Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Ульянов, О свойствах многочленов от случайных элементов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2015, том 60, выпуск 2, 391–402

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4626>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 15:41:13

© 2015 г.

УЛЬЯНОВ В. В.*

О СВОЙСТВАХ МНОГОЧЛЕНОВ ОТ СЛУЧАЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ¹⁾

В работе рассматриваются различные свойства многочленов от случайных элементов: оценки характеристических функционалов многочленов, стохастическое обобщение теоремы Виноградова о среднем, характеристизационная проблема, оценка вероятностей попадания в шары. При этом результаты охватывают случайные элементы со значениями как в конечномерных, так и в бесконечномерных гильбертовых пространствах.

Ключевые слова и фразы: многочлены от случайных величин, оценки для характеристических функций, теорема Виноградова о среднем, характеристизационная проблема, проблема устойчивости, гауссовская мера, поведение хвостов распределения, распределение квадратичных форм, сингулярные распределения, распределение Кантора.

1. Введение. Пусть X — случайный элемент со значениями в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$. Рассмотрим последовательность $X_1, X_2, \dots$ независимых копий X . Положим

$$S_n = n^{-1/2}(X_1 + \dots + X_n), \quad g_n(t) = \mathbf{E} \exp\{itf(S_n)\},$$

где f — измеримое отображение $\mathbb{H}$ в действительную прямую $\mathbf{R}$.

Для нахождения оценок скорости сходимости в функциональных предельных теоремах и построения асимптотических разложений применяются неравенства для $|g_n(t)|$ вида

$$|g_n(t)| \leq c(n^{-A} + |t|^{-D}), \quad (1)$$

где c, A и D — некоторые постоянные. Оценки (1) можно вывести, используя так называемое неравенство симметризации (см. [1] и [2], в частности следствие 3.26 в [2] и замечание после него, относящееся к работе Вейля [3]; см. также [4]). Например, в случае $\mathbb{H} = \mathbf{R}$ такой подход приведет к следующему неравенству (см. [5, леммы 3.1, 4.1, 4.2]). Положим

$$f(x) = x^m + \alpha_{m-1}x^{m-1} + \dots + \alpha_0, \quad m \geq 2. \quad (2)$$

Тогда (1) справедливо с $D = (m \cdot 2^m)^{-1}$ и произвольным $A > 0$ для t , удовлетворяющих условию

$$|t| \leq c_1 n^{(m-1)/2-\varepsilon}, \quad (3)$$

где $\varepsilon > 0$.

Отметим, что если случайный вектор X имеет дискретное распределение, то $g_n(t, a)$ является почти периодической функцией. Поэтому

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |g_n(t, a)| = 1.$$

Следовательно, неравенство (1) в общем случае справедливо лишь при изменении t в конечном интервале, зависящем от n и f .

В п. 2 настоящей работы приведены оценки для характеристических функций $g_n(t, a)$, улучшающие неравенство (1) в том смысле, что значение D значительно увеличивается, оказываясь кратным $1/m$. Как показано ниже в теореме 4, содержащей

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики; Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия; e-mail: vulyanov@cs.msu.ru

¹⁾ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00196).

двусторонние оценки для $g_n(t, a)$, такой порядок является правильным. Уточнения неравенства (1) в п. 2 получены при условии, что выполнены некоторые условия на тип распределения случайного элемента X . Если мы хотим отказаться от подобных ограничений, нам потребуется стохастическое обобщение знаменитой теоремы И. М. Виноградова о среднем. Этому стохастическому обобщению посвящен п. 3. В частности, для случайной величины со значениями $1, 2, \dots, P$, принимаемыми с равными вероятностями, результат совпадает по порядку по P с оригинальной оценкой Виноградова. В пп. 4 и 5 настоящей работы рассмотрены свойства квадратичных форм, которые привлекают повышенное внимание исследователей в последние годы. В п. 4 даны достаточные условия, при которых распределение конечной квадратичной формы от независимых одинаково распределенных симметричных случайных величин однозначно определяет исходное распределение. Также для квадратичных форм доказана теорема устойчивости. В п. 5 построены двусторонние оценки для плотности $p(u, a)$ случайной величины $|Y - a|^2$, где Y есть гауссовский случайный элемент в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$. Оценки являются точными в том смысле, что для всех достаточно больших значений u отношение верхней оценки к нижней равно 8 и не зависит от параметров распределения $|Y - a|^2$. Из полученных оценок вытекают двусторонние оценки для вероятностей $\mathbf{P}(|Y - a| > r)$.

В настоящей работе используются и обсуждаются результаты, полученные Ю. В. Прохоровым с соавторами в 1995–2000 гг. (см. [6]–[11]). Асимптотическое поведение квадратичных и почти квадратичных форм, возникающих в математической статистике, рассмотрено в [12]. См. также [13].

2. Оценки для характеристических функций многочленов от случайных элементов. Как отмечено во введении, неравенство (1) можно улучшить так, что D увеличится (см. [6], [7]). Улучшение получено при некоторых условиях на тип распределения случайного элемента X :

- а) распределение X имеет невырожденную дискретную компоненту;
- б) при некотором n_0 распределение суммы S_{n_0} имеет абсолютно непрерывную компоненту;
- с) характеристическая функция случайной величины X удовлетворяет некоторым условиям «в среднем», в частности, эти условия выполнены для ряда сингулярных распределений.

Напомним, что если $\mathbf{P}, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ обозначают три вероятностные меры в $\mathbb{H}$ и γ есть положительное число, $0 < \gamma \leq 1$, то мера $\mathbf{P}_1$ называется *компонентой* меры $\mathbf{P}$ веса γ , когда

$$\mathbf{P} = \gamma \mathbf{P}_1 + (1 - \gamma) \mathbf{P}_2.$$

В случае а) справедлива следующая теорема (см. [6, теорема 2]).

Теорема 1. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные (н.о.р.) случайные величины в $\mathbf{R}$ с распределением F , имеющим невырожденную дискретную компоненту. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и целого $m \geq 2$ существуют абсолютные постоянные c_3, c_4 и постоянная c_2 , зависящая от F, ε и m , такие, что для всех $n \geq 1$ и любого t , удовлетворяющего (3), справедливо неравенство

$$\sup_{a \in \mathbf{R}} |\mathbf{E} \exp\{itf(S_n + a)\}| \leq c_2 \left(n^{-c_3/(m^2 \ln m)} + \left(\frac{\sqrt{n}}{|t|} \right)^{c_4/m} \right), \quad (4)$$

где f — многочлен, определенный в (2).

Рассмотрим теперь случай абсолютно непрерывных компонент. Предположим, что случайный вектор Y в $\mathbf{R}^k$ имеет распределение $\mathbf{P}_Y$ с абсолютно непрерывной компонентой веса λ . Тогда $\mathbf{P}_Y$ имеет абсолютно непрерывную компоненту веса γ , $0 < \gamma < \lambda$, такую, что плотность этой компоненты ограничена. Возьмем $\gamma = \lambda/2$. Тогда (см. [14, с. 4] или [15, § 16]) распределение свертки $\mathbf{P}_Y * \mathbf{P}_Y$ имеет компоненту

веса $(\lambda/2)^2$ с равномерно непрерывной плотностью, скажем, $r(x)$, на $\mathbf{R}^k$. Если $r(a_0) = r_0 > 0$ при некотором a_0 , то существует η такое, что при всех x , для которых $|x - a_0| \leq \eta$, имеем $r(x) \geq r_0/2$. Следовательно, $\mathbf{P}_Y * \mathbf{P}_Y$ имеет компоненту, равномерно распределенную на некотором шаре.

В случае б) справедлива следующая теорема (см. [6, теорема 3]).

Теорема 2. Пусть для вектора $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(k)})$ определена функция

$$f_0(x) = (x^{(1)})^m + \dots + (x^{(k)})^m, \quad m \geq 2,$$

и $X_1, X_2, \dots$ обозначают последовательность н.о.р. случайных векторов в $\mathbf{R}^k$. Предположим, что при некотором n_0 распределение суммы $X_1 + \dots + X_{n_0}$ имеет абсолютно непрерывную компоненту. Пусть η обозначает действительное число такое, что распределение суммы $X_1 + \dots + X_{2n_0}$ имеет компоненту веса δ , равномерно распределенную на шаре $\{x: |x - a_0| \leq \eta\}$. Тогда существуют постоянные c_5, c_6 , зависящие от k, n_0, δ, η и такие, что для всех $n \geq 6n_0/\delta$ и $t \neq 0$ имеем

$$\sup_{a \in \mathbf{R}^k} |\mathbf{E} \exp\{it f_0(S_n + a)\}| \leq c_5(\exp\{-c_6 n\} + |t|^{-k/m}).$$

Явные выражения для величин c_5, c_6 см. в [6, теорема 3]. Для компонент с дифференцируемой плотностью результат теоремы 2 можно уточнить (см. [6, теорема 4]).

Рассмотрим теперь многочлен общего вида

$$f(x) = \sum_{m_1=0}^m \dots \sum_{m_k=0}^m \alpha(m_1, \dots, m_k) x_1^{m_1} \dots x_k^{m_k}, \quad (5)$$

где $\alpha(0, \dots, 0) = 0$. Пусть M обозначает степень многочлена $f(x)$, т.е.

$$M = \max\{m_1 + \dots + m_k: \alpha(m_1, \dots, m_k) \neq 0\}.$$

Очевидно, что $kt \geq M$. Положим

$$\alpha_* = \max |\alpha(m_1, \dots, m_k)| > 0,$$

где максимум берется по всем $m_1, \dots, m_k$ таким, что

$$0 \leq m_1, \dots, m_k \leq m, \quad m_1 + \dots + m_k = M.$$

Справедлива следующая теорема (см. [6, теорема 5]).

Теорема 3. Пусть Z — случайный вектор в $\mathbf{R}^k$ с независимыми стандартными нормальными координатами $Z^{(i)}, i = 1, \dots, k$. Для многочлена $f(x)$, определенного в (5), и имеющего степень $M \geq 2$, справедливо неравенство

$$\sup_{a \in \mathbf{R}^k} |\mathbf{E} \exp\{it f(Z + a)\}| \leq c_7 |\alpha_* t|^{-1/m} \ln^{c_8}(2 + |\alpha_* t|)$$

с некоторыми постоянными c_7, c_8 , зависящими от k, M, m .

Явные выражения для величин c_7, c_8 см. в [6, теорема 5].

Отметим, что до сих пор мы приводили верхние оценки для характеристических функционалов. В некоторых случаях удается получить двусторонние оценки, при этом порядки по t для верхней и нижней оценок совпадают. Положим

$$f_1(x) = x^{(1)} \dots x^{(k)}, \quad k \geq 2.$$

Пусть Z , как и выше, есть случайный вектор в $\mathbf{R}^k$ с независимыми стандартными нормальными координатами. Применяя теорему 3, мы придем лишь к неравенству

$$|\mathbf{E} \exp\{it f_1(Z)\}| \leq c(k) |t|^{-1} \ln^{k-1}(2 + |t|).$$

В действительности можно не только получить более точную верхнюю оценку, но и дополнить ее нижней с таким же порядком по t (см. [6, теорема 6]).

Теорема 4. Для любого $k \geq 2$ и всех $|t| \geq 1$ имеем

$$l_k |t|^{-1} \ln^{k-2} |t| \leq |\mathbf{E} \exp\{itf_1(Z)\}| \leq L_k |t|^{-1} \ln^{k-2}(2 + |t|)$$

с некоторыми величинами l_k, L_k , зависящими только от k .

Явные выражения для величин l_k, L_k см. в [6, теорема 6].

Перейдем к рассмотрению случая, когда характеристическая функция случайной величины X удовлетворяет некоторым условиям «в среднем». Пусть $g_X(t) = \mathbf{E} \exp\{itX\}$ есть характеристическая функция X . Положим для $T > 0$

$$\phi_X(T) = \int_{-T}^T |g_X(t)| dt.$$

Справедлива следующая теорема (см. [7, теорема 1]).

Теорема 5. Пусть X — случайная величина такая, что $|X| \leq 1$. Предположим, что существуют неубывающая положительная функция $\phi(t)$ на $(0, \infty)$ и постоянная ε такая, что $0 \leq \varepsilon < 1/m$, для которых при всех $t \geq 1$ и $b \geq 1$ выполнено неравенство

$$\phi_X(bt) \leq b^\varepsilon \phi(t). \quad (6)$$

Тогда при $|t| \geq 1$ справедлива оценка

$$\left| \mathbf{E} \exp\{itf(X)\} \right| \leq c\phi(|t|)|t|^{-1/m}, \quad (7)$$

где многочлен $f(x)$ задается формулой (2) и c есть постоянная, не зависящая от t .

Явное выражение для величины c см. [7, формулы (2.5) и (2.10)].

З а м е ч а н и е 1. Если характеристическая функция $g_X(t)$ такова, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_X(t)| dt = A < \infty, \quad (8)$$

мы, очевидно, можем в теореме 5 взять $\varepsilon = 0$ и $\phi(t) = A$. Следовательно, при условии (8) получаем

$$\left| \mathbf{E} \exp\{itf(X)\} \right| \leq cA|t|^{-1/m}. \quad (9)$$

Далее, при выполнении условия (8) можно отказаться от ограничения $|X| \leq 1$ (см. [6, лемма 7 и формулы (22), (23)]).

З а м е ч а н и е 2. Можно показать (см. [7, следствие 3]), что функция распределения случайной величины X , удовлетворяющая условиям теоремы 5, с необходимостью является липшицевой порядка $1 - \varepsilon$.

Условие (6) выполнено для многих абсолютно непрерывных распределений (см. [16, гл. VI, § 3]) и для некоторых сингулярных распределений (см. [17]–[19] и [16, гл. XII, §§ 10, 11]).

Приведем пример сингулярного распределения случайной величины X , которое остается сингулярным, будучи свернуто само с собой любое конечное число раз. Однако поведение характеристической функции полиномиального преобразования $f(X)$ почти такое же, каким оно было бы в предположении гладкости распределения случайной величины X (см. теорему 2) или даже его гауссовости (см. теорему 3).

Рассмотрим распределение Кантора с характеристической функцией

$$L(t) = \prod_{j=1}^{\infty} \cos(2\pi \cdot 3^{-j}t). \quad (10)$$

В [17] показано, что распределение Кантора удовлетворяет условию Крамера, т.е.

$$\limsup_{|t| \rightarrow \infty} |L(t)| < 1. \quad (11)$$

В [7, теорема 2] получена более точная оценка, чем (11), а именно: для всех $|t| \geq 8.5$ справедливо неравенство

$$|L(t)| \leq e^{-0.027}.$$

Кроме того, оказывается, что сингулярно не только само распределение Кантора, но и все его k -кратные свертки [7, теорема 2], имеющие характеристические функции $L^k(t)$. Вместе с тем поведение характеристической функции такого сингулярного распределения при полиномиальном преобразовании аналогично поведению абсолютно непрерывного распределения. Справедлива следующая теорема (см. [7, следствие 5]).

Теорема 6. Пусть $f(x)$ — многочлен, определенный формулой (2) с $m \geq 2$, а ε таково, что $0 < \varepsilon < 1/m$. Пусть случайная величина X имеет сингулярное распределение, соответствующее характеристической функции $L^k(t)$, где k — любое целое, удовлетворяющее условию $k \geq 0.027^{-1} \ln(2/(3^\varepsilon - 1))$. Тогда

$$\mathbf{E} \exp\{itf(X)\} = O(|t|^{\varepsilon-1/m}) \quad \text{при } |t| \rightarrow \infty.$$

Доказательства указанных выше теорем 1–4 опираются на неравенства для тригонометрических сумм и интегралов. При наличии у распределения невырожденной дискретной компоненты используются оценки типа Виноградова для тригонометрических сумм (см. [20, предложение 4.2 в § 4, гл. VIII]). Если при некотором n_0 распределение суммы S_{n_0} имеет абсолютно непрерывную компоненту, то в доказательствах применяется неравенство Виноградова для тригонометрических интегралов (см. [21, лемма 4, гл. 2]) и его обобщения на многомерный случай (см. [22, теорема 5 в § 3, гл. 1]). Уточнения оценки (1), полученные в [6], аналогичны по форме тем улучшениям, к которым приводит метод Виноградова для тригонометрических сумм по сравнению с результатами Вейля (см. [21, введение]).

3. Стохастическое обобщение теоремы Виноградова о среднем. Теоремы 1–4 приведенные выше получены при некоторых условиях на тип распределения случайного элемента X . Желание отказаться от этих условий приводит к необходимости стохастического обобщения знаменитой теоремы Виноградова о среднем (см. [21]). Такой стохастический аналог был получен в [8]. Введем необходимые обозначения.

Пусть $J_k(P)$ обозначает число решений системы диофантовых уравнений

$$\sum_{i=1}^k (x_i^j - y_i^j) = 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

где $1 \leq x_i, y_i \leq P$ при $i = 1, \dots, k$.

Поскольку для любого целого x имеем

$$\int_0^1 \exp\{2\pi i \alpha x\} d\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0, \\ 0, & \text{если } x \neq 0, \end{cases}$$

получаем

$$J_k(P) = \int_0^1 \dots \int_0^1 \left| \sum_{x=1}^P \exp\{2\pi i f(x)\} \right|^{2k} d\alpha_m \dots d\alpha_1,$$

где $f(x) = \alpha_m x^m + \dots + \alpha_1 x$.

Оценки роста величины $J_k(P)$ при растущем P имеют важные приложения в аналитической теории чисел. И. М. Виноградов в 1934 г. доказал следующую теорему для $J_k(P)$.

Теорема 7. Пусть $\tau > 0$, $m > 2$ — целые числа такие, что $k \geq m\tau$, и пусть $P \geq 1$. Тогда

$$J_k(P) \leq c_\tau \cdot P^{2k - \Delta(\tau)},$$

где

$$\Delta(\tau) = 0.5m(m+1)(1 - (1 - m^{-1})^\tau), \quad c_\tau = (m\tau)^{6m\tau} (2m)^{4m(m+1)\tau}.$$

Оценки для $J_k(P)$ позволяют сделать заключение о величине тригонометрических сумм Вейля

$$F = \sum_{x=1}^P \exp\{2\pi i f(x)\}$$

и тригонометрических сумм, включающих функции, для которых есть приемлемые полиномиальные приближения. В силу наличия большого числа приложений для оценок такого типа И. М. Виноградов смог успешно применить свой метод к самым разным проблемам теории чисел. Дальнейшие уточнения теоремы Виноградова о среднем можно найти, например, в работах [23]–[25], см. также обсуждение и ссылки в этих работах.

Очевидно, что если случайная величина S принимает значения $1, 2, \dots, P$ с равными вероятностями $1/P$, то

$$\mathbf{E} \exp\{2\pi i f(S)\} = \frac{F}{P}.$$

В п. 2 мы показали, как, используя оценки для $|F|$, известные в теории чисел, можно уточнить оценки сверху для $|\mathbf{E} \exp\{2\pi i f(S_n)\}|$, где S_n есть нормированная сумма н.о.р. случайных величин $X_1, \dots, X_n$ таких, что распределение X_1 имеет невырожденную дискретную компоненту (см. [6]).

Стохастическое обобщение теоремы Виноградова о среднем, представляющее самостоятельный интерес, может быть использовано при построении оценок сверху для $|\mathbf{E} \exp\{2\pi i f(S_n)\}|$ без каких-либо условий на тип распределения X_1 . Справедлива следующая теорема (см. [8, теорема 2]).

Теорема 8. Пусть S обозначает произвольную случайную величину, а $P \geq 1$, $m > 2$, $\tau \geq 1$ и k суть положительные целые числа. Положим $f(x) = \alpha_m x^m + \dots + \alpha_1 x$ и

$$I_k(P) = P^{-(m-1)m/2} \times \int_{-P^{m-1}}^{P^{m-1}} \int_{-P^{m-2}}^{P^{m-2}} \dots \int_{-1}^1 \left| \mathbf{E} \exp\{2\pi i f(S)\} \mathbf{1}_{\{-P < S \leq P\}} \right|^{2k} d\alpha_m \dots d\alpha_1, \quad (12)$$

где $\mathbf{1}_A$ обозначает индикаторную функцию события A . Тогда для всех $k = mt$ существует постоянная $D_\tau = D(k, \tau)$, зависящая только от m и τ , для которой

$$I_k(P) \leq D_\tau P^{2k - \Delta(\tau)} \left(\sup_I \mathbf{P}(S \in I) \right)^{2k}, \quad (13)$$

где

$$\Delta(\tau) = 0.5m(m+1)(1 - (1 - m^{-1})^\tau)$$

и супремум берется по всем интервалам $I = \{x: a < x \leq a+1\}$ с произвольным действительным a .

З а м е ч а н и е 3. Если S принимает значения $1, 2, \dots, P$ с равными вероятностями, то $\mathbf{E} \exp\{2\pi i f(S)\}$ есть периодическая функция с периодом 1 относительно каждого из коэффициентов $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Таким образом, $I_k(P) = 2^m P^{-2k} J_k(P)$, и наш результат совпадает с оригинальной оценкой И. М. Виноградова по порядку по P .

З а м е ч а н и е 4. Если S равномерно распределена на $[-P, P]$, можно получить следующую оценку, более точную, чем та, которую дает в этом случае теорема 8 (см. [8, леммы 9 и 10]).

Теорема 9. Пусть m и b — положительные целые числа и $b \geq (m+1)/2$. Пусть P — действительное число, $P \geq 32$, и S — случайная величина, равномерно распределенная на $[-P, P]$. Тогда для $k = bt$ имеем

$$I_k(P) \leq 2^{5m^2+m} P^{-m^2} \frac{1}{1 - m/(2b)}.$$

З а м е ч а н и е 5. Доказательство теоремы 8 опирается на оригинальное доказательство теоремы Виноградова о среднем (см. [21]), которое оказалось более подходящим для обобщения на произвольные случайные величины с нерешетчатым носителем, чем p -адическое доказательство Ю. В. Линника, А. А. Карацубы и Т. Вули (см., например, [22], [24], [25]). В частности, теорема 8 доказывается индукцией по обоим параметрам P и τ одновременно. В теореме 10 обоснован первый шаг индукции, когда $\tau = 1$ и число P произвольно. В оригинальной теореме И. М. Виноградова для решетчатого случая этот шаг является тривиальным.

Теорема 10. *Предположим, что условия теоремы 8 выполнены. Тогда для всех $k, 1 \leq k \leq m$, имеем*

$$I_k(P) \leq M_k P^{(3k-1)/2} \left(\sup_I \mathbf{P}(S \in I) \right)^{2k},$$

где M_k — постоянная, зависящая только от k и m .

4. Характеризационное свойство и устойчивость для конечных квадратичных форм. Перейдем теперь к рассмотрению частного, но чрезвычайно важного как в теории, так и в приложениях случая функционалов от случайных величин — к квадратичным формам. Начнем с характеризационного свойства для конечных квадратичных форм.

Пусть $Z_1, \dots, Z_n$ — н.о.р. стандартные нормальные случайные величины и $a_1, \dots, a_n$ — действительные числа такие, что $a_1 + \dots + a_n \neq 0$ и $a_1^2 + \dots + a_n^2 \neq 0$. Предположим, что $X_1, \dots, X_n$ — н.о.р. случайные величины такие, что $a_1 Z_1 + \dots + a_n Z_n \stackrel{d}{=} a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$, где символ $\stackrel{d}{=}$ обозначает равенство по распределению. Тогда по теореме Крамера о разложении для нормального закона (см. [27, теорема 3.1.4]) случайные величины X_i также нормальны.

Е. Лукач и Р. Г. Лаха (см. [28, теорема 9.1.1]) рассмотрели более общую проблему. А именно, пусть $X_1, \dots, X_n$ — н.о.р. случайные величины такие, что их линейная комбинация $L = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$ имеет аналитическую характеристическую функцию и $a_1^s + \dots + a_n^s \neq 0$ для всех $s = 1, 2, \dots$. Тогда распределение X_1 однозначно определяется распределением L .

В этой части работы мы дадим аналогичное характеризационное свойство для квадратичной формы от н.о.р. случайных величин $Z_1, \dots, Z_n$. Также для таких квадратичных форм установлено свойство устойчивости.

Рассмотрим симметричную матрицу $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$. Пусть

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

— квадратичная форма от переменных $x_1, \dots, x_n$. Предположим, что форма Q невырождена в том смысле, что матрица A ненулевая. Предположим также, что $Z_1, \dots, Z_n$ — н.о.р. случайные величины с симметричным распределением F .

Будем говорить, что пара (Q, F) обладает *характеризационным свойством* (СР), тогда и только тогда, когда для любой последовательности н.о.р. симметричных случайных величин $X_1, \dots, X_n$ равенство

$$Q(Z_1, \dots, Z_n) \stackrel{d}{=} Q(X_1, \dots, X_n) \quad (14)$$

влечет за собой равенство $Z_1 \stackrel{d}{=} X_1$.

З а м е ч а н и е 6. В определении СР требуется, чтобы распределения случайных величин $X_1, \dots, X_n$ были симметричны. В противном случае проблема не имеет решения, даже когда $n = 1$ и $Q(x_1) = x_1^2$. Равенство (14) выполнено как для $X_1 = Z_1$, так и для $X_1 = |Z_1|$.

З а м е ч а н и е 7. Если распределение F симметрично, то ответ в одномерном случае тривиален, т.е. любая пара (Q, F) обладает СР. Поэтому всюду ниже будем предполагать, что $n \geq 2$.

Нас интересуют достаточные условия, при которых пара (Q, F) обладает СР. Решение проблемы зависит от элементов матрицы A , при этом возможны следующие варианты.

1. $a_{ii} = 0$ для всех $i = 1, \dots, n$.

2. $a_{ii} \neq 0$ при некотором $i = 1, \dots, n$.

2.1. $a_{11}^{2k+1} + a_{22}^{2k+1} + \dots + a_{nn}^{2k+1} \neq 0$ для всех $k = 0, 1, 2, \dots$.

2.2. $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = 0$.

2.2.1. $a_{ij} = 0$ для всех $i \neq j$.

2.2.2. $a_{ij} \neq 0$ при некоторых $i \neq j$.

2.3. $a_{11}^{2k+1} + a_{22}^{2k+1} + \dots + a_{nn}^{2k+1} = 0$ при некотором $k = 1, 2, \dots$.

К настоящему моменту ответ получен лишь в случаях 1, 2.1 и 2.2.1.

Определим теперь класс $\mathcal{F}$ вероятностных распределений так, что $F \in \mathcal{F}$ в том и только том случае, когда выполнены два условия:

(C1) F имеет моменты $\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x)$ любого порядка k ;

(C2) F однозначно определяется моментами $\alpha_1, \alpha_2, \dots$.

В следующих примерах показано, когда вероятностное распределение F принадлежит классу $\mathcal{F}$.

П р и м е р 1. Если F имеет аналитическую характеристическую функцию, то $F \in \mathcal{F}$.

Напомним (см., например, [29, § 7.2]), что характеристическая функция аналитична тогда и только тогда, когда

(i) выполнено условие (C1) и

(ii) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_{2n}^{1/(2n)} / (2n) < \infty$.

Из второго условия вытекает (C2) (см., например, [28, гл. 9]).

Говорят, что вероятностное распределение F удовлетворяет *условию Крамера* СС, тогда и только тогда, когда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{h|x|\} dF(x) < \infty \quad \text{при некотором } h > 0.$$

Пусть F удовлетворяет СС, тогда $F \in \mathcal{F}$.

Это вытекает из того факта, что F удовлетворяет СС тогда и только тогда, когда его характеристическая функция аналитична (см., например, [29, § 7.2]).

П р и м е р 2. Если моменты $\{\alpha_k\}$ распределения F удовлетворяют условию Карлемана, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{2n}^{-1/(2n)} = \infty, \quad (15)$$

то $F \in \mathcal{F}$.

Действительно, условие (15) влечет однозначное определение распределения через его моменты (проблема моментов) для всех элементов из $\mathcal{F}$ (см., например, [30, теорема 1.10]).

Заметим, что условие Карлемана слабее, чем СС. Другие примеры вероятностных распределений, принадлежащих $\mathcal{F}$, а также подробное обсуждение проблемы моментов и близких к ней вопросов (см., например, в [31], [32, разд. VII.3] и [33, разд. 8.12 и 11]).

Справедлива следующая теорема (см. [10, теорема 3.2.1]).

Теорема 11. Пусть $F \in \mathcal{F}$ и матрица A такова, что $a_{ii} = 0$ для всех $i = 1, \dots, n$. Тогда (Q, F) обладает СР.

Пример 3. Пусть Z_1, Z_2, Z_3 — н.о.р. стандартные нормальные случайные величины и X_1, X_2, X_3 — н.о.р. симметричные случайные величины такие, что $Z_1 Z_2 - Z_2 Z_3 \stackrel{d}{=} X_1 X_2 - X_2 X_3$. Тогда по теореме 12 случайные величины X_1, X_2, X_3 — стандартные нормальные.

Справедлива следующая теорема (см. [10, теорема 3.2.2]).

Теорема 12. Пусть $F \in \mathcal{F}$ и матрица A такова, что $a_{11}^{2k+1} + a_{22}^{2k+1} + \dots + a_{nn}^{2k+1} \neq 0$ для всех $k = 0, 1, 2, \dots$. Тогда (Q, F) обладает СР.

Пример 4. Пусть Z_1, Z_2 — н.о.р. случайные величины с распределением F и плотностью

$$p(x) = \frac{1}{4} \exp\{-|x|^{1/2}\}, \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (16)$$

Тогда $F \in \mathcal{F}$ (см. [33, гл. 11]).

Пусть X_1, X_2 — н.о.р. симметричные случайные величины такие, что $2Z_1^2 + 4Z_1 Z_2 - Z_2^2 \stackrel{d}{=} 2X_1^2 + 4X_1 X_2 - X_2^2$. Тогда по теореме 2 случайные величины X_1 и X_2 имеют плотность, также определяемую формулой (16).

Справедлива следующая теорема (см. [10, теорема 3.2.3]).

Теорема 13. Пусть $a_{ii} \neq 0$ при некотором $i \in \{1, \dots, n\}$, но $a_{11} + \dots + a_{nn} = 0$ и $a_{ij} = 0$ для всех $j \neq i$. Тогда для любого F пара (Q, F) не обладает СР.

Пример 5. Пусть случайная величина Z с симметричным распределением F не зависит от случайной величины ζ такой, что $\mathbf{P}(\zeta = 1) = \mathbf{P}(\zeta = -1) = 1/2$, и пусть $c > 0$ — произвольное действительное число. Положим $X = \zeta(Z^2 + c)^{1/2}$. Предположим теперь, что обе последовательности $Z, Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ и $X, X_1, X_2, \dots, X_n$ состоят из н.о.р. случайных величин. В условиях теоремы 13, изменяя значение постоянной c , находим множество симметричных распределений случайной величины X_1 , для которых (14) выполнено. В частности, если $Z_1^2 - Z_2^2 \stackrel{d}{=} X_1^2 - X_2^2$, то распределения X_1 и Z_1 могут быть различны.

Пример 5 доказывает теорему 13. Доказательства теорем 11 и 12 опираются на следующие факты:

- а) если $F \in \mathcal{F}$, то X_1 имеет моменты $\mathbf{E} X_1^k$ любого порядка k ;
- б) при сделанных предположениях имеем $\mathbf{E} X_1^k = \mathbf{E} Z_1^k$ для всех $k = 1, 2, \dots$.

Имеет место также теорема устойчивости (см. [10, теорема 3.2.4]).

Теорема 14. Допустим, что пара (Q, F) обладает СР. Пусть $X_{N,1}, \dots, X_{N,n}$, $N = 1, 2, \dots$, — серии н.о.р. симметричных случайных величин и

$$Q(X_{N,1}, \dots, X_{N,n}) \xrightarrow{d} Q(Z_1, \dots, Z_n) \quad \text{при } N \rightarrow \infty,$$

где символ $\xrightarrow{d}$ означает сходимость по распределению. Тогда

$$X_{N,1} \xrightarrow{d} Z_1 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

В доказательстве теоремы 14 используется плотность семейства последовательностей квадратичных форм.

5. Распределение квадратичных форм от гауссовских случайных величин. Пусть $\mathbb{H}$ есть сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $|x| = (x, x)^{1/2}$, $x \in \mathbb{H}$. Через Y обозначим $\mathbb{H}$ -значный гауссовский случайный элемент с нулевым средним и ковариационным оператором V , тогда характеристический функционал случайного элемента Y имеет вид

$$\mathbf{E} \exp\{i(x, Y)\} = \exp\left(-\frac{(Vx, x)}{2}\right), \quad x \in \mathbb{H},$$

где V определяется для $x, z \in \mathbb{H}$ формулой $(Vx, z) = \mathbf{E}(Y, x)(Y, z)$. Предположим, что собственные значения σ_j^2 , $j = 1, 2, \dots$, ковариационного оператора V упорядочены так, что

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2 > \sigma_{k+1}^2 \geq \sigma_{k+2}^2 \geq \dots$$

при некотором $k \geq 1$, обозначающем здесь и далее кратность σ_1^2 . Известно, что в $\mathbb{H}$ существует ортонормированный базис $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ такой, что $Ve_i = \sigma_i^2 e_i$, или $Y = \sum_{i=1}^\infty Y_i e_i$, где $Y_i = (Y, e_i)$ суть независимые действительные гауссовские случайные величины с нулевыми средними и дисперсиями σ_i^2 . Плотность случайной величины $|Y - a|^2$ обозначим $p(u, a)$, $u \geq 0$, $a \in \mathbb{H}$. Пусть $f_k(u, a)$ есть плотность случайной величины $\sum_{i=1}^k (Y_i - a_i)^2$. Напомним, что вид плотности $f_k(u, a)$ известен (см., например, [34, т. 3, с. 1031]).

Положим $R = \sum_{j=k+1}^\infty (Y_j - a_j)^2$. Заметим, что $\mathbf{E} R = \sum_{j=k+1}^\infty (\sigma_j^2 + a_j^2)$.

Пусть $u_0 = 2k(1 - \sigma_{k+1}^2 \sigma_1^{-2})^{-2} \mathbf{E} R$, $\bar{a}_i = (a_1, \dots, a_i)$.

Справедлива следующая теорема (см. [11, теорема 1]).

Теорема 15. *Предположим, что $k \geq 3$.*

а) Для всех $u \geq 0$ и $a \in \mathbb{H}$ справедлива оценка сверху

$$p(u, a) \leq f_k(u, a) \mathbf{E} \exp \left\{ \frac{R}{2\sigma_1^2} \right\}, \quad (17)$$

где

$$\mathbf{E} \exp \left\{ \frac{R}{2\sigma_1^2} \right\} = \prod_{j=k+1}^\infty \left(1 - \frac{\sigma_j^2}{\sigma_1^2} \right)^{-1/2} \exp \left\{ \frac{a_j^2}{2(\sigma_1^2 - \sigma_j^2)} \right\}. \quad (18)$$

б) Пусть выполнено одно из следующих условий i)–ii):

i) $k = 3$, $u \geq u^ = 4.9u_0 + 16.94|\bar{a}_3|^2 \sigma_1^{-4} u_0^2$;*

ii) $k \geq 4$, $u \geq u^{**} = 5.625(k-1)^2(k-3)^{-1}u_0 + 16|\bar{a}_3|^2 \sigma_1^{-4} u_0^2(k-3)^{-2}$. Тогда справедлива оценка снизу

$$p(u, a) \geq 0.125 f_k(u, a) \mathbf{E} \exp \left\{ \frac{R}{2\sigma_1^2} \right\}. \quad (19)$$

Из (17) и (18) вытекает, что свойства $p(u, a)$ относительно u и $\bar{a}_k$ могут быть описаны через свойства функции $f_k(u, a)$. Например, в [35] (см. соотношение (15) в [35]) было доказано следующее неравенство: для всех $k \geq 1$, $u > 0$ и произвольного $a \in \mathbb{H}$

$$f_k(u, a) \leq \left(2\sigma_1^2 \Gamma \left(\frac{k}{2} \right) \right)^{-1} \left(\frac{u}{2\sigma_1^2} \right)^{k/2-1} \exp \left\{ - \frac{(u^{1/2} - |\bar{a}_k|)^2}{2\sigma_1^2} \right\}. \quad (20)$$

В лемме 2 в [36] была доказана другая оценка: если $k \geq 1$ и $|\bar{a}_k| > 0$, то для всех $u > 0$

$$f_k(u, a) \leq c_1(k) \sigma_1^{-1} u^{(k-3)/4} |\bar{a}_k|^{-(k-1)/2} \exp \left\{ - \frac{(u^{1/2} - |\bar{a}_k|)^2}{2\sigma_1^2} \right\}, \quad (21)$$

где $c_1(k) = \pi^{-1/2} + ((k-1)/2)^{(k-1)/2} / \Gamma(k/2)$ и $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

Далее, поскольку

$$\mathbf{P}(|Y - a| > r) = \int_{r^2}^\infty p(u, a) du,$$

то, имея двусторонние оценки для $p(u, a)$, мы получаем двусторонние оценки для вероятности $\mathbf{P}(|Y - a| > r)$. В частности, справедлива следующая теорема (см. [11, следствие 4, i)).

Теорема 16. Пусть $k \geq 4$ и r, a таковы, что $|\bar{a}_k| > 0$ и $r > \sigma_1^2/|\bar{a}_k| + 2|\bar{a}_k| + (u^{**})^{1/2}$. Тогда существуют постоянные $c_9(k), c_{10}(k)$, зависящие только от k , для которых

$$\begin{aligned} c_9(k) \mathbf{E} \exp \left\{ \frac{R}{2\sigma_1^2} \right\} &\leq \mathbf{P}(|Y - a| > r) \exp \left\{ \frac{(r - |\bar{a}_k|)^2}{2\sigma_1^2} \right\} \sigma_1 r^{(k-3)/2} |\bar{a}_k|^{(k-1)/2} \\ &\leq c_{10}(k) \mathbf{E} \exp \left\{ \frac{R}{2\sigma_1^2} \right\}. \end{aligned}$$

Другие виды оценок для $\mathbf{P}(|Y - a| > r)$ см. в [11] и [37], а также в статьях, указанных в списках литературы в этих работах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Götze F. Asymptotic expansions for bivariate von Mises functionals. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1979, v. 50, № 3, p. 333–355.
2. Götze F. Edgeworth expansions in functional limit theorems. — Ann. Probab., 1989, v. 17, № 4, p. 1602–1634.
3. Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. — Math. Ann., 1916, v. 77, № 3, p. 313–352.
4. Юринский В. В. Оценка погрешности нормального приближения вероятности попадания в шар. — Докл. АН СССР, 1981, т. 258, с. 577–578.
5. Юринский В. В. О погрешности нормального приближения. — Сиб. матем. журн., 1983, т. 24, № 6, с. 188–199.
6. Гётце Ф., Прохоров Ю. В., Ульянов В. В. Оценки для характеристических функций многочленов от асимптотически нормальных случайных величин. — Успехи матем. наук, 1996, т. 51, № 2, с. 3–26.
7. Гётце Ф., Прохоров Ю. В., Ульянов В. В. О гладком поведении вероятностных распределений при полиномиальных отображениях. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 1, с. 51–62.
8. Götze F., Prohorov V. V., Ulyanov V. V. A stochastic analogue of the Vinogradov mean value theorem. — Probability Theory and Mathematical Statistics (Tokyo, 1995). River Edge: World Scientific, 1996, p. 62–82.
9. Прохоров Ю. В., Кристоф Г., Ульянов В. В. О характеристических свойствах квадратичных форм. — Докл. РАН, 2000, т. 373, № 2, с. 168–170.
10. Christoph G., Prohorov Yu., Ulyanov V. Characterization and stability problems for finite quadratic forms. — Asymptotic Methods in Probability and Statistics with Applications (St. Petersburg, 1998). Boston: Birkhäuser, 2001, p. 39–50.
11. Прохоров Ю. В., Кристоф Г., Ульянов В. В. О распределении квадратичных форм от гауссовских случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 2, с. 301–312.
12. Prokhorov Yu. V., Ulyanov V. V. Some approximation problems in statistics and probability. — Limit Theorems in Probability, Statistics and Number Theory. Heidelberg: Springer, 2013, p. 235–249. (Springer Proc. Math. Statist., v. 42.)
13. Прохоров Ю. В. Избранные труды. М.: Торус-Пресс, 2012, 778 с.
14. Rudin W. Fourier Analysis on Groups. New York: Interscience Publ., 1962, 285 p.
15. Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е. Коммутативные нормированные кольца. — Успехи матем. наук, 1946, т. 1, № 2, с. 48–146.
16. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, т. 1, 2. М.: Мир, 1965, 615 с., 537 с.
17. Wiener N., Wintner A. Fourier-Stieltjes transforms and singular infinite convolutions. — Amer. J. Math., 1938, v. 60, № 3, p. 513–522.
18. Salem R. On singular monotonic functions of the Cantor type. — J. Math. Phys. Mass. Inst. Tech., 1942, v. 21, p. 69–82.
19. Schaeffer A. C. The Fourier-Stieltjes coefficients of a function of bounded variation. — Amer. J. Math., 1939, v. 61, p. 934–940.

20. Prachar K. Primzahlverteilung. Berlin: Springer-Verlag, 1978, 421 p.
21. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. М.: Наука, 1980, 144 с.
22. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. М.: Наука, 1987, 368 с.
23. Стечкин С. Б. О средних значениях модуля тригонометрической суммы. — Тр. МИАН СССР, 1975, т. 134, с. 283–309.
24. Wooley T. D. Vinogradov's mean value theorem via efficient congruencing. — Ann. Math., 2012, v. 175, № 3, p. 1575–1627.
25. Parsell S. T., Prendiville S. M., Wooley T. D. Near-optimal mean value estimates for multidimensional Weyl sums. — Geom. Funct. Anal., 2013, v. 23, № 6, p. 1962–2024.
26. Linnik U. V. On Weyl's sums. — Матем. сб., 1943, т. 12, № 1, p. 28–39.
27. Линник Ю. В., Островский И. В. Разложения случайных величин и векторов. М.: Наука, 1972, 479 с.
28. Lukacs E., Laha R. G. Applications of characteristic functions. London: Griffin, 1964, 202 p.
29. Лукач Е. Характеристические функции. М.: Наука, 1979, 423 с.
30. Shohat J. A., Tamarkin J. D. The Problem of Moments. Providence: Amer. Math. Soc., 1963, 144 p.
31. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. М.: Физматгиз, 1961, 310 с.
32. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
33. Стоянов Й. Контрпримеры в теории вероятностей. М.: Факториал, 1999, 288 с.
34. Математическая энциклопедия, т. 3. Под ред. И. М. Виноградова. М.: Советская энциклопедия, 1982, 1184 стб.
35. Ulyanov V. V. Nonuniform estimates of the density of the squared norm of a Gaussian vector in Hilbert space. — New Trends in Probability and Statistics, v. 1. Ed. by V. Sazonov and T. Shervashidze. Utrecht/Vilnius: VSP/Mokslas, 1991, p. 255–263.
36. Ulyanov V. V. On Gaussian measure of balls in H . — Frontiers in Pure and Applied Probability. II: Proceedings of the Fourth Russian–Finnish Symposium on Probability Theory and Mathematical Statistics. Ed. by A. N. Shiryaev et al. Moscow: TVP Science Publishers, 1996, p. 195–206.
37. Розовский Л. В. О гауссовой мере шаров в гильбертовом пространстве. — Теория вероятн. и ее примен., 2008, т. 53, в. 2, с. 382–390.

Поступила в редакцию
2.II.2015

© 2015 г.

ХОЛЕВО А. С.*, ШИРОКОВ М. Е.*

КРИТЕРИЙ СЛАБОЙ КОМПАКТНОСТИ ДЛЯ СЕМЕЙСТВ ОБОБЩЕННЫХ КВАНТОВЫХ АНСАМБЛЕЙ И ЕГО СЛЕДСТВИЯ¹⁾

Одним из центральных результатов теории вероятностных мер на метрических пространствах является теорема Ю. В. Прохорова о слабой компактности подмножеств вероятностных мер. В данной заметке с помощью этой теоремы получен критерий компактности для семейств обобщенных квантовых ансамблей — борелевских вероятностных мер на множестве квантовых состояний — и рассмотрены его приложения в квантовой теории информации.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия; e-mail: holevo@mi.ras.ru; msh@mi.ras.ru

¹⁾ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00162).