Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Якимив, Тауберова теорема для производящих функций кратных последовательностей, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2015, том 60, выпуск 2, 410–415

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4629>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 12:34:50

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лозе М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962, 719 с.
2. Ширяев А. Н. Вероятность-1. М.: МЦНМО, 2011, 551 с.

Поступила в редакцию
21.1.2015

© 2015 г.

ЯКИМИВ А. Л.*

ТАУБЕРОВА ТЕОРЕМА ДЛЯ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ КРАТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ¹⁾

*Светлой памяти
Ю. В. Прохорова и Б. А. Севастьянова
посвящается*

Рассматриваются кратные последовательности $a(i) \geq 0$, $i \in \mathbf{Z}_+^n$. Вводится понятие односторонней слабой осцилляции таких последовательностей вдоль последовательности $(m = m(k) = (m_1(k), \dots, m_n(k)))$, $m_j(k) > 0 \forall j = 1, \dots, n$, $k \in \mathbf{N}$, такой, что $m_j(k) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Из асимптотики производящей функции $A(s)$, $s \in [0, 1]^n$, изучаемой кратной последовательности при $s = (e^{-\lambda_1/m_1}, \dots, e^{-\lambda_n/m_n})$ и $k \rightarrow \infty$ ($\lambda_1, \dots, \lambda_n$ положительны и фиксированы) выводится асимптотика для $a(x_1 m_1, \dots, x_n m_n)$ (числа $x_1, \dots, x_n$ положительны и фиксированы). Полученная тауберова теорема обобщает несколько тауберовых теорем, доказанных автором ранее при исследовании некоторых классов случайных подстановок и случайных отображений конечного множества в себя. При этом исходным результатом в этом направлении является известная тауберова теорема Йована Караматы для производящих функций последовательностей.

Ключевые слова и фразы: σ -конечные меры, кратные степенные ряды, односторонне слабо осциллирующие кратные последовательности, тауберова теорема, критические марковские ветвящиеся процессы с непрерывным временем, ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона с эмиграцией, ветвящиеся процессы Беллмана–Харриса, критические разложимые ветвящиеся процессы с двумя типами частиц.

1. Введение. Абелевыми называют теоремы, выводющие из асимптотики последовательностей и функций асимптотические свойства их производящих функций и преобразований Лапласа (а также других интегральных преобразований); теоремы, обратные к абелевым, называют тауберовыми. Эти теоремы названы в честь соответственно Абеля и Таубера, впервые доказавших утверждения таких типов (см. [1], [13]).

С тауберовыми теоремами я познакомился еще в 1977 г., будучи аспирантом МГУ (под руководством Бориса Александровича Севастьянова), по двухтомнику В. Феллера «Введение в теорию вероятностей и ее приложения» [7], [8], который перевел с английского Юрий Васильевич Прохоров (я привел ссылку на более новое издание, дополненное и переработанное). Надо отметить, что это был в высшей степени профессиональный перевод, как, впрочем, и все, что делал Юрий Васильевич. Эта книга стала настольной и воспитала не одно поколение вероятностников. Мало того,

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия; e-mail: arsen@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 14-01-00318-а).

и уже состоявшимся ученым, по отзывам моих знакомых-математиков, не раз случалось заглядывать в эту книгу. Отметим также, что многие научные сотрудники и инженеры самых разных специальностей, порой далеких от математики, используют вероятностные методы и эту книгу в своей работе.

Примерно в это же время на семинаре МГУ по ветвящимся процессам, руководимом Б. А. Севастьяновым, исследовались предельные свойства критических ветвящихся процессов (марковских с непрерывным временем и процессов Беллмана–Харриса — см. [11]) при помощи некоторых одномерных обобщений тауберовых теорем Й. Караматы [9], [10]. В частности, В. А. Ватутин в [2]–[4] доказал несколько предельных теорем для процессов Беллмана–Харриса и Гальтона–Ватсона с эмиграцией. Б. А. Севастьянов в [12] изучил асимптотические свойства ограниченных снизу марковских ветвящихся процессов с непрерывным временем. С. М. Сагитов совместно с В. А. Ватутиным в [5] исследовали поведение на бесконечности критических разложимых ветвящихся процессов с двумя типами частиц. Также автор в [14] доказал сходимость конечномерных распределений в предельной теореме В. А. Ватутина [2] при помощи некоторых многомерных обобщений тауберовых теорем Й. Караматы. Таким образом, тауберовы теоремы часто применялись при изучении ветвящихся процессов представителями школы Б. А. Севастьянова. Применялись они в этом направлении и другими исследователями, некоторые ссылки даны в книге автора [15] в конце главы 2. Что же касается вообще вероятностных применений тауберовых теорем, то они сейчас становятся необозримыми. Причем применяются не только тауберовы теоремы Й. Караматы, но и многие другие.

За последние десять лет автором получено несколько двумерных и трехмерных тауберовых теорем в связи с различными приложениями в вероятностной комбинаторике (для некоторых классов случайных подстановок и отображений конечного множества в себя) — см. работы [15]–[18]. В настоящей заметке приводится многомерная тауберова теорема для кратных последовательностей, обобщающая упомянутые тауберовы теоремы. Все эти теоремы восходят к известным тауберовым теоремам Йована Караматы [9], [10] (см. также [8, раздел XIII.5, теорема 5]) и продолжают его исследования в этом направлении. Отметим также, что глубокие многомерные обобщения тауберовых теорем Й. Караматы для обобщенных функций и мер представлены в монографии В. С. Владимирова, Ю. Н. Дрожжинова и Б. И. Завьялова [6] и последующих работах, ссылки на которые, равно как и ссылки на других авторов по этой тематике, будут приведены в полном варианте статьи.

2. Основной результат. Сформулируем сначала тауберову теорему Йована Караматы для последовательностей [10]. Эта теорема будет представлена здесь в другой, эквивалентной оригиналу форме, удобной для дальнейших обобщений.

Теорема 1. Пусть задана последовательность $(a(i), i \in \mathbf{Z}_+)$ такая, что $a(i) \geq 0$ для всех $i \in \mathbf{Z}_+$ и степенной ряд

$$A(s) = \sum_{i \in \mathbf{Z}_+} a(i)s^i$$

сходится при $s \in [0, 1)$. Если последовательность $(a(i), i \in \mathbf{Z}_+)$ монотонна и $R(i)$ — некоторая положительная функция $i \in \mathbf{Z}_+$, причем для произвольного фиксированного положительного λ и некоторого фиксированного положительного α

$$\frac{A(e^{-\lambda/k})}{R(k)k} \rightarrow \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha} \quad (k \rightarrow \infty),$$

то для каждого фиксированного $x > 0$

$$\frac{a(xk)}{R(k)} \rightarrow x^{\alpha-1} \quad (k \rightarrow \infty),$$

где $a(t) = a([t])$ при $t \in \mathbf{R}_+$, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера, причем $R(k)$ имеет вид $R(k) = k^{\alpha-1}L(k)$, где функция $L(k)$ медленно меняется на бесконечности по Карамате, т.е. для произвольного фиксированного $\lambda > 0$

$$\frac{L([\lambda k])}{L(k)} \rightarrow 1 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Чтобы сформулировать полученную тауберову теорему, нам понадобятся три определения. Пусть задана кратная последовательность $(a(i) \geq 0, i \in \mathbf{Z}_+^n)$. Доопределим эту последовательность до функции на всем $\mathbf{R}_+^n$ при помощи равенства

$$a(x) = a([x_1], \dots, [x_n])$$

при $x \in \mathbf{R}_+^n$. Пусть задана последовательность

$$(m = m(k) = (m_1(k), \dots, m_n(k)), m_j(k) > 0 \forall j = 1, \dots, n, k \in \mathbf{N})$$

такая, что $m_j(k) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$.

О п р е д е л е н и е 1. Последовательность $(a(i), i \in \mathbf{Z}_+^n)$ назовем слабо осциллирующей снизу вдоль $m(k)$ по j -й переменной, $j = 1, \dots, n$, если для произвольного фиксированного $x \in \text{int } \mathbf{R}_+^n$ и любых $y_j = y_j(k) > 1, y_j = 1 + o(1) (k \rightarrow \infty)$, выполнено неравенство

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{a(r_1, \dots, r_{j-1}, y_j r_j, r_{j+1}, \dots, r_n)}{a(r)} \geq 1,$$

где $r = r(k) = (r_1(k), \dots, r_n(k))$ — произвольная функция переменной k такая, что

$$r_1 \sim x_1 m_1, \dots, r_n \sim x_n m_n \quad (k \rightarrow \infty). \quad (1)$$

О п р е д е л е н и е 2. Последовательность $(a(i), i \in \mathbf{Z}_+^n)$ назовем слабо осциллирующей сверху вдоль $m(k)$ по j -й переменной, $j = 1, \dots, n$, если для произвольного фиксированного $x \in \text{int } \mathbf{R}_+^n$ и любых $y_j = y_j(k) > 1, y_j = 1 + o(1) (k \rightarrow \infty)$, выполнено неравенство

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{a(r_1, \dots, r_{j-1}, y_j r_j, r_{j+1}, \dots, r_n)}{a(r)} \leq 1,$$

где $r = r(k) = (r_1(k), \dots, r_n(k))$ — произвольная функция переменной k , для которой выполнены соотношения (1).

О п р е д е л е н и е 3. Последовательность $(a(i), i \in \mathbf{Z}_+^n)$ назовем односторонне слабо осциллирующей вдоль $m(k)$, если она слабо осциллирует снизу или сверху вдоль $m(k)$ по каждой своей переменной $j = 1, \dots, n$.

Основным результатом настоящей заметки является следующая тауберова теорема.

Теорема 2. Пусть для всех $s = (s_1, \dots, s_n) \in [0, 1]^n$ конечна функция

$$A(s) = \sum_{i=(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{Z}_+^n} a(i) s_1^{i_1} \dots s_n^{i_n}$$

($a(i) \geq 0$ при $i \in \mathbf{Z}_+^n$), причем для произвольных фиксированных $\lambda_j > 0, j = 1, \dots, n$, и некоторой последовательности $(m = m(k) = (m_1(k), \dots, m_n(k)) \in \text{int } \mathbf{R}_+^n, k \in \mathbf{N})$ такой, что $m_j(k) \rightarrow \infty (k \rightarrow \infty)$ для всех $j = 1, \dots, n$, выполнено соотношение

$$\frac{A(e^{-\lambda_1/m_1}, \dots, e^{-\lambda_n/m_n})}{R(k) \prod_{j=1}^n m_j(k)} \rightarrow \frac{\prod_{j=1}^n \Gamma(\alpha_j)}{\prod_{j=1}^n \lambda_j^{\alpha_j}} \quad (k \rightarrow \infty),$$

где $\alpha_j > 0$ при $j = 1, \dots, n$, $R(k)$ — некоторая положительная функция переменной $k \in \mathbf{N}$, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера. Если последовательность $(a(i), i \in \mathbf{Z}_+^n)$ односторонне слабо осциллирует вдоль $m(k)$, то для произвольного фиксированного $x = (x_1, \dots, x_n) \in \text{int } \mathbf{R}_+^n$

$$a(x_1 m_1, \dots, x_n m_n) = (1 + o(1)) R(k) \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j - 1} \quad (k \rightarrow \infty).$$

Основой для доказательства теоремы 2 являются теорема непрерывности для преобразования Лапласа мер (см. [15, теорема 1.3.2]), а также следующие шесть лемм.

Лемма 1. Последовательность $(a(i))$ слабо осциллирует сверху вдоль $t(k)$ по переменной j тогда и только тогда, когда для произвольного $x \in \text{int } \mathbf{R}_+^n$ и любых $y_j = y_j(k) < 1$, $y_j = 1 + o(1)$, выполнено неравенство

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{a(r_1, \dots, r_{j-1}, y_j r_j, r_{j+1}, \dots, r_n)}{a(r)} \geq 1,$$

где $r = r(k) = (r_1(k), \dots, r_n(k))$ — произвольная функция переменной k , для которой выполнено (1).

Лемма 2. Последовательность $(a(i))$ слабо осциллирует снизу вдоль $t(k)$ по переменной j тогда и только тогда, когда для произвольного $x \in \text{int } \mathbf{R}_+^n$ и любых $y_j = y_j(k) < 1$, $y_j = 1 + o(1)$ выполнено неравенство

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{a(r_1, \dots, r_{j-1}, y_j r_j, r_{j+1}, \dots, r_n)}{a(r)} \leq 1,$$

где $r = r(k) = (r_1(k), \dots, r_n(k))$ — произвольная функция k , для которой выполнено (1).

Лемма 3. Пусть последовательность $(a(i))$, $i \in \mathbf{Z}_+^n$ односторонне слабо осциллирует вдоль $t(k)$, причем $y_j > 1$, если последовательность $(a(i))$ слабо осциллирует снизу вдоль $t(k)$ по j -й переменной, и $y_j < 1$, если последовательность $(a(i))$ слабо осциллирует сверху вдоль $t(k)$ по j -й переменной, $j = 1, \dots, n$. Тогда для произвольного $x \in \text{int } \mathbf{R}_+^n$ при $r_j \sim x_j t_j$, $y_j = 1 + o(1)$ ($k \rightarrow \infty$), $j = 1, \dots, n$, выполнено соотношение

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{a(yr)}{a(r)} \geq 1,$$

где $yr = (y_1 r_1, \dots, y_n r_n)$.

Лемма 4. Пусть последовательность $(a(i))$, $i \in \mathbf{Z}_+^n$ односторонне слабо осциллирует вдоль $t(k)$, причем $y_j < 1$, если последовательность $(a(i))$ слабо осциллирует снизу вдоль $t(k)$ по j -й переменной, и $y_j > 1$, если последовательность $(a(i))$ слабо осциллирует сверху вдоль $t(k)$ по j -й переменной, $j = 1, \dots, n$. Тогда для произвольного $x \in \text{int } \mathbf{R}_+^n$ при $r_j \sim x_j t_j$, $y_j = 1 + o(1)$ ($k \rightarrow \infty$), $j = 1, \dots, n$, выполнено соотношение

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{a(yr)}{a(r)} \leq 1,$$

где $yr = (y_1 r_1, \dots, y_n r_n)$.

Лемма 5. Пусть последовательность $(a(i))$, $i \in \mathbf{Z}_+^n$ односторонне слабо осциллирует вдоль $t(k)$. Положим $b(j) = 1$, если последовательность $(a(i))$ слабо осциллирует снизу вдоль $t(k)$ по j -й переменной, и $b(j) = -1$ в противном случае, $j = 1, \dots, n$. Зафиксируем $x \in \text{int } \mathbf{R}_+^n$. Положим также для произвольного $\delta \in (0, 1)$

$$B(\delta) = \{y = (y_1, \dots, y_n): y_j \in (x_j, x_j(1 + \delta)^{b(j)}) \forall j = 1, \dots, n\}$$

(при $c > d$ полагаем $(c, d) = (d, c)$). Тогда для произвольного $\varepsilon \in (0, 1)$ существует такое $\delta \in (0, \varepsilon)$, что для каждого $i \in tB(\delta)$

$$a(i) \geq a(tx)(1 - \varepsilon)$$

(здесь $tx = (t_1 x_1, \dots, t_n x_n)$, $tB(\delta) = \{y: y = tz, z \in B(\delta)\}$).

Лемма 6. Пусть последовательность $(a(i))$, $i \in \mathbf{Z}_+^n$ односторонне слабо осциллирует вдоль $t(k)$. Как и в лемме 5, положим $b(j) = 1$, если последовательность $(a(i))$ слабо осциллирует снизу вдоль $t(k)$ по j -й переменной, и $b(j) = -1$

в противном случае, $j = 1, \dots, n$. Зафиксируем $x \in \text{int } \mathbf{R}_+^n$. Положим также для произвольного $\delta \in (0, 1)$

$$B_1(\delta) = \{y = (y_1, \dots, y_n): y_j \in (x_j(1 - \delta)^{b(j)}, x_j) \ \forall j = 1, \dots, n\}.$$

Тогда для произвольного $\varepsilon \in (0, 1)$ существует такое $\delta \in (0, \varepsilon)$, что для каждого $i \in mB_1(\delta)$

$$a(i) \leq a(mx)(1 + \varepsilon).$$

Справедлива также следующая несколько более общая тауберова теорема для кратных степенных рядов.

Теорема 3. Пусть для всех $s = (s_1, \dots, s_n) \in (0, 1)^n$ конечна функция

$$A(s) = \sum_{i=(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{Z}_+^n} a(i) s_1^{i_1} \dots s_n^{i_n}$$

($a(i) \geq 0$ при $i \in \mathbf{Z}_+^n$), причем для произвольных фиксированных $\lambda_j > 0$, $j = 1, \dots, n$, и некоторой последовательности $(m = m(k) = (m_1(k), \dots, m_n(k)) \in \text{int } \mathbf{R}_+^n, k \in \mathbf{N})$ такой, что $m_j(k) \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$) для всех $j = 1, \dots, n$, выполнено соотношение

$$\frac{A(e^{-\lambda_1/m_1}, \dots, e^{-\lambda_n/m_n})}{R(k) \prod_{j=1}^n m_j(k)} \rightarrow \Psi(\lambda) < \infty$$

для некоторой функции $\Psi(\lambda)$, где $R(k)$ — некоторая положительная функция переменной $k \in \mathbf{N}$. Из последнего соотношения следует, что $\Psi(\lambda)$ является преобразованием Лапласа некоторой σ -конечной меры $\Phi(dx)$ на $\mathbf{R}_+^n$. Пусть мера $\Phi(dx)$ является абсолютно непрерывной на $\text{int } \mathbf{R}_+^n$ с непрерывной плотностью $\varphi(x)$ на $\text{int } \mathbf{R}_+^n$. Если последовательность $(a(i))$ односторонне слабо осциллирует вдоль $m(k)$, то для произвольного фиксированного $x = (x_1, \dots, x_n) \in \text{int } \mathbf{R}_+^n$

$$\frac{a(x_1 m_1, \dots, x_n m_n)}{R(k)} \rightarrow \varphi(x) \quad (k \rightarrow \infty).$$

Доказательство тауберовых теорем 2 и 3 будет опубликовано в подробном варианте статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abel N. H. Untersuchungen über die Reihe: $1 + \frac{m}{1} \cdot x + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \dots$ u.s.w. — J. Reine Angew. Math., 1826, v. 1, p. 311–339.
2. Ватутин В. А. Дискретные предельные распределения числа частиц в критических ветвящихся процессах Беллмана–Харриса. — Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. 22, в. 1, с. 150–155.
3. Ватутин В. А. Критический ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с эмиграцией. — Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. 22, в. 3, с. 482–497.
4. Ватутин В. А. Дискретные предельные распределения числа частиц в ветвящихся процессах Беллмана–Харриса с несколькими типами частиц. — Теория вероятн. и ее примен., 1979, т. 24, в. 3, с. 503–514.
5. Ватутин В. А., Сагитов С. М. Разложимый критический ветвящийся процесс с двумя типами частиц. I. — Теория вероятн. и ее примен., 1988, т. 33, в. 3, с. 495–507.
6. Владимиров В. С., Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б. И. Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций. М.: Наука, 1986, 304 с.
7. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Пер. со 2-го англ. изд. Ю. В. Прохорова. Т. 1. М.: Мир, 1984, 528 с.

8. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Пер. со 2-го англ. изд. Ю.В. Прохорова. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
9. Karamata J. Über die Hardy-Littlewoodschen Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes. — Math. Z., 1930, v. 32, p. 319–320.
10. Karamata J. Neuer Beweis und Verallgemeinerung einiger Tauberian-Sätze. — Math. Z., 1931, v. 33, № 2, p. 294–299.
11. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971, 436 с.
12. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы, ограниченные снизу. — Докл. АН СССР, 1978, т. 238, № 4, с. 811–813.
13. Tauber A. Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen. — Monatsch. Math., 1897, v. 8, p. 273–277.
14. Якимив А. Л. Многомерные тауберовы теоремы и их применение к ветвящимся процессам Беллмана–Харриса. — Матем. сб., 1981, т. 115, № 3, с. 463–477.
15. Якимив А. Л. Вероятностные приложения тауберовых теорем. М: Физматлит, 2005, 256 с.
16. Якимив А. Л. Предельная теорема для общего числа циклов случайной A -подстановки. — Теория вероятн. и ее примен., 2007, т. 52, в. 1, с. 69–83.
17. Якимив А. Л. Предельная теорема для логарифма порядка случайной A -подстановки. — Дискрет. матем., 2010, т. 22, № 1, с. 126–149.
18. Якимив А. Л. О числе компонент случайного A -отображения. — Теория вероятн. и ее примен., 2014, т. 59, в. 1, с. 81–96.

Поступила в редакцию
2.II.2015

ОТ РЕДАКЦИИ

В опубликованной в нашем журнале статье В. А. Ватутина «Структура разложимых редуцированных ветвящихся процессов. II. Функциональные предельные теоремы» (т. 60, в. 1, с. 25–44) по вине редакции была неверно указана дата поступления статьи в редакцию.

Статья поступила в редакцию 18.IX.2014.

Редакция приносит автору свои извинения.

11.06.2015