, v. 2068, p. 277–335.
5. Csiszár I., Talata Z. Consistent estimation of the basic neighborhood of Markov random fields. — Ann. Statist., 2006, v. 34, № 1, p. 123–145.
6. Csiszár I., Talata Z. Context tree estimation for not necessarily finite memory process, via BIC and MDL. — IEEE Trans. Inform. Theory, 2006, v. 52, № 3, p. 1007–1016.
7. Löcherbach E., Orlandi E. Neighborhood radius estimation for variable-neighborhood random fields. — Stochastic Process. Appl., 2011, v. 121, № 9, p. 2151–2185.

Поступила в редакцию
2.II.2015

© 2015 г.

ВИСКОВ О. В.* , ХОХЛОВ В. И.*

**О ЧЕТЫРЕХ НАПРАВЛЕНИЯХ
ИССЛЕДОВАНИЙ Ю. В. ПРОХОРОВА
И ИХ ПЕРСПЕКТИВАХ**

Представлены направления исследований Ю. В. Прохорова и его школы периода 1999–2013 гг. В ходе этих исследований решен целый ряд задач теории вероятностей, в которых равномерное распределение выступает в качестве предельного или исходного, установлен ряд моментных неравенств для классических распределений, на основе обобщенных моментных тождеств разработаны новые методы решения задачи линеаризации для многочленов, ортогональных относительно классических распределений, а также методы получения моментных характеристик этих распределений. По каждому из этих направлений исследований отмечены возможные пути их продолжения и развития.

Ключевые слова и фразы: равномерное распределение, равномерное распределение в многомерном кубе, многомерное гауссовское распределение; формула суммирования Пуассона; дробная часть вектора; представление целых чисел квадратичными формами, аналоги изопериметрического неравенства Чернова, моментные неравенства, вероятностные многочлены Эрмита, метод Стейна–Чена, обобщенное тождество Стейна, обобщенное тождество Чена, характеристические тождества, ортогональные многочлены, линеаризация произведений ортогональных многочленов.

Из всего обширного научного наследия Ю. В. Прохорова авторы посчитали для себя возможным представить ту его часть, которая создавалась им и его школой в последние годы (1999–2013 гг.) его жизни и творчества.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия; e-mail: tvp@tvp.ru; viskov@mi.ras.ru