Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. М. Чибисов, Закон больших чисел Я. Бернулли и усиленный закон больших чисел, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2015, том 60, выпуск 2, 408–410

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4628>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 12:11:46

3. Холево А. С. Квантовые системы, каналы, информация. М.: МЦНМО, 2010, 327 с.
4. Schumacher B., Westmoreland M. D. Optimal signal ensembles. — Phys. Rev. A., 2001, v. 63, № 2, p. 2308–2312.
5. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 351 с.
6. Parthasarathy K. R. Probability Measures on Metric Spaces. New York–London: Academic Press, 1967, 276 p.
7. Прохоров Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. 1, в. 2, с. 177–238.
8. Холево А. С. Классические пропускные способности квантового канала с ограничением на входе. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 2, с. 359–374.
9. Половинкин Е. С., Балашов М. В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2004, 415 с.
10. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М: Мир, 1973, 469 с.
11. Вернер Р. Ф., Холево А. С., Широков М. Е. О понятии сцепленности в гильбертовых пространствах. — Успехи матем. наук, 2005, т. 60, № 2, с. 153–154.
12. Холево А. С., Широков М. Е. Непрерывные ансамбли и пропускная способность квантовых каналов бесконечной размерности. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 1, с. 98–114.
13. Osborne T. J. Convex hulls of varieties and entanglement measures based on the roof construction. — Quantum Inform. Comput., 2007, v. 7, № 3, p. 209–227.
14. Широков М. Е. Свойства пространства квантовых состояний и монотонные характеристики сцепленности. — Изв. РАН, 2010, т. 74, № 4, с. 189–224.
15. Протасов В. Ю., Широков М. Е. Обобщенная компактность в линейных пространствах и ее приложения. — Матем. сб., 2009, т. 200, № 5, с. 71–98.

Поступила в редакцию
21.1.2015

© 2015 г.

ЧИБИСОВ Д. М.*

ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ Я. БЕРНУЛЛИ И УСИЛЕННЫЙ ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Обсуждается взаимосвязь между законом больших чисел и усиленным законом больших чисел для сумм независимых случайных величин. Сопоставляется математическое содержание этих законов и их связь с задачами математической статистики.

Ключевые слова и фразы: закон больших чисел, усиленный закон больших чисел, состоятельность оценок, сильная состоятельность оценок.

В докладе обсуждается взаимосвязь между законом больших чисел (з.б.ч.) и усиленным з.б.ч. (у.з.б.ч.) для сумм независимых случайных величин (эти законы выполняются и в ряде моделей зависимых величин, но цель доклада — сопоставить постановки задач и содержание этих результатов, и для этого достаточно ограничиться независимым случаем). Доклад носит методологический характер, он вызван тем, что, как показывает чтение статистической литературы, многие авторы при исследовании асимптотических свойств, скажем, оценок параметров считают нужным доказывать их *сильную* состоятельность, которая основана на у.з.б.ч. и которая по мнению автора не имеет отношения к статистическому содержанию.

Несмотря на их похожесть, з.б.ч. и у.з.б.ч. — принципиально разные утверждения, дающие ответы на разные вопросы. З.б.ч. говорит, что относительная частота

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия; e-mail: chibisov@mi.ras.ru

в схеме Бернулли (или среднее арифметическое в более общем случае) сходится по вероятности к p (соответственно, к математическому ожиданию) при $n \rightarrow \infty$, т.е. что *распределения* рассматриваемых случайных величин сходятся к вырожденному. У.з.б.ч. утверждает сходимость этих величин к пределу почти наверное (п.н.), что само по себе ничего не говорит об их распределениях.

Статистические данные всегда состоят из конечного числа n наблюдений. Для применения асимптотических методов задача с конкретным n вкладывается в последовательность аналогичных задач с $n \rightarrow \infty$ и предельный результат применяется как приближенный в предположении, что n достаточно велико. Как пример, предположим, что рассматривается оценка $\hat{\theta}_n$ одномерного параметра θ . Точное распределение оценки как правило неизвестно, и ее свойства (состоятельность, асимптотическая эффективность и т.п.) определяются асимптотическими свойствами ее распределения. Вывод предельного распределения оценки, скажем, доказательство ее асимптотической нормальности, использует в качестве первого шага ее состоятельность, доказательство которой опирается именно на «слабый» з.б.ч. Он, таким образом, дает предварительную информацию о распределении оценки, которая затем уточняется центральной предельной теоремой. У.з.б.ч. же является окончательным результатом, не имеющим подобного продолжения.

Преимуществом у.з.б.ч. (сильной состоятельности в данном примере), отличающим его от з.б.ч. («слабой» состоятельности), является то, что в бесконечной последовательности наблюдений событие $\{|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon\}$ происходит конечное число раз п.н. Это свойство, однако, является «внутриматематическим», недоступным для наблюдения в эксперименте.

В случае последовательности независимых *одинаково распределенных* случайных величин з.б.ч. состоит в сходимости среднего арифметического $S_n = (X_1 + \dots + X_n)/n$, $n \rightarrow \infty$, к математическому ожиданию $\mu = \mathbf{E} X_1$ по вероятности, а у.з.б.ч. — п.н. З.б.ч. естественно формулировать в терминах *последовательности вероятностных пространств* $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}(\mathbf{R}^n), P_n)$, каждое из которых является n -кратным прямым произведением пространств $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), P)$, где P — распределение X_1 . З.б.ч. тогда есть $P_n(|S_n - \mu| > \varepsilon) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $\varepsilon > 0$.

Формулировка же у.з.б.ч. требует, чтобы все случайные величины X_i , $i = 1, 2, \dots$, были определены на *одном* вероятностном пространстве, каковым может быть пространство $(\mathbf{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbf{R}^\infty))$ бесконечных последовательностей $X = (X_i)_{i=1}^\infty$ с мерой $\mathbf{P}$, получаемой продолжением мер на цилиндрических множествах с конечномерными основаниями (см. [2, гл. 2, § 3]). Вытекающий из него з.б.ч. тогда формулируется как $\mathbf{P}(\{X: |S_n - \mu| > \varepsilon\}) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, где событие под знаком $\mathbf{P}$ есть цилиндрическое множество в $\mathbf{R}^\infty$, основанием которого служит множество в $\mathbf{R}^n$, фигурирующее в предыдущем абзаце. Видно, что сама формулировка у.з.б.ч. требует гораздо более сложного математического аппарата, чем в случае з.б.ч. Тем самым вывод з.б.ч. из у.з.б.ч. без реальной надобности в последнем методически не оправдан.

В случае *неодинаково распределенных* случайных величин з.б.ч. формулируется в *схеме серий* как утверждение о сходимости распределений подходящим образом нормированных и центрированных сумм $S_n = \sum_{i=1}^n X_{ni}$ по строке к вырожденному распределению, сосредоточенному в нуле, см. [1, § 22.5]. Естественная вероятностная модель для этого — последовательность пространств $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}(\mathbf{R}^n), P_n)$, на каждом из которых определены случайные величины, образующие строку треугольного массива.

Формулировка у.з.б.ч. в схеме серий *невозможна*, поскольку в схеме серий не делается никаких предположений о совместных распределениях случайных величин в разных строках и поэтому невозможно определить совместное распределение входящих в нее случайных величин.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лозе М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962, 719 с.
2. Ширяев А. Н. Вероятность-1. М.: МЦНМО, 2011, 551 с.

Поступила в редакцию
21.1.2015

© 2015 г.

ЯКИМИВ А. Л.*

ТАУБЕРОВА ТЕОРЕМА ДЛЯ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ КРАТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ¹⁾

*Светлой памяти
Ю. В. Прохорова и Б. А. Севастьянова
посвящается*

Рассматриваются кратные последовательности $a(i) \geq 0$, $i \in \mathbf{Z}_+^n$. Вводится понятие односторонней слабой осцилляции таких последовательностей вдоль последовательности $(m = m(k) = (m_1(k), \dots, m_n(k)))$, $m_j(k) > 0 \forall j = 1, \dots, n$, $k \in \mathbf{N}$, такой, что $m_j(k) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Из асимптотики производящей функции $A(s)$, $s \in [0, 1]^n$, изучаемой кратной последовательности при $s = (e^{-\lambda_1/m_1}, \dots, e^{-\lambda_n/m_n})$ и $k \rightarrow \infty$ ($\lambda_1, \dots, \lambda_n$ положительны и фиксированы) выводится асимптотика для $a(x_1 m_1, \dots, x_n m_n)$ (числа $x_1, \dots, x_n$ положительны и фиксированы). Полученная тауберова теорема обобщает несколько тауберовых теорем, доказанных автором ранее при исследовании некоторых классов случайных подстановок и случайных отображений конечного множества в себя. При этом исходным результатом в этом направлении является известная тауберова теорема Йована Караматы для производящих функций последовательностей.

Ключевые слова и фразы: σ -конечные меры, кратные степенные ряды, односторонне слабо осциллирующие кратные последовательности, тауберова теорема, критические марковские ветвящиеся процессы с непрерывным временем, ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона с эмиграцией, ветвящиеся процессы Беллмана–Харриса, критические разложимые ветвящиеся процессы с двумя типами частиц.

1. Введение. Абелевыми называют теоремы, выводящие из асимптотики последовательностей и функций асимптотические свойства их производящих функций и преобразований Лапласа (а также других интегральных преобразований); теоремы, обратные к абелевым, называют тауберовыми. Эти теоремы названы в честь соответственно Абеля и Таубера, впервые доказавших утверждения таких типов (см. [1], [13]).

С тауберовыми теоремами я познакомился еще в 1977 г., будучи аспирантом МГУ (под руководством Бориса Александровича Севастьянова), по двухтомнику В. Феллера «Введение в теорию вероятностей и ее приложения» [7], [8], который перевел с английского Юрий Васильевич Прохоров (я привел ссылку на более новое издание, дополненное и переработанное). Надо отметить, что это был в высшей степени профессиональный перевод, как, впрочем, и все, что делал Юрий Васильевич. Эта книга стала настольной и воспитала не одно поколение вероятностников. Мало того,

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия; e-mail: arsen@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 14-01-00318-а).