Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Шур, Предельные теоремы для отношений, ассоциированных с самосопряженными операторами и симметричными цепями Маркова, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, том 45, выпуск 2, 268–288

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp463>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 12:59:12

© 2000 г.

ШУР М. Г.*

**ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ОТНОШЕНИЙ,
АССОЦИИРОВАННЫХ С САМОСОПРЯЖЕННЫМИ
ОПЕРАТОРАМИ И СИММЕТРИЧНЫМИ ЦЕПЯМИ
МАРКОВА¹⁾**

Получена простейшая предельная теорема для отношений, ассоциированных с самосопряженными операторами в пространствах типа L_2 , оставляющими инвариантным конус неотрицательных элементов. С ее помощью доказаны предельные теоремы для отношений, отвечающих симметричным цепям Маркова и симметричным ядрам в измеримых пространствах. В частности, для возвратных по Харрису симметричных цепей Маркова оказывается справедливым результат типа известной теоремы Ори (1961 г.) о дискретных возвратных симметричных цепях. Аналогичным образом обстоит дело и с неотрицательными симметричными квазифеллеровскими ядрами на локально компактных пространствах, являющимися лиувиллевыми в подходящем смысле.

Ключевые слова и фразы: предельная теорема для отношений, самосопряженный оператор, возвратная по Харрису цепь Маркова, симметричное ядро, квазифеллеровское ядро, лиувиллево ядро.

Обычно предельные теоремы для отношений, ассоциированных с марковскими цепями на измеримых пространствах состояний, включают в себя или чрезмерные, или, несмотря на близость к необходимому, трудно проверяемые требования [2], [4], [10], [13]. Например, добротная теорема 7.4 из [2] содержит некое условие (7.6), сформулированное в терминах вложенных дискретных плотностей восстановления, проверка которого иной раз не менее трудна, чем доказательство основного утверждения, [10]–[13].

С другой стороны, в изящной теореме Ори [4], относящейся к дискретным симметричным цепям Маркова, равно как и в некоторых других ситуациях [10]–[14], подобные условия отсутствуют. К тому же сходные результаты удается получить и для невозвратных цепей Маркова,

*Московский государственный институт электроники и математики, Б. Трехсвятительский пер., 3/12, 109028 Москва, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 96-01-01438.

подчиненных условию лиувиллевости в подходящей форме. Соответствующие примеры см. в [10], [11], [13], но, вероятно, самый известный из них доставляется простыми d -мерными случайными блужданиями при $d \geq 3$ [14]. В связи с последним примером упомянем и теоремы типа Аве об асимптотической равномерности симметричных блужданий на широком классе групп [12].

Основная цель нашей работы состоит в получении теорем типа Ори для симметричных возвратных по Харрису цепей Маркова и симметричных квазифеллеровских топологически лиувиллевых ядер (см. далее теоремы 2 и 3). Попутно получены и другие результаты (например, в предложении 1 дана новая характеристика параметра сходимости симметричного ядра). Предлагаемый подход базируется на новой простейшей предельной теореме для отношений, порожденных некоторыми самосопряженными операторами (см. теорему 1), и наша методика развивает использованную в [10], [13].

Основная терминология и формулировки главных результатов отражены в п. 1; теоремы 1, 2 и 3 доказаны в пп. 2, 4, 5 соответственно; в п. 3, в основном, приведен вспомогательный материал; п. 6, стоящий несколько особняком, дополняет теорему 3.

1. Терминология и основные результаты. Отправной точкой служат следующие соображения. Пусть T — линейный ограниченный самосопряженный оператор в вещественном или комплексном гильбертовом пространстве H . Для $f \in H$ неравенство Коши–Буняковского дает:

$$\|T^n f\|^2 = (T^{n+1} f, T^{n-1} f) \leq \|T^{n+1} f\| \cdot \|T^{n-1} f\|, \quad n \geq 1.$$

Поэтому $\|T^n f\| \neq 0$ при $n \geq 1$ и последовательность $\{\|T^{n+1} f\| \cdot \|T^n f\|^{-1}; n \geq 0\}$ не убывает, если $\|Tf\| \neq 0$ (этот факт установлен в [3] с применением спектральной теории операторов). Таким образом, в случае $\|Tf\| \neq 0$ можно положить

$$\rho(f) \equiv \rho_T(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\|T^{n+1} f\| \cdot \|T^n f\|^{-1}] = \lim_{n \rightarrow \infty} [\|T^n f\|^{1/n}] \leq \|T\|, \quad (1.1)$$

причем согласно последнему равенству

$$\rho(T^m f) = \rho(f), \quad m \geq 0. \quad (1.2)$$

Кроме того, попутно выяснилось, что в том же случае

$$\|Tf\| \cdot \|f\|^{-1} \leq \|T^{n+1} f\| \cdot \|T^n f\|^{-1} \leq \rho(f) \leq \|T\|, \quad n \geq 0. \quad (1.3)$$

Если же $\|Tf\| = 0$, то удобно считать $\rho(f) = 0$.

Всюду в дальнейшем рассматриваются измеримое пространство $(E, \mathcal{B})$ и σ -конечная мера ξ на $\mathcal{B}$. В роли H будет фигурировать вещественное пространство $L_2 = L_2(\xi)$, наделенное стандартным скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Поскольку $f, g \in L_2$ являются классами эквивалентности $\mathcal{B}$ -измеримых функций с суммируемыми по ξ квадратами, неравенства типа $f \geq g$, где $f, g \in L_2$, будут интерпретироваться как их аналоги для представителей этих классов, выполняющиеся п.в. (т.е. ξ -почти всюду). С учетом сказанного определяются как элемент $f \vee g = \max(f, g)$ для тех же f и g , так и конус $L_2^+ = \{f \in L_2: f \geq 0\}$.

Рассмотрим оператор (точнее, линейный ограниченный оператор) T , действующий в L_2 . Если конус L_2^+ инвариантен относительно T (иными словами, если $TL_2^+ \subset L_2^+$), условимся говорить, что $f \in L_2^+$ T -мажорирует $g \in L_2^+$ и писать $f \geq_T g$, коль скоро при некотором выборе $\gamma > 0$ и натурального n

$$f + Tf + \dots + T^n f \geq \gamma g. \quad (1.4)$$

При этом запись $f \sim_T g$ будет означать, что одновременно $f \geq_T g$ и $g \geq_T f$.

Лемма 1. Пусть оператор $T: L_2 \rightarrow L_2$ оставляет конус L_2^+ инвариантным. Тогда отношение $\geq_T$ транзитивно в L_2^+ . Если же этот оператор самосопряжен, то для $f, g \in L_2^+$

$$\rho(f \vee g) = \rho(f + g) = \max[\rho(f), \rho(g)], \quad (1.5)$$

а соотношение $f \geq_T g$ влечет неравенство $\rho(f) \geq \rho(g)$.

Теорема 1. Пусть самосопряженный оператор $T: L_2 \rightarrow L_2$ оставляет конус L_2^+ инвариантным, и пусть $f \sim_Q g$ для некоторых $f, g \in L_2^+$, где $Q = T^2$, причем $\|Tf\| \neq 0$. Если существуют целое $j \geq 0$ и $u \in L_2^+$ такие, что $g \sim_Q u$, $g \geq u$ и $Q^j f \geq u$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(Q^{n+1}f, g)}{(Q^n f, g)} = \rho^2 \quad (1.6)$$

с $\rho = \rho_T(f)$.

По поводу этой теоремы отметим, что ее прообразом служит соответствующий результат работы [13] (чтение которой затруднено из-за обилия искажений). Появление здесь оператора $Q = T^2$ связано, в частности, с возможностью эффектов типа периодичности (см. п. 3, следствие 3). По этой же причине без дополнительных предположений из теоремы 1 нельзя извлечь никаких сведений о левой части (1.6) с оператором Q , замененным на T .

В оставшейся части пункта семейство рассматриваемых операторов в L_2 будет несколько сужено, а σ -алгебра $\mathcal{B}$ будет предполагаться счетнопорожденной. На измеримом пространстве $(E, \mathcal{B})$ мы фиксируем ядро $p(x, dy) \geq 0$, σ -конечное в смысле [2] вместе со своими итерациями $p_n(x, dy)$, $n \geq 1$. Для $\mathcal{B}$ -измеримых функций f положим $Pf(x) = \int f_+(y) p(x, dy) + \int f_-(y) p(x, dy)$, $x \in E$, коль скоро хотя бы один из выписанных интегралов конечен, где $f_{\pm} = \frac{1}{2}(|f| \pm f)$. Положим также $\mu P(A) = \int p(x, A) \mu(dx)$, $A \in \mathcal{B}$, для мер μ , заданных на $\mathcal{B}$, и приравняем $\mu(f)$ к интегралу $\int f d\mu$, если он определен.

Будем называть оператор $T: L_2 \rightarrow L_2$ порожденным ядром $p(x, dy)$ или оператором P , если для любых f_1 и f_2 из одного и того же класса эквивалентности $\tilde{f} \in L_2$ функции Pf_1 и Pf_2 входят в класс $T\tilde{f}$. Простое условие, при котором P порождает T , см. в лемме 3 из п. 3. Оператор $T: L_2 \rightarrow L_2$, порожденный заданным ядром, самосопряжен, если это ядро симметрично (точнее, ξ -симметрично) в том смысле, что $(Pf, g) = (f, Pg)$ для всех $\mathcal{B}$ -измеримых $f, g \geq 0$ (с этого момента символ (f, g) , где f и g — вещественные функции на E , обозначает также интеграл $\int fg d\xi$, если последний определен).

Ядро $p(x, dy)$, по определению, ν -неприводимо, где ν — некоторая нетривиальная σ -конечная мера на $\mathcal{B}$, если $\sum_{n \geq 1} p_n(x, A) > 0$ всюду в E всякий раз, когда $\nu(A) > 0$ [2], [4], [6]. Симметричное ν -неприводимое ядро является и ξ -неприводимым (см. лемму 5), и далее, если это не ведет к недоразумению, используется сокращенный термин «неприводимое ядро».

Вплоть до теоремы 2 ядро $p(x, dy)$ будем предполагать симметричным, неприводимым и порождающим оператор $T: L_2 \rightarrow L_2$. Пусть ξ_0 — произвольная конечная мера на $\mathcal{B}$, эквивалентная ξ . Взяв за основу соответствующее определение из [2], назовем $\mathcal{B}$ -измеримую функцию $f \geq 0$ минорантной, если $\xi(f) > 0$ и $p_m(x, A) \geq \beta f(x) \xi_0(A)$ для $x \in E$ и $A \in \mathcal{B}$ при некоторых $\beta > 0$ и натуральном m . Если функция-индикатор какого-либо $A \in \mathcal{B}$ минорантна, то и A именуется минорантным, и мы часто будем пользоваться тем, что $A \in \mathcal{B}$ содержит минорантное подмножество, если $\xi(A) > 0$ [2], [4].

Как известно [2], при ξ -почти всех x степенной ряд

$$\sum_{n \geq 0} t^n P^n f(x) = G_t f(x), \quad t \geq 0, \quad (1.7)$$

имеет один и тот же конечный радиус сходимости R , не зависящий от выбора минорантной функции f и называемый параметром сходимости данного ядра. Мы будем также свободно пользоваться такими понятиями, как R -возвратное ядро, где R имеет только что указанный смысл, или период ядра [2]. Ядро $p(x, dy)$ назовем харрисовским, если оно задает

вероятности перехода некоторой возвратной по Харрису цепи Маркова в $(E, \mathcal{B})$.

При описании связи между R и величинами, определяемыми посредством (1.1), а также и для других целей будем $\mathcal{B}$ -измеримые функции с ξ -суммируемыми квадратами отождествлять с соответствующими элементами из L_2 . Это позволяет, в частности, величину $\rho(f)$ для функции $f \geq 0$ указанного вида определять прежним образом (см. (1.1)), функцию Pf отождествлять с Tf , записи типа $f \geq_P g$ или $f \sim_P g$ истолковывать, как прежде, и т.п.

Предложение 1. Пусть симметричное неприводимое апериодическое ядро $p(x, dy)$ имеет параметр сходимости $R > 0$, и пусть оно порождает оператор $T: L_2 \rightarrow L_2$. Тогда $f \sim_{P^2} g$ для любых минорантных функций $f, g \in L_2$. При этом $\rho(f) = R^{-1}$ для f указанного вида.

Из нашей теоремы 1 и теоремы 7.4 книги [2] выводится

Теорема 2. Пусть симметричное апериодическое ядро $p(x, dy)$ является харрисовским. Пусть функции f, g, u, v минорантны и ξ -суммируемы, причем $\xi(u) > 0$ и $\xi(v) > 0$. Тогда при любом целом n

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(P^n f, g)}{(P^{n+m} u, v)} = \frac{\xi(f) \xi(g)}{\xi(u) \xi(v)}. \quad (1.8)$$

Эту теорему можно обобщить следующим образом.

Следствие 1. Пусть функция $h > 0$ является R -инвариантной (т.е. $RPh = h$) для симметричного апериодического R -возвратного ядра $p(x, dy)$. Пусть функции f, g, u, v минорантны и $h\xi$ -суммируемы, причем $\xi(u) > 0$ и $\xi(v) > 0$, где мера $h\xi$ на $\mathcal{B}$ определяется равенством $h\xi(dy) = h(y) \xi(dy)$. Тогда при любых n

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(P^n f, g)}{(P^{n+m} u, v)} = R^m \frac{\xi(fh) \xi(gh)}{\xi(uh) \xi(vh)}.$$

Что касается существования упомянутой здесь функции h , то оно гарантируется R -возвратностью рассматриваемого ядра [2]. Заметим также, что симметричное неразложимое ядро либо апериодично, либо имеет период $d = 2$ (см. следствие 3). Поэтому не составляет труда переформулировать теорему 2 и следствие 1 так, чтобы они годились и в периодическом случае (ср. [12]).

Особый интерес вызывает случай локально компактного пространства E (эргодическая теория для феллеровских стохастических ядер на компактных пространствах представлена результатами Бебутова, Иосиды и Крылова-Боголюбова — см., например, [15] — и мы не будем к ней обращаться). До конца пункта мы постулируем следующее условие:

(I) E является локально компактным пространством со счетной базой, $\mathcal{B}$ — его борелевской σ -алгеброй, ξ — мерой Радона (т.е. мерой на $\mathcal{B}$ с конечными значениями на компактах), плотной в E .

Требование плотности ξ (согласно нему $\xi(U) > 0$ для непустых открытых $U \subset E$) малосущественно: можно выделить такое замкнутое $E' \subset E$ с $\xi(E \setminus E') = 0$, что сужение меры ξ на E' плотно в E' , и вместе E рассмотреть E' , заменив ξ и $p(x, dy)$ соответствующими сужениями. Символом C_0^+ обозначается совокупность всех непрерывных в E функций $f \geq 0$ с компактными носителями, исключая $f \equiv 0$. Ядро $p(x, dy)$ и отвечающий ему оператор P назовем квазифеллеровскими, если непрерывны все функции вида $P^n f$, где $f \in C_0^+$, $n \geq 1$. Именно так обстоит дело, если функции вида Pf , $f \in C_0^+$, и функции $p_n(\cdot, E)$, $n \geq 1$, непрерывны [13].

Как и при изучении цепей Маркова на топологических пространствах (см., например, [7]), введем условие «топологической связности»:

(II) для любых $x \in E$ и $f \in C_0^+$ реализуется неравенство $P^n f(x) > 0$ при каком-либо $n \geq 1$ (зависящем, вообще говоря, от f и x).

Впоследствии будем говорить о выполнении условия (IIa) (соответственно (IIб)), если указанное в (II) число n можно считать четным (нечетным). Во многих случаях (IIa) $\implies$ (IIб) (см. п. 5), и условие (IIa) позволит в теореме 3 обойтись без требований типа аперiodичности или неприводимости.

Ради краткости квазифеллеровское симметричное ядро $p(x, dy)$, подчиненное условию (IIa) и порождающее оператор $T: L_2 \rightarrow L_2$, назовем допустимым. Поскольку для такого ядра величина $\rho(f) = \rho_T(f)$ (см. (1.1)) не зависит от выбора $f \in C_0^+$ (см. п. 5), ему можно сопоставить параметр

$$r = [\rho(f)]^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} [\|P^n f\|^{-1/n}], \quad f \in C_0^+, \quad (1.9)$$

не зависящий от конкретного выбора f , причем $0 < r < \infty$ в соответствии с (1.3) (согласно (IIa) $\|Tf\| > 0$ для $f \in C_0^+$).

Предложение 2. Если R — параметр сходимости неприводимого допустимого ядра $p(x, dy)$, то $R \geq r$. При этом $R = r$, коль скоро хотя бы одна из функций $f \in C_0^+$ является минорантной.

Допустимое ядро $p(x, dy)$ и отвечающий ему оператор P назовем топологически лиувиллевыми, если любые две нетривиальные меры Радона, r -инвариантные для P (т.е. являющиеся решениями уравнения $r\mu P = \mu$), могут отличаться друг от друга лишь постоянным множителем. При $r = 1$ свойство топологической лиувиллевости исследовалось, например, в [7].

Введем еще одно условие:

(III) либо E компактно, либо для каждой функции $f \in C_0^+$ найдутся $\varphi \in C_0^+$, $t \in]0, r[$ и натуральное l , при которых

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P^{2l} f(x)}{H_t \varphi(x)} = 0, \quad (1.10)$$

где положено $H_t \varphi = \sum_{n \geq 1} t^{2n} P^{2n} \varphi$ (здесь имеется в виду обычная одно-точечная компактификация пространства E).

Для допустимого ядра $p(x, dy)$ условие (III) заведомо выполнено, если соответствующий оператор P отображает C_0^+ в себя. Применительно к допустимому субстохастическому ядру соотношение (1.10) можно истолковать, как требование, чтобы из дополнения достаточно большого компакта в E цепь Маркова с переходными вероятностями $p_2(x, dy)$ попадала на l -м шаге в компактный носитель функции f с несравненно меньшей вероятностью, чем в другой (возможно, больший) компакт за, быть может, большее число шагов.

Теорема 3. Пусть выполнено условие (I). Пусть ядро $p(x, dy)$ допустимо и удовлетворяет условию (III), а ядро $p_2(x, dy)$ является топологически лиувиллевым. Тогда, каковы бы ни были функции $f, g, u, v \in C_0^+$ и натуральное m ,

$$\frac{(P^n f, g)}{(P^{n+m} f, g)} \rightarrow r^m \frac{\eta(f) \eta(g)}{\eta(u) \eta(v)} \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (1.11)$$

где r — то же, что и в (1.9), а η — произвольная нетривиальная r^2 -инвариантная мера Радона для ядра $p_2(x, dy)$.

Теорема 3, в частности, применима к ситуации, когда в $(E, \mathcal{B})$ задана (возможно, обрывающаяся) цепь Маркова с переходными вероятностями $p(x, dy)$, удовлетворяющими требованиям теоремы. При этом лемма 2 п. 2 снимает вопрос о существовании соответствующего оператора T . Если же указанная цепь не обрывается и $r = 1$, то мера ξ инвариантна и для ядра $p(x, dy)$, и для ядра $p_2(x, dy)$ (см. лемму 3 в п. 3), так что в этом случае в (1.11) можно считать $\eta = \xi$ и опустить множитель r^m .

С помощью теоремы 3 легко получить упоминавшуюся предельную теорему для отношений, порожденных простым d -мерным случайным блужданием при $d \geq 1$ [14]. С этой целью теорему 3 надо применить не к соответствующему ядру $p(x, dy)$, а к сужению $p_2(x, dy)$ на один из двух циклических классов. Отметим, что случай $d \geq 3$ не может быть рассмотрен ни с помощью уже обсуждавшейся теоремы Ори, ни с помощью нашей теоремы 2.

В связи с теоремой 3 возникает естественный вопрос: когда лиувиллевость ядра $p(x, dy)$ влечет аналогичное свойство для $p_2(x, dy)$? Частичный ответ можно найти в п. 6.

2. К теореме 1. В этом пункте фиксированы измеримое пространство $(E, \mathcal{B})$, σ -конечная мера ξ на $\mathcal{B}$ и линейный ограниченный оператор $T: L_2 \rightarrow L_2$, оставляющий инвариантным конус L_2^+ . Наша цель состоит в доказательстве теоремы 1, для чего требуется определенная подготовка.

Доказательство леммы 1. Пусть $f_i \in L_2^+$, $1 \leq i \leq 3$, и $f_i \geq f_{i+1}$ при $i = 1, 2$, т.е. $f_i + Tf_i + \dots + T^k f_i \geq \gamma f_{i+1}$ при $i = 1, 2$ и соответствующих $\gamma > 0$ и $k \geq 1$ (ср. (1.4)). Тогда

$$\gamma^2 f_3 \leq \sum_{0 \leq m \leq k} T^m \left(\sum_{0 \leq j \leq k} T^j f_1 \right) \leq \alpha \sum_{0 \leq m \leq 2k} T^m f_1,$$

где $\alpha > 0$, откуда и следует транзитивность отношения $\geq_T$.

Далее оператор T считается самосопряженным. Пусть $f, g \in L_2^+$ и $\rho(f) \geq \rho(g)$. Так как $\rho(f) \leq \rho(f \vee g) \leq \rho(f + g)$, для доказательства (1.5) достаточно установить лишь второе из равенств в (1.5). Неравенства

$$\rho(f) \leq \rho(f + g) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ (\|T^n f\| + \|T^n g\|)^{1/n} \right\} \quad (2.1)$$

очевидны при $\|Tf\| = 0$ и вытекают из (1.1) при $\|Tf\| \neq 0$. Если же $s > \rho(f)$ и n достаточно велико, то $\|T^n f\| + \|T^n g\| < 2s^n$, так что $\rho(f + g) \leq s$ и второе из равенств (1.5) доказано.

Пусть $f \geq_T g$, а h равно левой части (1.4). Соотношения (1.5) и (1.2) показывают, что $\rho(f) = \rho(h) \geq \rho(g)$, и лемма доказана.

Лемма 2. Пусть оператор T самосопряжен и $f, g \in L_2^+$, причем $g \geq_{T^2} f$. Тогда при подходящем $C_1 > 0$

$$\|T^n f\| \leq C_1 \|T^n g\|, \quad n \geq 0. \quad (2.2)$$

Если $\|Tg\| \neq 0$ и $T^{2j} f \geq ag$ при некоторых $a > 0$ и $j \geq 0$, то при подходящих $C_2, C_3 > 0$

$$C_2 \leq (T^{2n} f, g) \|T^n g\|^{-2} \leq C_3, \quad n \geq j. \quad (2.3)$$

Если же $T^{2l+1} f \geq bg$ при каких-либо $b > 0$ и $l \geq 0$, то оценки типа (2.3) верны и для $(T^{2n+1} f, g) \|T^n g\|^{-2}$.

Доказательство. Если $\|Tg\| = 0$, то, как легко заметить, и $\|Tf\| = 0$, и оценка (2.2) очевидна. Поэтому будем считать, что $\|Tg\| \neq 0$. По аналогии с (1.4) $g + T^2 g + \dots + T^{2k} g \geq \gamma f$ при соответствующих $\gamma > 0$ и $k \geq 1$, и, таким образом,

$$\begin{aligned} (T^{2n} f, f) &\leq \gamma^{-2} \sum_{0 \leq m, i \leq k} (T^{2n+2m} g, T^{2i} g) \\ &= \gamma^{-2} \sum_{0 \leq m, i \geq k} \|T^{n+m+i} g\|^2 \leq C_4 \sum_{0 \leq m \leq 2k} \|T^{n+m} g\|^2 \leq C_5 \|T^n g\|^2 \end{aligned}$$

с некоторыми $C_4, C_5 > 0$ (см. (1.3)). Отсюда вытекает (2.2).

Если же $T^{2j}f \geq ag$ и $n \geq j$, то $\|T^{n+j}f\|^2$ совпадает с

$$(T^{2n}f, T^{2j}f) \geq a(T^{2n}f, g) \geq a^2(T^{2n-2j}g, g) = a^2\|T^{n-j}g\|^2.$$

Отношения величин $\|T^{n+j}f\|$ и $\|T^{n-j}f\|$ к $\|T^n g\|$ в согласии с (1.3) и (2.2) заключены между двумя положительными константами, и ввиду выписанной цепочки соотношений то же можно сказать и о величине $(T^{2n}f, g)\|T^n g\|^{-2}$. Тем самым (2.3) доказано.

Если же существуют l и b , указанные в лемме, то при $n \geq l$

$$b(T^{2n-2l}g, g) \leq (T^{2n+1}f, g) \leq \|T^n f\| \cdot \|T^{n+1}g\| \leq C_1\|T\| \cdot \|T^n g\|^2,$$

и по аналогии с предыдущим получаем последнее утверждение леммы.

Следствие 2. Пусть оператор T самосопряжен и $f, g \in L_2^+$, причем $f \sim_{T^2} g$ и $\|Tf\| \neq 0$. Тогда последовательность $\{\|T^n f\| \cdot \|T^n g\|^{-1}; n \geq 0\}$, ограничена. Если же $T^{2j}f > ag$ при некоторых $a > 0$ и $j \geq 0$, то и последовательность $\{\|T^n f\|^2(T^{2n}f, g)^{-1}; n \geq 1\}$ ограничена.

Доказательство теоремы 1. Ограничимся случаем $\rho = 1$ (иначе следовало бы T заменить на $\rho^{-1}T$). Пусть $h \equiv f + Qf + \dots + Q^k f \geq \gamma g$ (ср. (1.4)), $\gamma > 0$, $w = \gamma g$, $f_1 = h + w$ и $f_2 = h - w$. Ясно, что $h \sim_Q f \sim_Q w \sim_Q u$ и $\rho(f_1) = \rho(h) = \rho(w) = \rho = 1$ (см. лемму 1). Увеличив при необходимости k , добьемся, чтобы и $\rho(f_2) = \rho(h) = 1$ (см. (1.5)).

Последующие рассуждения проведем в три этапа.

1°. Начнем с вывода оценки

$$\alpha_n \equiv \frac{(Q^n h, h)}{(Q^n f, w)} \leq C, \quad n \geq j, \quad (2.4)$$

при некотором $C > 0$. Рассмотрим отношения:

$$I_{1,n} = \frac{(Q^n h, h)}{(Q^n f, f)}, \quad I_{2,n} = \frac{(Q^n f, f)}{(Q^n f, u)}, \quad I_{3,n} = \frac{(Q^n f, u)}{(Q^n f, w)}, \quad n \geq j.$$

Величины вида $I_{1,n}$ или $I_{2,n}$ по следствию 2 не превышают некоторой постоянной. То же относится и к $I_{3,n}$, поскольку $w = \gamma g \geq \gamma u$. Отсюда и из представления $\alpha_n = I_{1,n}I_{2,n}I_{3,n}$ получаем (2.4).

2°. Теперь докажем равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(Q^{n+1}h, w)}{(Q^n h, w)} = 1. \quad (2.5)$$

Используя определение f_1 и f_2 и учитывая самосопряженность Q , находим

$$(Q^n f_1, f_1) - (Q^n f_2, f_2) = 4(Q^n h, w). \quad (2.6)$$

Пусть $0 < \varepsilon < 1$. Из равенств $\rho(f_1) = \rho(f_2) = 1$ и из (1.1) следует, что

$$1 - \varepsilon < (Q^{n+1}f_i, f_i)(Q^n f_i, f_i)^{-1} < 1 + \varepsilon, \quad i = 1, 2, \quad (2.7)$$

при n , превышающем некоторое натуральное $n_1 \geq j$ (ведь $(Q^n f_i, f_i) = \|T^n f_i\|^2$). Поэтому, дважды применив (2.6), при $n > n_1$ получаем

$$\begin{aligned} 4(Q^{n+1}h, w) &\leq (1 + \varepsilon)(Q^n f_1, f_1) - (1 - \varepsilon)(Q^n f_2, f_2) \\ &= (1 + \varepsilon)[(Q^n f_1, f_1) - (Q^n f_2, f_2)] + 2\varepsilon(Q^n f_2, f_2) \\ &\leq 4(1 + \varepsilon)(Q^n h, w) + 2\varepsilon(Q^n h, h) \end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} 4(Q^{n+1}h, w) &\geq (1 - \varepsilon)(Q^n f_1, f_1) - (1 + \varepsilon)(Q^n f_2, f_2) \\ &\geq 4(1 - \varepsilon)(Q^n h, w) - 2\varepsilon(Q^n h, h). \end{aligned}$$

В силу этих оценок отношение $(Q^{n+1}h, w)/(Q^n h, w)$ заключено между $1 - \varepsilon - \varepsilon a_n$ и $1 + \varepsilon + \varepsilon a_n$, где $a_n \equiv (Q^n h, h)(Q^n h, w)^{-1} \leq \alpha_n \leq C$ (см. (2.4)) и $n > n_1$. Теперь (2.5) становится очевидным.

3°. Заметим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,k} = 1, \quad (2.8)$$

где $a_{n,k} = (Q^{n+k+1}f, w)(Q^n f, w)^{-1}$ (до конца доказательства считается, что $n > j$). Действительно, вспомнив определение h и применив (2.5), находим

$$\frac{a_{n,k} - 1}{b_n} = \frac{(Q^{n+k+1}f, w) - (Q^n f, w)}{(Q^n h, w)} = \frac{(Q^{n+1}h, w) - (Q^n h, w)}{(Q^n h, w)} \rightarrow 0,$$

где $b_n \equiv (Q^n h, w)(Q^n f, w)^{-1} \leq \alpha_n \leq C$ (см. (2.4)), откуда следует (2.8).

Настал момент заметить, что при выборе $\gamma > 0$ и k мы требовали лишь осуществления соотношений $f + Qf + \dots + Q^k f \geq \gamma g$ и $\rho(f_2) = 1$. Ввиду этого предыдущие рассуждения остаются в силе и при замене пары γ и k парой γ и $k + 1$. Иными словами, (2.8) можно использовать и при k , замененном на $k + 1$, и в итоге

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n,k}}{a_{n,k+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(Q^{n+k+1}f, w)}{(Q^{n+k+2}f, w)}.$$

Таким образом, соотношение (1.6) доказано.

3. Некоторые свойства неотрицательных ядер. На протяжении этого пункта рассматривается измеримое пространство $(E, \mathcal{B})$ со счетнопорожденной σ -алгеброй $\mathcal{B}$, на которой определена σ -конечная мера ξ . На этом пространстве задается ядро $p(x, dy) \geq 0$, являющееся

σ -конечным вместе со своими итерациями, и с ним ассоциируется оператор P (см. п. 1).

В параграфе представлен довольно разнородный материал, необходимый для дальнейшего. Наибольший интерес здесь представляют следствие 3 и доказательство предложения 1. Начинаем же мы с утверждения, различные варианты которого встречались в литературе (см., например, [13]).

Лемма 3. Пусть ядро $p(x, dy)$ ограничено: $p(\cdot, E) \leq C$ при некотором $C \geq 0$. Если мера ξ α -субинвариантна (т.е. $\alpha \xi P \leq \xi$) при некотором $\alpha > 0$, то это ядро порождает линейный ограниченный оператор $T: L_2 \rightarrow L_2$ с нормой $\|T\| \leq (C/\alpha)^{1/2}$.

Доказательство. По неравенству Коши–Буняковского

$$\int (Pf)^2 d\xi \leq \int [P1] [P(f^2)] d\xi \leq C \int f^2 d(\xi P) \leq C\alpha^{-1} \int f^2 d\xi$$

для любых неотрицательных $\mathcal{B}$ -измеримых функций, что и требовалось доказать.

Напомним, что ξ -симметричные ядра мы называем симметричными, а запись «п.в.» означает « ξ -почти всюду».

Лемма 4. Пусть ядро $p(x, dy)$ субстохастично и симметрично. Тогда мера ξ субинвариантна относительно него, причем она инвариантна тогда и только тогда, когда $p(\cdot, E) = 1$ п.в.

Доказательство. Субинвариантность вытекает из соотношений $\int Pf d\xi = \int f \cdot P1 d\xi \leq \int f d\xi$, в которых функция $f \geq 0$ предполагается $\mathcal{B}$ -измеримой. Присутствующее здесь равенство влечет и второе утверждение леммы.

При $A \in \mathcal{B}$ и $t > 0$ положим

$$G(\cdot, A) = \sum_{n \geq 1} p_n(\cdot, A) \quad \text{и} \quad A^+ = A \cup \{x \in E: G(x, A) > 0\}.$$

Лемма 5. Пусть ядро $p(x, dy)$ симметрично и ν -неприводимо, где ν — некоторая σ -конечная мера на $\mathcal{B}$. Тогда данное ядро ξ -неприводимо, причем $\xi(A^+) = 0$, если $A \in \mathcal{B}$ и $\xi(A) = 0$.

Доказательство. В силу симметричности рассматриваемого ядра

$$\int_B G(x, A) d\xi = \int_A G(x, B) d\xi \quad (3.1)$$

для $A, B \in \mathcal{B}$. При $B = E$ и $\xi(A) = 0$ из (3.1) усматриваем, что $G(\cdot, A) = 0$ п.в., и, следовательно, $\nu(A) = 0$ в соответствии с условием ν -неприводимости. Иными словами, мера ν абсолютно непрерывна относительно ξ и существует плотность $\varphi = d\nu/d\xi$, которую из-за σ -конечности ξ допустимо считать конечной всюду.

Не ограничивая общности, предположим, что $\nu(A^+) = 0$ всякий раз, когда $\nu(A) = 0$ [2], [6]. Так как $\nu(B) = 0$ для $B = \{x \in E: \varphi(x) = 0\}$, то и $\nu(B^+) = 0$. Для $x \in A \equiv E \setminus B^+$ имеем $G(x, B^+) = 0$, тогда как $G(\cdot, A) > 0$ всюду в E ввиду очевидного неравенства $\nu(A) > 0$. В этой ситуации (3.1) с B^+ вместо B показывает, что $\xi(B^+) = 0$, а потому $G(\cdot, B) = 0$ п.в. Очередное применение (3.1) с $A = E$ ведет к равенству $G(\cdot, E) = 0$ п.в. на B , вследствие которого $\xi(B) = 0$ (ведь условие ν -неприводимости исключает существование $x \in E$ с $G(x, E) = 0$). Таким образом, $\varphi = d\nu/d\xi > 0$ п.в. и мера ξ оказывается абсолютно непрерывной относительно ν , что и завершает доказательство.

Лемма 5 оправдывает использование (см. п. 1) термина «неприводимое ядро» применительно к ξ -неприводимым или ν -неприводимым симметричным ядрам. Более того, в случае симметричного неприводимого ядра из первого абзаца доказательства леммы вытекает, что ξ является максимальной мерой, определяющей неприводимость [2].

Следствие 3. Если ядро $p(x, dy)$ симметрично и неприводимо, то оно имеет период $d = 1$ или 2 .

Действительно, при $d > 2$ нашлось бы множество $A \in \mathcal{B}$ с $\xi(A) > 0$, во всех точках x которого $P^2 1_A(x) = 0$, где 1_A — функция-индикатор этого множества. Но тогда из равенств $\int (P^n 1_A)^2 d\xi = (P 1_A, P^{2n-1} 1_A) = (1_A, P^{2n} 1_A)$ при $n = 1$ мы сначала вывели бы равенство $P 1_A = 0$ п.в., а затем при $n \geq 2$ и равенство $P^n 1_A = 0$ п.в., что несовместимо с неприводимостью ядра.

Доказательство предложения 1. Если функции $f, g \in L_2$ минорантны, то

$$P^{n+m} f \geq \beta \gamma_n g \quad (3.2)$$

при некоторых $\beta > 0$ и $m \geq 1$ и всех $n \geq 0$, где $\gamma_n = \int P^n f d\xi_0$ (см. доказательство предложения 2.7 из [2]; здесь ξ_0 — мера, вводившаяся в п. 1 при определении минорантных функций). Ввиду аperiodичности данного ядра $\gamma_n > 0$ при всех достаточно больших n . Стало быть, $f \geq_{P^2} g$, а так как f и g можно поменять ролями, то $f \sim_{P^2} g$ и $\rho(f) = \rho(g)$ (см. лемму 1).

Докажем, что для любой минорантной функции f

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} [P^n f]^{1/n} \geq R^{-1} \quad (\text{п.в.}) \quad (3.3)$$

В самом деле, если она является индикатором минорантного множества, то (3.3) вытекает из результатов работы [9] (в ней речь идет о субстохастическом случае, однако те же соображения применимы в общей ситуации (ср. [6, § 6])). Для произвольной минорантной функции f можно подобрать минорантное множество A , на котором $f \geq a$ при некотором $a > 0$. Отсюда вновь следует (3.3).

Теперь для минорантной функции $f \in L_2$ установим неравенство

$$\rho(f) \geq R^{-1}. \quad (3.4)$$

Рассмотрим множества $A_n = \cap_{m \geq n} \{x \in E: P^m f(x) \geq \alpha^m\}$, $n \geq 1$, при фиксированном $\alpha \in]0, R^{-1}[$. Поскольку $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ и $\xi(E \cup_{n \geq 1} A_n) = 0$ (см. (3.3)), все значения $\xi(A_n)$, начиная с некоторого номера n , превышают некоторое $b > 0$. Пользуясь неприводимостью рассматриваемого ядра, найдем натуральные i и j , при которых $\xi(B) > 0$, где $B = \{x \in E: \varphi(x) > 0\}$, а $\varphi(\cdot) = p_i(\cdot, A_j)$. Затем подберем множество $B_1 \subset B$ с $\xi(B_1) > 0$, на котором $\varphi \geq c$ при некотором $c > 0$. Для $x \in B_1$

$$P^{n+i} f(x) \geq \int_{A_j} P^n f(y) p_i(x, dy) \geq \alpha^n \varphi(x) \geq c \alpha^n, \quad n \geq j.$$

Следовательно, $\|P^{n+i} f\|^2 \geq c^2 \alpha^{2n} \xi(B_1)$, $n \geq j$ и $\rho(f) \geq \alpha$ (см. (1.1)). Тем самым, (3.4) доказано, так как α можно взять сколь угодно близким к R^{-1} .

На основании сказанного в начале доказательства остается предъявить какую-нибудь минорантную функцию $f \in L_2$ с $\rho(f) = R^{-1}$. Для этого вернемся к мере ξ_0 и положим $\psi = d\xi_0/d\xi \geq 0$, а в качестве f возьмем минорантную функцию из L_2 , не превышающую ψ . Воспользовавшись (3.2) с $g = f$, находим

$$P^{n+m} f \geq \beta f \int P^n f d\xi_0 \geq \beta f \int P^n f \cdot f d\xi = \beta(P^n f, f) f.$$

Если допустить, что $\rho_1 \equiv \rho(f) > R^{-1}$, то при любом $t \in]\rho_1^{-1}, R[$ степенной ряд

$$\sum_{n \geq 1} t^{2n} \|P^n f\|^2 = \sum_{n \geq 1} t^{2n} (P^{2n} f, f) \quad (3.5)$$

должен расходиться. В силу последней цепочки соотношений должен разойтись и ряд $\sum_{n \geq 1} t^{2n} P^{2n+m} f(x)$ при тех x , в которых $f(x) > 0$. Таким образом, $t \geq R$, но это исключено для теперешних значений t , и сделанное предположение приходится отбросить. Итак, $\rho(f) = R^{-1}$.

4. Доказательство теоремы 2. Пусть $p(x, dy)$ удовлетворяет условиям доказываемой теоремы. Если функции $f, g \in L_2$ минорантны, то $f \sim_{P^2} g$ (см. доказательство предложения 1). Умножив функцию-индикатор u_1 какого-либо минорантного множества, на котором $g \geq c$ при каком-нибудь $c > 0$, на подходящий множитель, получим минорантную функцию $u_2 \leq g$. При этом в соответствии с (3.2) одновременно сможем добиться и выполнения неравенства $P^{2j} f \geq u_2$ при некотором $j \geq 1$. На основании теоремы 1, положив $Q = P^{2j}$, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(Q^{n+1} f, g)}{(Q^n f, g)} = 1. \quad (4.1)$$

Как нетрудно заметить, цепь Маркова с переходным оператором Q является неприводимой. Если бы ее параметр сходимости превысил 1

или равнялся 1, но она не была бы 1-возвратной, то потенциалы вида $Hw = \sum_{n \geq 1} Q^n w$ были бы ограничены для достаточно большого семейства функций w (см. [2, следствие 3.1]). Тогда и потенциалы вида $Gw = \sum_{n \geq 1} P^n w = Hw + PHw$ обладали бы тем же свойством, а это исключается возвратностью основной цепи. Следовательно, цепь Маркова, отвечающая Q , является 1-возвратной, и в соответствии с утверждениями 3.7 и 3.13 из [2] найдется множество $E_1 \in \mathcal{B}$, сужение (в другой терминологии — часть) на котором этой цепи возвратно по Харрису. Так как $\xi(E \setminus E_1) = 0$, можно безболезненно допустить, что $E = E_1$, т.е. что сама эта цепь возвратна по Харрису (иначе в дальнейших рассуждениях потребовались бы микроскопические изменения).

Пусть имеются ξ -суммируемые минорантные для основного ядра функции f, g, u, v . Будучи ограниченными, они автоматически входят в L_2 . Ввиду (4.1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} a_n^{-1} = 1$, если $a_n = (Q^n f, \tilde{g})$, где $\xi(\tilde{g}) = 1$ и $\tilde{g}$ отличается от g лишь подходящим множителем. Поэтому к оператору $T_1: L_2 \rightarrow L_2$, ассоциированному с Q , и к мере $\nu = \tilde{g}\xi$ применима теорема 7.4 из [2], согласно которой $(Q^n f, g)(Q^n v, g)^{-1} \rightarrow \xi(f) [\xi(v)]^{-1}$ при $n \rightarrow \infty$ (с помощью (3.2) нетрудно убедиться в том, что функция, минорантная для основной цепи, минорантна и для цепи, отвечающей Q). Точно так же $(Q^n g, v)(Q^n u, v)^{-1} \rightarrow \xi(g) [\xi(u)]^{-1}$, и в итоге

$$\frac{(Q^n f, g)}{(Q^n u, v)} \rightarrow \frac{\xi(f) \xi(g)}{\xi(u) \xi(v)} \quad (4.2)$$

при $n \rightarrow \infty$. Вместе с f минорантной является и функция Pf , и возникает возможность использовать (4.2) с Pf вместо f , причем $\xi(Pf) = \xi(f)$ по лемме 4. В сочетании с (4.2) это дает (1.8).

Доказательство следствия 1 (набросок). Траектория цепи Маркова, отвечающей P , почти наверное не попадает в дополнение множества $E' = \{x: h(x) < \infty\}$, если она начинается в этом множестве. При этом $\xi(E \setminus E') = 0$, так что доказательство достаточно провести для сужения цепи на E' , с учетом чего мы ограничиваемся случаем $E = E'$. С помощью «преобразования подобия» [2] введем новое ядро $\tilde{p}(x, dy) = h^{-1}(x) h(y) p(x, dy)$, $x \in E$, симметричное относительно меры $\eta = h^2 \xi$. Как показывает непосредственная проверка, всякая функция вида φ/h является минорантной для нового ядра, если ψ минорантна для исходного (для нового ядра в роли меры ξ_0 из прежнего определения минорантной функции можно взять $\tilde{\xi}_0 = h_1 \xi_0$ с $h_1 = \min(h, 1)$).

Поскольку новое ядро является 1-возвратным, можно предположить его харрисовским (ср. с предыдущим доказательством). Это позволяет применить вариант (1.8), соответствующий замене ξ на h , $p(x, dy)$ на $\tilde{p}(x, dy)$ и функций f, g и т.д. на $f/h, g/h$ и т.д. В результате и будет доказано утверждение следствия.

5. Случай квазифеллеровского ядра. Всюду в этом пункте постулируется условие (I) из п. 1 и на измеримом пространстве $(E, \mathcal{B})$ задается допустимое в смысле п. 1 ядро $p(x, dy) \geq 0$ (т.е. квазифеллеровское симметричное ядро, подчиненное условию (IIa) и порождающее оператор $T: L_2 \rightarrow L_2$; эти условия, как правило, не оговариваются). Постоянно используется обозначение $Q = P^2$.

Основная цель состоит в доказательстве теоремы 3 (см. 1), однако сначала необходимо установить корректность определения параметра $r > 0$ посредством (1.9) (см. следствие 4 ниже) и доказать предложение 2.

Сразу подчеркнем, что при наших предположениях условия (IIa) и (IIб) равносильны. Действительно, в силу (IIa) $\varphi(\cdot) \equiv \sum_{i \geq 1} Q^i f(\cdot) > 0$ в E для $f \in C_0^+$, и, следовательно, $P\varphi(\cdot) > 0$. Таким образом, (IIa) $\Rightarrow$ (IIб), и аналогично (IIб) $\Rightarrow$ (IIб).

Лемма 6. При любых $f, g \in C_0^+$ и целых $k, m \geq 0$ реализуется соотношение $P^m f \sim_Q P^k g$.

Доказательство. Компакты $F_n = \{x \in F: P^m s_n(x) = 0\}$, где F — компактный носитель функции g и $s_n = \sum_{1 \leq i \leq n} Q^i f$, с ростом $n \geq 1$ не возрастают, а на их пересечении должно выполняться равенство $P^m[\sum_{i \geq 1} Q^i f] = 0$, исключаемое условием (IIa). Следовательно, это пересечение пусто, а с ним, в силу (I), пуст и компакт $\cap_{1 \leq i \leq j} F_i$ при некотором натуральном j . Поэтому $P^m s_j \geq ag$, если $a > 0$ достаточно мало, т.е. $P^m f \geq_Q g$, и аналогично $P^k g \geq_Q f$, так что $f \sim_Q g$ и $P^k s_n \geq g$ при подходящем n . Применение оператора P^k к обеим частям последнего неравенства показывает, что $f \geq_Q P^k g$. Таким образом, $f \sim_Q P^k g$ и точно так же $g \sim_Q P^m f$, и утверждение леммы становится очевидным.

Из доказанной леммы непосредственно вытекает

Следствие 4. Значения $\rho(P^m f)$, а с ними и значения $r(P^m f) = [\rho(P^m f)]^{-1}$, где $f \in C_0^+$, а $m = 0, 1, \dots$, не зависят ни от выбора f , ни от выбора m . В частности, определение параметра r с помощью (1.9) корректно.

Следствие 5. Если $f, g \in C_0^+$, то $(P^n f, g)(P^{n+2} f, g)^{-1} \rightarrow r^2$ при $n \rightarrow \infty$.

Действительно, пусть $g(x_0) > 0$. Согласно условию (IIa), $Q^j f(x_0) > 0$ при некотором $j \geq 1$, а стало быть, найдется такая функция $w \in C_0^+$, что одновременно $g \geq w$ и $Q^j f \geq w$. Сопоставив теорему 1, лемму 6 и следствие 4, получаем утверждение следствия 5, но пока лишь при $n \rightarrow \infty$ по четным значениям. Это же рассуждение с f , замененным на Pf , охватывает случай нечетных n .

Доказательство предложения 2. В силу (1.9) радиус сходимости степенного ряда (3.5) с $f \in C_0^+$ равен r . Вместе с теоремой Фубини это позволяет утверждать, что ряд $\sum_{n \geq 0} t^{2n} P^{2n} f$ сходится п.в. на компактном носителе F_0 функции f , коль скоро $0 \leq t < r$.

Так как $\xi(F_0) > 0$ (см. условие (I)), найдется минорантная функция $g \leq f$. Следовательно, и ряд $\sum_{n \geq 0} t^{2n} P^{2n} g$ сходится п.в. на F_0 , если $0 \leq t < r$. Отсюда $R \geq r$, и для завершения доказательства остается сослаться на предложение 1.

Следующие леммы 7 и 8 играют ключевую роль при доказательстве теоремы 3. В них фиксируются функции $g, v \in C_0^+$ и некоторая неубывающая последовательность натуральных чисел $\{n_i; i \geq 1\}$, для которой $a_i \equiv (Q^{n_i} v, g) > 0$. Под мерами Радона понимаются меры Радона на E , и, как обычно, [1], последовательность мер Радона $\{\mu_n; n \geq 1\}$ называется широко сходящейся к мере Радона μ , если $\mu_n(f) \rightarrow \mu(f)$ для всех $f \in C_0^+$, когда $n \rightarrow \infty$.

Лемма 7. Пусть выполнено условие (III). Если меры Радона μ_i , определяемые равенством $\mu_i(f) = a_i^{-1} (Q^{n_i} f, g)$, $f \in C_0^+$, широко сходятся к мере Радона μ , то μ является r^2 -инвариантной относительно Q (т.е. относительно ядра $p_2(x, dy)$).

Доказательство. Замена $p(x, dy)$ на $rp(x, dy)$ позволяет ограничиться рассмотрением случая $r = 1$, что мы и сделаем.

1°. По следствию 5 $b_i \equiv (Q^{n_i} f, g) (Q^{n_i+1} f, g)^{-1} \rightarrow 1$ при $i \rightarrow \infty$, где $f \in C_0^+$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mu(f) &= \lim_{i \rightarrow \infty} [a_i^{-1} b_i (Q^{n_i+1} f, g)] = \lim_{i \rightarrow \infty} a_i^{-1} (Q^{n_i+1} f, g) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} a_i^{-1} (Q^{n_i} w, g) = \mu(w), \end{aligned} \quad (5.1)$$

если $w \in C_0^+$ и $w \leq Qf$. Выбрав функции $w_n \in C_0^+$, $n \geq 1$, сходящиеся снизу к Qf и заставив w пробегать вдоль $\{w_n\}$, получаем из (5.1) неравенство $\mu Q \leq \mu$, означающее субинвариантность μ относительно Q .

Если E компактно, широкая сходимостъ μ_i к μ возможна только при равномерной ограниченности указанных мер, и в этом случае широкая сходимостъ мер совпадает с узкой (в вероятностной терминологии — со слабой) сходимостъю. При этом аналогично второму из равенств в (5.1)

$$\mu(f) = \lim_{i \rightarrow \infty} a_i^{-1} (Q^{n_i+1} f, g) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_i(Qf) = \mu(Qf)$$

для всех $f \in C_0^+$, на чем и заканчивается рассмотрение случая компактного E .

2°. Займемся случаем некомпактного E . Фиксировав $\varepsilon > 0$ и задав l и φ согласно (1.10), докажем неравенство

$$\sup_{i \geq j} \left\{ \frac{\mu_i(1_{E \setminus F} Q^l f)}{\mu_i(\varphi)} \right\} < \varepsilon \quad (5.2)$$

при подходящем выборе числа $j = j(\varepsilon)$ и компакта $F = F(\varepsilon) \subset E$. Пусть $\delta > 0$, $0 < t < 1$ и $Q^l f / H_t \varphi < \delta$ вне некоторого компакта F (см. (III)).

То же рассуждение, что и в начале п. 1°, устанавливает неравенство $(Q^{n+1}\varphi_i, g) \leq (1 + \delta)(Q^n\varphi_i, g)$, где $\varphi_i = Q^{n_i}\varphi$, при целых $n \geq 0$ и достаточно больших i . Поэтому

$$(Q^n\varphi_i, g) \leq (1 + \delta)^n(\varphi_i, g); \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} (H_t\varphi_i, g) &= \sum_{n \geq 1} t^{2n}(Q^n\varphi_i, g) \leq \left[\sum_{n \geq 1} t^{2n}(1 + \delta)^n \right] (\varphi_i, g) \\ &\leq (1 - \beta)^{-1}(\varphi_i, g), \end{aligned} \quad (5.4)$$

коль скоро $\beta \equiv t^2(1 + \delta) < 1$ (далее считаем $\delta > 0$ удовлетворяющим последнему неравенству). Таким образом, при достаточно больших i

$$\begin{aligned} \mu_i(1_{E \setminus F} Q^l f) &\leq \delta \mu_i(H_t \varphi) = \delta a_i^{-1}(H_t Q^{n_i} \varphi, g) = \delta a_i^{-1}(H_t \varphi_i, g) \\ &\leq \delta a_i^{-1}(1 - \beta)^{-1}(\varphi_i, g) = \delta(1 - \beta)^{-1} \mu_i(\varphi). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Уменьшив при необходимости $\delta > 0$, из (5.5) выводим (5.2).

Оставшаяся часть доказательства проста. Пусть $0 < \varepsilon < 1$, а функция $u_\varepsilon \in C_0^+$ принимает значения из $[0, 1]$ и равна 1 на $F = F(\varepsilon)$. Будем считать $i \geq j(\varepsilon)$ достаточно большим. Тогда неравенство $\mu_i(Q^n f) \geq (1 - \varepsilon)^n \mu_i(f)$, $n \geq 1$, устанавливаемое по аналогии с (5.3), вместе с (5.2) дает

$$\begin{aligned} \mu_i(u_\varepsilon Q^l f) &\geq \mu_i[(1 - 1_{E \setminus F}) Q^l f] \geq \mu_i(Q^l f) - \varepsilon \mu_i(\varphi) \\ &\geq (1 - \varepsilon)^l \mu_i(f) - \varepsilon \mu_i(\varphi). \end{aligned}$$

Отсюда при $i \rightarrow \infty$ следует, что $\mu(u_\varepsilon Q^l f) \geq (1 - \varepsilon)^l \mu(f) - \varepsilon \mu(\varphi)$. Заставив теперь ε пробегать значения вида n^{-1} , $n \geq 2$, и выбрав соответствующие компакты $F(n^{-1})$ не убывающими с ростом n , приходим к неравенству $\mu(Q^l f) \geq \mu(f)$. Однако в силу субинвариантности μ (см. п. 1°) его левая часть не превышает правую, так что его части равны друг другу, т.е. μ инвариантна относительно Q .

Лемма 8. Пусть выполнено условие (III). Если меры Радона κ_i , определяемые равенством $\kappa_i(f) = a_i^{-1}(PQ^{n_i}f, g)$, $f \in C_0^+$, широко сходятся к мере Радона κ , то она τ^2 -инвариантна относительно Q .

Доказательство сходно с предыдущим. Пусть снова $\tau = 1$. Замена f на Pf позволяет сначала по аналогии с (5.1) вывести неравенство $\kappa(f) \geq \kappa(w)$ для всех $f, w \in C_0^+$, для которых $w \leq Qf$, а затем убедиться в субинвариантности κ относительно Q .

Предположим E некомпактным, так как рассмотрение компактного E не требует новшеств. Выберем новую функцию $w \in C_0^+$ с соблюдением условий $Q^j \varphi \geq w$ и $g \geq w$ (ср. п. 1° предыдущего доказательства). При $n_i > j$

$$(Q^{n_i} \varphi, g) \geq (Q^{n_i-j} w, w) = \|P^{n_i-j} w\|^2 \geq c_1 \|P^{n_i} g\|^2 \geq c_2 (Q^{n_i} \varphi, Pg) \quad (5.6)$$

с некоторыми $c_1, c_2 > 0$ (в (5.6) предпоследнее неравенство вытекает из лемм 2 и 6, а последнее — из неравенств, приведенных в конце доказательства леммы 2).

Ввиду (5.6) при достаточно больших i и некотором $c_3 > 0$

$$(H_t \varphi_i, Pg) \leq (1 - \beta)^{-1} (\varphi_i, Pg) \leq c_e (Q^{n_i} \varphi, g) = c_3 (\varphi_i, g),$$

где опять $0 < \beta < 1$ (ср. с (5.4)). Благодаря этому, подобно (5.5) и (5.2) находим

$$\kappa_i(1_{E \setminus F} Q^l f) \leq \delta a_i^{-1} (H_t \varphi_i, Pg) \leq \delta a_i^{-1} c_3 (\varphi_i, g) < \varepsilon \mu_i(\varphi), \quad (5.7)$$

где $\varepsilon > 0$ можно выбрать произвольно, $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ достаточно мало, а i достаточно велико.

Остается в рассуждениях, завершающих предшествующее доказательство, заменить меры μ_i на κ_i и вместо (5.2) применить (5.7).

Доказательство теоремы 3. Как и при доказательстве лемм 7 и 8, ограничимся случаем $r = 1$. Задав $g, v \in C_0^+$ и воспользовавшись следствием 5, будем работать лишь с настолько большими $n \geq 0$, чтобы $b_n \equiv (Q^n v, g) \neq 0$. Меры Радона ν_n определим посредством равенства $\nu_n(f) = b_n^{-1} (Q^n f, g)$, $f \in C_0^+$.

Для фиксированной функции $f \in C_0^+$ из леммы 6 и следствия 5 получаем

$$(Q^n f, g) \leq a \sum_{0 \leq m \leq M} (Q^{n+m} v, g) \leq b (Q^n v, g) \quad (5.8)$$

при соответствующих $a, b, M > 0$. Неравенства (5.8) устанавливают равномерную ограниченность значений этих мер на любом заданном компакте в E . Поэтому каждая подпоследовательность, извлеченная из $\{\nu_n\}$, содержит широко сходящуюся подпоследовательность $\{\nu_{n_i}\}$ [1], причем соответствующая предельная мера Радона ν инвариантна относительно Q (см. лемму 7) и $\nu(v) = 1$. В силу лиувиллевости ядра $p_2(x, dy)$ эти свойства меры ν определяют ее однозначно независимо от конкретного выбора $\{\nu_{n_i}\}$. Следовательно, меры $\{\nu_n\}$ широко сходятся к ν при $n \rightarrow \infty$. В то же время, если η — произвольная мера Радона, инвариантная относительно Q , исключая $\eta \equiv 0$, то $\nu = \alpha \eta$ с $\alpha = 1/\eta(v)$.

Итак, величина $\nu_n(f) = (Q^n f, g) (Q^n v, g)^{-1}$ стремится к $\eta(f)/\eta(v)$ при $n \rightarrow \infty$, каковы бы ни были $f, g, v \in C_0^+$. Отсюда (ср. вывод (4.2)) вытекает (1.11) с $r = 1$ и $m = 0$ при условии, что $n \rightarrow \infty$ по четным значениям, а с помощью следствия 5 это заключение распространяется и на все четные m . Мало того, те же рассуждения, но со ссылкой на лемму 8 опять приводят к (1.11) с $r = 1$ и четным m при $n \rightarrow \infty$ по нечетным значениям, т.е. нами получено утверждение теоремы при четном m .

Остается проверить, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(P^{2n+1}f, g)}{(P^{2n}f, g)} = 1 \quad (5.9)$$

для $f, g \in C_0^+$. Согласно уже доказанному, при $i = 0, 1$

$$\alpha_i \equiv \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{(P^{2n+i}f, Pg)}{(P^{2n+i}f, g)} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(P^{2n+i}f, w)}{(P^{2n+i}f, g)} = \frac{\eta(w)}{\eta(g)} \quad (5.10)$$

для всех $w \in C_0^+$, не превышающих Pg , так что $\alpha_i \geq \eta(Pg)/\eta(g)$. На основании следствия 5 отсюда получаем

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(P^{2n+2}f, g)}{(P^{2n}f, g)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(P^{2n}f, Pg)}{(P^{2n}f, g)} \cdot \frac{(P^{2n+1}f, Pg)}{(P^{2n+1}f, g)} \right] \\ &\geq \alpha_0 \alpha_1 \geq \frac{\eta(Pg)}{\eta(g)}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

т.е. $\eta P \leq \eta$. Поэтому

$$\eta(g) = \eta(P^2g) = \int Pg d(\eta P) \leq \int Pg d\eta \leq \eta(g)$$

(здесь использована инвариантность η относительно $Q = P^2$). Следовательно, $\eta P = \eta$, и, сочетая это равенство с ранее сказанным, последовательно проверяем утверждения: а) $\alpha_0, \alpha_1 \geq 1$; б) последнее из отношений в (5.11) равно 1; в) $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$.

При $i = 0, 1$ определим β_i подобно α_i , но с верхним пределом вместо нижнего (см. (5.10)). Если бы хоть одно из β_i превысило 1, то в силу утверждений а) или в) и второй из пределов в (5.11) превысил бы 1, что в соответствии с в) и (5.11) невозможно. Таким образом, $\alpha_i = \beta_i = 1$ при $i = 0, 1$, и (5.9) доказано.

6. Лиувиллевское свойство итераций ядра. С теоремой 3 связан естественный вопрос: при каких условиях лиувиллевское свойство ядра $p(x, dy)$ влечет аналогичное свойство для $p_2(x, dy)$? Частичный ответ можно найти в предложении 3, составляющем основной результат пункта. Поэтому, как в п. 3 и п. 4, будем рассматривать измеримое пространство $(E, \mathcal{B})$ со счетнопорожденной σ -алгеброй $\mathcal{B}$, на которой определена σ -конечная мера $\xi \neq 0$. На этом пространстве зададим стохастическое ядро $p(x, dy)$, которое назовем лиувиллевым, если любая σ -конечная мера, инвариантная относительно него и абсолютно непрерывная относительно ξ , совпадает с ξ с точностью до постоянного множителя (понятие топологически лиувиллева ядра в п. 6 не используется).

Введем новое условие:

(IV) при некотором нечетном $m \geq 1$ и всех $x \in E$

$$\text{var} [p_n(x, \cdot) - p_{n+m}(x, \cdot)] \rightarrow 0, \quad (6.1)$$

когда $n \rightarrow \infty$ (мы следуем стандартному определению расстояния по вариации между мерами [8]).

В соответствии, например, с [8, с. 385] левая часть (6.1) не возрастает с ростом n , а согласно «закону 0 или 2» [16] либо предел левой части (6.1) тождественно равен 0 (к этому и сводится условие (IV)), либо верхняя грань его значений равна 2.

Предложение 3. Пусть неразложимое стохастическое ядро $p(x, dy)$ апериодично и симметрично. Если оно является харрисовским или хотя бы лиувиллевым, но удовлетворяющим условию (IV), то ядро $p_2(x, dy)$ также лиувиллево.

Доказательство. Если исходное ядро является харрисовским, то, как отмечалось при доказательстве теоремы 2, существует множество $E_1 \in \mathcal{B}$, с которым можно связать харрисовское, а потому лиувиллево сужение ядра $p_2(x, dy)$, причем $\xi(E \setminus E_1) = 0$, и наше предложение становится очевидным.

Пусть теперь исходное ядро является лиувиллевым и подчиняется (IV), и пусть σ -конечная мера μ инварианта относительно $p_2(x, dy)$ и абсолютно непрерывна относительно ξ . Из выполнения соотношений $\infty > \mu(f) = \mu(P^2 f) = \mu P(Pf)$ для μ -интегрируемых функций $f \geq 0$ вытекает σ -конечность как μP , так и $\nu = \mu + \mu P$. Равенство $\nu P = \mu P + \mu P^2 = \nu$ устанавливает инвариантность ν относительно ядра $p(x, dy)$, вследствие чего, умножив μ на подходящий скаляр, получаем право считать $\nu = \xi$.

Положив $h = d\mu/d\xi \geq 0$, для всех f прежнего вида имеем

$$\xi(f) = \nu(f) = \mu(f + Pf) = \mu(f) + \xi(h \cdot Pf) = \mu(f) + \xi(f \cdot Ph) = \xi[f(h + Ph)].$$

Следовательно, $h + Ph = 1$ п.в. Поэтому можно а) без ограничения общности предположить, что $h \leq 1$ всюду, и б) утверждать (см. лемму 5), что $\xi(E \setminus A) = 0$, где $A = \{x \in E: P^n h(x) + P^{n+1} h(x) = 1; n = 0, 1, 2, \dots\}$. На A , очевидно, действуют равенства

$$Ph = P^{2n+1}h \quad \text{и} \quad P^2h = P^{2n}h, \quad n \geq 1,$$

которые в сочетании с (IV) показывают, что $P^{2n}h - P^{2n+1}h \rightarrow 0$ на A при $n \rightarrow \infty$. В результате $h = Ph = 1 - h$ п.в. или, иными словами, $h = \frac{1}{2}$ п.в. Таким образом, $\mu = \frac{1}{2} \xi$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурбаки Н. Интегрирование. М.: Наука, 1977, 600 с.
2. Нуммелин Э. Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы. М.: Мир, 1989, 207 с.

3. *Lin M.* Strong ratio limit theorems for mixing Markov operators. — *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1976, v. 12, № 2, p. 181–191.
4. *Orey S.* Lecture Notes on Limit Theorems for Markov Chain Transition Probabilities. London: Van Nostrand, 1971, 107 p.
5. *Revuz D.* Markov Chains. Amsterdam: North-Holland, 1975, 336 p.
6. *Tweedie R. L.* R-theory for Markov chains on a general state space. Part 1. — *Ann. Probab.*, 1974, v. 2, № 5, p. 840–864.
7. *Скорород А. В.* Топологически возвратные цепи Маркова. Эргодические свойства. — Теория вероятн. и ее примен., 1986, т. 31, в. 4, с. 641–650.
8. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1989, 638 с.
9. *Шур М. Г.* Об асимптотическом поведении многошаговых вероятностей перехода. — Литов. матем. сб., 1980, т. 20, № 4, с. 201–207.
10. *Шур М. Г.* Асимптотические свойства степеней положительных операторов. I. — Теория вероятн. и ее примен., 1984, т. 29, в. 4, с. 692–702.
11. *Шур М. Г.* К предельным теоремам для отношений, порожденных случайными блужданиями в однородных пространствах. I, II. — Теория вероятн. и ее примен., 1988, т. 33, в. 4, с. 706–719; 1989, т. 34, в. 3, с. 516–527.
12. *Шур М. Г.* К теореме об асимптотической равномерности сверточных степеней симметричных мер на унимодулярной группе. — Матем. заметки, 1996, т. 60, № 1, с. 120–126.
13. *Shur M. G.* Strong ratio limit theorems for self-adjoint transition operators. — *Statistics and Control of Stochastic Processes*. Ed. by N. V. Krylov et al. New York: Optimization Software, 1985, p. 428–450.
14. *Снуцер Ф.* Принципы случайного блуждания. М.: Мир, 1969, 472 с.
15. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967, 624 с.
16. *Derriennic Y.* Lois «zero-deux» pour les processus de Markov. — *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1976, v. 12, № 2, p. 111–129.

Поступила в редакцию
14.VII.1997