Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Боровков, А. А. Могульский, Принципы больших уклонений для траектории обобщенных процессов восстановления. II, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2015, том 60, выпуск 3, 417–438

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4631>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 06:51:25

**ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ**

*Основан в январе 1956 г.
Выходит 4 раза в год
Москва • Наука*

*Том 60
Выпуск 3, 2015 год
июль, август, сентябрь*

© 2015 г. **БОРОВКОВ А. А.*, МОГУЛЬСКИЙ А. А.***

**ПРИНЦИПЫ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ ТРАЕКТОРИЙ
ОБОБЩЕННЫХ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ. II¹⁾**

Настоящая работа является продолжением [1]. Она состоит из трех разделов. В разделе 2 получен так называемый *второй* «частичный» локальный принцип больших уклонений (первый был получен в разделе 1) для траекторий обобщенного процесса восстановления. В разделе 3 при более ограничительных условиях установлен «полный» локальный принцип больших уклонений, а в разделе 4 при тех же условиях — «полный» интегральный принцип больших уклонений (оба утверждения в пространстве $\mathbb{D}$ функций без разрывов второго рода с равномерной метрикой).

Ключевые слова и фразы: обобщенный процесс восстановления, принцип больших уклонений, функция восстановления, функция уклонений, вторая функция уклонений, частичный принцип больших уклонений, локальный принцип больших уклонений.

2. Второй частичный локальный принцип больших уклонений для траекторий обобщенного процесса восстановления. Напомним, что мы рассматриваем метрическое пространство $(\mathbb{D}, \rho)$ функций $f = f(t)$ без разрывов второго рода, наделенное равномерной метрикой ρ , и изучаем в этом пространстве семейство процессов

$$z_T = z_T(t) := \frac{Z(tT)}{x}, \quad t \in [0, 1],$$

где $x \sim T$ при $T \rightarrow \infty$ и $Z(t)$ — обобщенный процесс восстановления (о.п.в.), определенный в [1]. Везде в дальнейшем мы будем использовать обозначения, введенные в первой части работы — см. [1].

*Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия; e-mail: borovkov@math.nsc.ru; mogul@math.nsc.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 14-01-00220, 13-01-12415).

Первый частичный принцип больших уклонений (п.б.у.) был установлен в теореме 1.1 (разделе 1) в предположении

$$\lambda_+^{(\tau)} = \sup\{\lambda: \mathbf{E} e^{\lambda\tau} < \infty\} \geq D(1, 0)$$

(определение $D(1, \alpha)$ см. в (0.6)). Рассмотрим теперь альтернативный случай

$$\lambda_+^{(\tau)} < D(1, 0). \quad (2.1)$$

В этом случае в формировании наиболее вероятных траекторий события $\{z_T(1) \in (\alpha)_\varepsilon\}$ будут участвовать большие скачки τ (сравнимые с T). Здесь утверждения будут носить менее «собираательный» характер, ввиду следующих обстоятельств.

1) Само условие $\lambda_+^{(\tau)} < D(1, 0)$ является весьма специальным; оно влечет за собой сильную асимптотическую зависимость τ и ζ в области больших уклонений. Точнее, в доказательстве леммы 4.2 в [2] установлено, что при выполнении (2.1)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|\zeta| \geq \varepsilon t \mid \tau \geq t) = 1,$$

если только $\varepsilon > 0$ достаточно мало (см. [2, формула (5.7)]).

2) В случае $\lambda_+^{(\tau)} < D(1, 0)$ налагается дополнительное условие

$$\ln \mathbf{P}(\tau \geq T) \sim -\lambda_+^{(\tau)} T \quad \text{при } T \rightarrow \infty \quad (2.2)$$

на «грубую» асимптотику распределения τ (см. условие (1.26) в [2]).

3) В зависимости от вида функции f будут накладываться дополнительные условия на распределение $\xi_0 = (\tau_0, \zeta_0)$.

Чтобы сформулировать основное утверждение, введем ряд новых обозначений. Положим

$$\begin{aligned} t^{[1]} &= t^{[1]}(f) := \min\{u: \text{Var}_{[u, 1]} f(t) = 0\}, \\ t^{[0]} &= t^{[0]}(f) := \max\{u: \text{Var}_{[0, u]} f(t) = 0\}. \end{aligned}$$

В терминах конструкции f -разбиений $\{(u_r^-, u_r^+)_{r=1}^R\}$, введенных для доказательства теоремы 1.1, в случае $t^{[1]} < 1$ найдется $r \leq R$ такое, что $u_r^+ = 1$, $t^{[1]} = u_r^-$, где $[u_r^-, u_r^+]$ — участки постоянства функции f . Аналогично, в случае $t^{[0]} > 0$ найдется $r \leq R$ такое, что $u_r^- = 0$, $t^{[0]} = u_r^+$.

Обозначим для $f \in \mathbb{C}_a$

$$\hat{I}(f) := \int_0^{t^{[1]}} D(1, f'(t)) dt + (1 - t^{[1]}) \hat{D}(0),$$

так что

$$\hat{I}(f) = I(f) = \int_0^1 D(1, f'(t)) dt, \quad \text{если } \lambda_+^{(\tau)} \geq D(1, 0) \quad (\hat{D}(0) = D(1, 0)). \quad (2.3)$$

Теорема 2.1 (второй частичный локальный п.б.у.). *Предположим, что $\xi_0 = (\tau_0, \zeta_0) \in [C_0]$, $\xi = (\tau, \zeta) \in [C_0]$ и $\mathcal{A}^{\leq 0} \subset [\mathcal{A}_0]$. Если $t^1 < 1$ и $\lambda_+^{(\tau)} < D(1, 0)$, то предполагается также, что выполнено условие «гладкости» (2.2); если при этом $f(t) \equiv 0$, то предполагается дополнительно, что $\lambda_+^{(\tau_0)} := \sup\{\lambda: \mathbf{E} e^{\lambda\tau_0} < \infty\} \geq \lambda_+^{(\tau)}$. Если выполнены эти условия, то для $f \in \mathbb{C}_a$ и любой последовательности $\varepsilon = \varepsilon_T$, достаточно медленно сходящейся к 0 при $T \rightarrow \infty$, имеет место соотношение*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in (f)_\varepsilon) = -\hat{I}(f). \quad (2.4)$$

Таким образом, в силу (2.3) теорема 2.1 является обобщением теоремы 1.1. Так как теорема 1.1 уже доказана, то доказательство теоремы 2.1 мы будем проводить лишь в случае $\lambda_+^{(\tau)} < D(1, 0)$.

Следствие 2.1. *Если $f \in \mathbb{C}_a$ не имеет в конце отрезка $[0, 1]$ участка постоянства, т.е. $t^1(f) = 1$, то при любом соотношении между $\lambda_+^{(\tau)}$ и $D(1, 0)$ левая часть в (2.4) равна $-I(f)$.*

В качестве следствия из теорем 1.1, 2.1 получаем также частичные локальные п.б.у. для траекторий о.п.в. $z_T^{(q)}$ с линейным сносом:

$$z_T^{(q)} = z_T^{(q)}(t) := \frac{1}{x} Z^{(q)}(tT), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

где

$$Z^{(q)}(t) := Z(t) + qe(t), \quad e(t) := t, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Следствие 2.2. *Пусть выполнены условия теорем 1.1 или 2.1. Тогда при любом $q \in \mathbb{R}$ семейство $\{z_T^{(q)}\}$ удовлетворяет частичному локальному п.б.у. (2.4) с функционалом уклонений $\hat{I}^{(q)}(f) := \hat{I}(f - qe)$.*

Для доказательства следствия 2.2 достаточно воспользоваться тождеством

$$\mathbf{P}(z_T^{(q)} \in (f)_\varepsilon) = \mathbf{P}(z_T \in (f - qe)_\varepsilon),$$

а затем к правой части этого тождества применить теорему 1.1 (или теорему 2.1).

Наряду с процессом $Z^{(q)}$ рассмотрим очень близкий к нему процесс $Z^{[q]}$, управляемый последовательностью

$$\xi_n^{[q]} = (\tau_n^{[q]}, \zeta_n^{[q]}) := (\tau_n, \zeta + q\tau_n), \quad n \geq 0.$$

Близость процессов $Z^{(q)}$ и $Z^{[q]}$ состоит в том, что их значения в моменты скачков $T_{0,k}$ совпадают. Отличие состоит в том, что часть $q\tau_k$ своего приращения $\zeta_k^{[q]} = \zeta_k + q\tau_k$ на полуинтервале $(T_{0,k-1}, T_{0,k}]$ процесс $Z^{(q)}$, в отличие от $Z^{[q]}$, набирает непрерывным образом со скоростью q . Возникает естественный вопрос, совпадают ли для этих процессов п.б.у.

Чтобы ответить на этот вопрос, вычислим, прежде всего, вторую функцию уклонений $D^{[q]}$, соответствующую вектору $\xi^{[q]}$. При естественных соглашениях относительно обозначений имеем

$$\begin{aligned} A^{[q]}(\lambda, \mu) &:= \ln \mathbf{E} e^{\lambda\tau + \mu(\zeta + q\tau)} = A(\lambda + q\mu, \mu), \\ \Lambda^{[q]}(v, \alpha) &:= \sup_{(\lambda, \mu)} \{ \lambda v + \mu\alpha - A^{[q]}(\lambda, \mu) \} = \Lambda(v, \alpha - qv). \end{aligned}$$

Поэтому вторая функция уклонений для $\xi^{[q]}$ имеет вид

$$D^{[q]}(v, \alpha) = \inf_{\theta > 0} \theta \Lambda^{[q]} \left(\frac{v}{\theta}, \frac{\alpha}{\theta} \right) = \inf_{\theta > 0} \theta \Lambda \left(\frac{v}{\theta}, \frac{\alpha - qv}{\theta} \right) = D(v, \alpha - qv),$$

так что

$$D^{[q]}(1, \alpha) = D(1, \alpha - q).$$

Как мы видели, важную роль при определении функции уклонений Λ^Z , соответствующей процессу Z , играет соотношение между $\lambda_+^{(\tau)}$ и $D(1, 0)$, т.е. между $\lambda_+^{(\tau)}$ и $D(1, -q)$ в нашем случае. Функция $D(1, -q)$ является неотрицательной, выпуклой и достигает минимума, равного 0, в точке $q = -a = -a_\zeta/a_\tau$. Поэтому определены два решения $q_- < q_+$ уравнения

$$D(1, -q) = \lambda_+^{(\tau)},$$

и условие $\lambda_+^{(\tau)} \geq D^{[q]}(1, 0)$ принимает вид

$$q \in [q_-, q_+]. \quad (2.5)$$

Таким образом, в условиях теоремы 0.1 функции уклонений $\Lambda^{Z^{(q)}}$ и $\Lambda^{Z^{[q]}}$ будут при выполнении (2.5) иметь один и тот же вид $D(1, \alpha - q)$. То же относится и к утверждению следствия 2.2, но с одним существенным дополнением: если функция f не имеет линейного участка в конце отрезка $[0, 1]$, т.е. $t^1(f') = 1$ (f' не имеет участка постоянства в конце $[0, 1]$), то (ср. со следствием 2.1)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T^{[q]} \in (f)_\varepsilon) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T^{(q)} \in (f)_\varepsilon) = -I(f - qe). \quad (2.6)$$

Если же f имеет линейный участок в конце $[0, 1]$ и при $q = f'(1)$ не выполнено (2.5), то соотношение (2.6) не будет иметь места.

Отметим два обстоятельства, показывающие, что в случае $\lambda_+^{(\tau)} < D(1, 0)$, допускающем влияние больших скачков τ на формирование наиболее вероятной траектории в событии $\{z_T(1) \in (0)_\varepsilon\}$, нарушаются привычные свойства траекторий случайных блужданий и процессов восстановления, которые имеют место в случае $\lambda_+^{(\tau)} \geq D(1, 0)$ ($\hat{D}(0) = D(1, 0)$).

1. Пусть для определенности $\alpha > 0$, $\hat{D}(\alpha) < D(1, \alpha)$ и $f(t) = \alpha t$. Тогда согласно (2.4)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in (f)_\varepsilon) = -D(1, \alpha).$$

Но в силу теоремы 0.1

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T(1) \in (\alpha)_\varepsilon) = -\hat{D}(\alpha) > -D(1, \alpha). \quad (2.7)$$

Это означает, что прямолинейная траектория $f(t) = \alpha t$ не является наиболее вероятной в событии $\{z_T(1) \in (\alpha)_\varepsilon\}$. Если $v_\alpha < 1$ таково, что (см. (0.9))

$$\hat{D}(\alpha) = D(v_\alpha, \alpha) + (1 - v_\alpha)\lambda_+^{(\tau)},$$

то наиболее вероятной траекторией, определяющей вероятность (2.7), будет ломаная, соединяющая точки $(0, 0)$, (v_α, α) , $(1, \alpha)$. В случае $\hat{D}(\alpha) = D(1, \alpha)$ или для случайных блужданий, порожденных суммами случайных величин (см., например, [3]), это невозможно. В этом состоит существенное отличие свойств траекторий $z_T(\cdot)$ при $\lambda_+^{(\tau)} = \hat{D}(0) < D(1, 0)$ от свойств траекторий названных выше процессов, для которых наиболее вероятные траектории всегда прямолинейны.

2. Другое характерное свойство процессов $Z(t)$ в случае

$$\lambda_+^{(\tau)} \geq D(1, 0) \quad (\hat{D}(0) = D(1, 0))$$

состоит в том, что «узкие пучки» траекторий таких процессов на непересекающихся интервалах «асимптотически независимы» в смысле грубой асимптотики. Действительно, пусть $\lambda_+^{(\tau)} \geq \hat{D}(0) = D(1, 0)$, процесс $Z(t)$ удовлетворяет условию $\mathcal{A}^{\leq 0} \subset [\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_{st}]$ или условию $\mathcal{A}^{\leq 0} \subset [\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_\infty]$ (см. [2, § 4]) и f_1, f_2 — две произвольные функции из $\mathbb{C}_a$ такие, что $f_1(0) = f_2(0) = 0$. Для любого фиксированного $u \in (0, 1)$ положим

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & \text{при } t \in [0, u], \\ f_1(u) + f_2(t - u) & \text{при } t \in [u, 1] \end{cases}$$

и обозначим $B_\varepsilon = \{z_T \in (f)_\varepsilon\}$,

$$\begin{aligned} B_{1,\varepsilon} &= \{z_T(t) \in (f_1(t))_\varepsilon \text{ при } t \in [0, u]\}, \\ B_{2,\varepsilon} &= \{z_T(u+t) - z_T(u) \in (f_2(t))_\varepsilon \text{ при } t \in [0, 1-u]\}. \end{aligned}$$

Тогда, очевидно, что $\mathbf{P}(B_{1,\varepsilon} B_{2,\varepsilon}) \leq \mathbf{P}(B_{2,\varepsilon}) \leq \mathbf{P}(B_{1,4\varepsilon} B_{2,4\varepsilon})$. Поэтому

$$\frac{\mathbf{P}(B_{\varepsilon/2})}{\mathbf{P}(B_{1,\varepsilon})} \leq \mathbf{P}(B_{2,\varepsilon} | B_{1,\varepsilon}) \leq \frac{\mathbf{P}(B_{2\varepsilon})}{\mathbf{P}(B_{1,\varepsilon})},$$

и в силу теоремы 1.1

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(B_{2,\varepsilon} | B_{1,\varepsilon}) &\leq - \int_0^1 D(1, f'(t)) dt + \int_0^u D(1, f'(t)) dt \\ &= - \int_u^1 D(1, f'(t)) dt. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Оценка снизу устанавливается аналогично и имеет ту же правую часть. Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(B_{2,\varepsilon} | B_{1,\varepsilon}) &= - \int_u^1 D(1, f'(t)) dt \\ &= - \int_0^{1-u} D(1, f'_2(t)) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(B_{2,\varepsilon}). \end{aligned}$$

Последнее равенство имеет место в силу условий $\mathcal{A}^{\leq 0} \subset [\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_{st}]$ или $\mathcal{A}^{\leq 0} \subset [\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_\infty]$ (см. [2, следствия 4.1, 4.2]). Таким образом, события $B_{1,\varepsilon}$ и $B_{2,\varepsilon}$ асимптотически независимы в смысле грубой асимптотики.

Если же $\lambda_+^{(\tau)} = \widehat{D}(0) < D(1, 0)$, то такой независимости не будет. Действительно, выберем f_1 и f_2 так, чтобы было выполнено неравенство $f'(1) \neq 0$ и функция f имела участок постоянства (u^-, u^+) , содержащий точку u , $u^- > 0$, $u^+ < 1$. Тогда по теореме 2.1 соотношение (2.8) не будет верным, так как представления для $\mathbf{P}(B_\varepsilon)$, $\mathbf{P}(B_{2,\varepsilon})$ сохранятся, но

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(B_{1,\varepsilon}) = - \int_0^{u^-} D(1, f'_1(t)) dt - (u - u^-) \lambda_+^{(\tau)} > - \int_0^u D(1, f'_1(t)) dt.$$

Заметим, что упомянутая выше асимптотическая независимость «узких пучков» траекторий вдоль функций из $\mathbb{C}_a$ еще не влечет за собой, вообще говоря, асимптотическую независимость самих приращений процесса (в нашем случае приращений $Z(U)$ и $Z(T) - Z(U)$; см. [2, пример 4.1]), поскольку при рассмотрении названных «узких пучков» исключалось влияние больших вертикальных скачков ζ_j . Условия асимптотически слабой зависимости координат τ и ζ , достаточные для асимптотической независимости приращений $Z(U)$ и $Z(T) - Z(U)$, найдены в [2, теореме 4.1]. Напомним, что одно из этих условий вытекает из теоремы 4.1, установленной ниже (главная часть этого условия состоит в предположениях $\zeta_0 \in [\mathbb{C}_\infty]$, $\zeta \in [\mathbb{C}_\infty]$).

Вернемся к теоремам 0.1, 1.1 и докажем дополняющее эти теоремы утверждение, которое понадобится нам при доказательстве теоремы 2.1.

Лемма 2.1. Пусть имеет место локальный п.б.у. (0.15) и выполнено условие $\lambda_+^{(\tau)} < D(1, 0)$. Предположим, кроме того, что выполнено хотя бы одно из двух условий:

$$\begin{aligned} \text{либо } \mathcal{A}^{\leq 0} &\subset [\mathcal{A}_0], \\ \text{либо } \lambda_+^{(\tau_0)} &< D(1, 0), \quad D(1, 0) \leq D^{(0)}(1, 0), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где функция $D^{(0)}$ определяется так же, как D , но для вектора ξ_0 . Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ и любых последовательностей $\varepsilon = \varepsilon_T \rightarrow 0$, $\delta = \delta_T \rightarrow 0$, $T \rightarrow \infty$, справедливо неравенство

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P} \left(\frac{1}{T} Z(T) \in (\alpha)_\varepsilon, |\zeta_{\eta(T)}| < T\delta \right) \leq -D(1, \alpha). \quad (2.10)$$

Соотношение (2.10) и теорема 0.1 показывают, что в случае $\lambda_+^{(\tau)} < D(1, 0)$ основной вклад в вероятность события $\{(1/T)Z(T) \in (\alpha)_\varepsilon\}$ при $T \rightarrow \infty$ дают те траектории, для которых $|\zeta_{\eta(T)}| \geq cT$ при некотором $c > 0$.

Доказательство леммы 2.1 аналогично доказательству оценки сверху в утверждении (i) теоремы 2.1 в [2]. Пусть $\alpha \neq 0$. Исходным здесь является следующий аналог соотношения (1.1) в [2]:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\frac{1}{T} Z(T) \in \Delta[\alpha], |\zeta_{\eta(T)}| < T\delta \right) \\ &= \int_0^T H_0(dt, T\Delta[\alpha]) \mathbf{P}(\tau > T - t, |\zeta| < T\delta). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Далее, в силу (2.11), (1.2) в [2], как и прежде, приходим к соотношению (1.12) в [2], в котором функцию $L(T, v)$ (см. [2, формула (1.13)]) следует заменить на функцию

$$L_1(T, v) := -\frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(\tau > T(1 - v), |\zeta| < T\delta).$$

Если ранее в силу условия (0.16) мы имели соотношение $L(T, v) \sim (1 - v)\lambda_+^{(\tau)}$ при $T \rightarrow \infty$, откуда следовало, что правая часть соотношения (1.12) в [2] равна $\hat{D}(\alpha)$, то теперь в силу леммы 1.2 в [2] мы имеем

$$L_1(T, v) \geq (1 - v)D(1, 0).$$

Это дает нам для левой части в (2.10) оценку сверху

$$- \inf_{v \in [0, 1]} \{D(v, \alpha) + (1 - v)D(1, 0)\}.$$

Но в силу полуаддитивности функции $D(v, \alpha)$ (см. [2, формула (1.9)])

$$D(v, \alpha) + (1 - v)D(1, 0) = D(v\alpha) + D(1 - v, 0) \geq D(1, \alpha).$$

Это доказывает (2.10).

Пусть теперь $\alpha = 0$. Доказательство в этом случае проходит совершенно аналогично, но вместо (2.11) теперь надо использовать аналог представления (2.11) в [2]. Тогда в правой части (2.11) появится новое по сравнению с предыдущими рассмотрениями слагаемое, равное

$$\mathbf{P}(\tau_0 > T, |\zeta_0| < T\varepsilon).$$

Оценка этого слагаемого вытекает из следующего аналога леммы 1.2 в [2].

Лемма 2.2. При выполнении хотя бы одного из условий (2.9) справедливо соотношение

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(\tau_0 > T, |\zeta_0| < T\varepsilon) \leq -D(1, 0).$$

Доказательство. Пусть выполнено первое из условий (2.9). Тогда для любых $(\lambda, \mu) \in (\mathcal{A}^{\leq 0}) \subset \mathcal{A}_0$, $(v, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{T} \Lambda_0(Tv, T\alpha) \geq \lambda v + \mu \alpha - \frac{1}{T} A_0(\lambda, \mu).$$

Поэтому для $v = v_T \rightarrow v$, $\alpha = \alpha_T \rightarrow 0$, $T \rightarrow \infty$, имеем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \Lambda_0(Tv_T, T\alpha_T) \geq \lambda v. \quad (2.12)$$

Левая часть неравенства (2.12) не зависит от (λ, μ) в пределах множества $(\mathcal{A}^{\leq 0})$, поэтому правую часть (2.12) можно заменить на точную верхнюю грань по $(\lambda, \mu) \in (\mathcal{A}^{\leq 0})$:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \Lambda_0(Tv_T, T\alpha_T) \geq \sup_{(\lambda, \mu) \in (\mathcal{A}^{\leq 0})} \{\lambda v\} = D(v, 0).$$

Отсюда для любых $v > 0$ и $\varepsilon = \varepsilon_T \rightarrow 0$, $T \rightarrow \infty$, получаем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \inf_{|u - Tv| < T\varepsilon, |\beta| < T\varepsilon} \Lambda_0(u, \beta) \geq D(v, 0). \quad (2.13)$$

Используя экспоненциальное неравенство Чебышёва для выпуклых открытых множеств (см. [3, § 4.4]) и соотношение (2.13), устанавливаем следующую оценку сверху: для любых $v > 0$ и $\varepsilon = \varepsilon_T \rightarrow 0$, $T \rightarrow \infty$,

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(|\tau_0 - Tv| < T\varepsilon, |\zeta_0| < T\varepsilon) \leq -D(v, 0). \quad (2.14)$$

Далее, для любого $N < \infty$ найдется такое $M < \infty$, что

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(\tau_0 > TM) \leq -N. \quad (2.15)$$

Из соотношений (2.14), (2.15) вытекает требуемая оценка сверху:

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(\tau_0 > T, |\zeta_0| < T\varepsilon) \leq -\inf_{v \geq 1} D(v, 0) = -D(1, 0).$$

Если выполнено второе условие в (2.9), то утверждение леммы 2.2 очевидным образом вытекает из леммы 1.2 в [2]. Леммы 2.2 и 2.1 доказаны.

Доказательство теоремы 2.1. Схема доказательства здесь во многом близка схеме доказательства теоремы 1.1, но есть и

существенные отличия. Теперь $\hat{D}(0) < D(0)$ и в качестве множества V (ср. с (1.8)), которое не содержит участков постоянства, мы будем рассматривать множество

$$V = [0, 1] \setminus \bigcup_{r=1}^R (u_r^-, u_r^+),$$

содержащее все точки $u_r^\pm$. Разбиение $\mathbf{t}_L$ определим как объединение правой части в (1.7) с множеством, состоящим из $\min\{R, L/2\}$ первых точек $u_r^\pm$, $r = 1, 2, \dots$. Обозначим через L_1 наименьшее целое число, при котором число точек в $\mathbf{t}_{L_1}V$ превосходит L . Дальнейшее построение f -разбиений повторяет построение f -разбиений в условиях теоремы 1.1, так что справедлива сходимости (1.9). Для нового f -разбиения событие $\{z_T \in (f)_\varepsilon\}$, вообще говоря, не влечет за собой событие $\{\bar{\chi}_L \leq \delta_T\}$ (см. (1.10)). Такое включение будет иметь место, если под $\bar{\chi}_L$ понимать значение

$$\bar{\chi}_L := \max\{\chi_l \text{ по всем } u_l \notin \{u_r^-\}, l \leq L-1\}.$$

Поэтому вместо (1.11) мы будем использовать другое включение. Для точек $u_l \in \{u_r^-\}$ обозначим

$$\gamma_l := u_l - \frac{1}{T} T_{0, \nu(u_l T)},$$

$$\bar{\gamma}_L := \max\{\gamma_l \text{ по всем } u_l \in \{u_r^-\}, u_l \neq 0, l \leq L\}.$$

Тогда очевидно, что

$$\{z_T \in (f)_\varepsilon\} \subset \{\bar{\gamma}_L < \delta_T\}.$$

Включение

$$\{z_T \in (f)_\varepsilon\} \subset \{\bar{\zeta}(T) \leq 2\varepsilon T\}$$

очевидно сохраняется. Таким образом, вместо (1.11) мы имеем включение

$$\{z_T \in (f)_\varepsilon\} \subset \left\{ z_T(u_l) \in (f(u_l))_\varepsilon \text{ при всех } 1 \leq l \leq L, \right. \\ \left. \bar{\zeta}(T) \leq 2\varepsilon T, \bar{\chi}_L < \delta_T, \bar{\gamma}_L < \delta_T \right\}.$$

Роль леммы 1.1 теперь играет следующее утверждение.

Лемма 2.3. Пусть выполнены условия теоремы 2.1 и фиксирована произвольная функция $f \in \mathbb{C}_a$, $f(0) = 0$. Тогда для f -разбиения $\mathbf{u}_L = \{u_l\}_{l=0}^L$ и любых последовательностей $\varepsilon = \varepsilon_T \rightarrow 0$, $\delta_T \rightarrow 0$, $T \rightarrow \infty$,

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P} \left(z_T(u_l) \in (f(u_l))_\varepsilon \text{ при всех } 1 \leq l \leq L, \right. \\ \left. \bar{\zeta}(T) \leq 2\varepsilon T, \bar{\chi}_L < \delta_T, \bar{\gamma}_L < \delta_T \right) \leq -\hat{I}(f^{\mathbf{u}_L}). \quad (2.16)$$

Второе утверждение леммы 1.1, дающее нужную нам оценку снизу, полностью сохраняется, и мы его здесь не воспроизводим.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 2.3 аналогично доказательству оценки сверху в лемме 1.1. Мы вновь будем пользоваться индукцией по L . При $L = 1$ оценка (2.16) следует из теоремы 0.1. Выполним переход от $L = 1$ к $L = 2$. Но теперь мы будем различать случаи $u_1 = u \notin \{u_r^-\}$ и $u \in \{u_r^-\}$.

Если $\alpha_2 \neq 0$, то с необходимостью $u \notin \{u_r^-\}$ и доказательство леммы 1.1 полностью сохраняется, если наряду с утверждением теоремы 0.1 использовать лемму 2.1.

Если $\alpha_2 = 0$, то $u \in \{u_r^-\}$, $\alpha_1 \neq 0$ и событие A_1 в (1.36) надо заменить на событие

$$A_1 := \{z_T(u) \in (\alpha_1)_\varepsilon, |\zeta_{\eta(uT)}| < 2\varepsilon T, \gamma < \delta_T\},$$

где $\gamma := u - Z_{\nu(uT)}/T$. Пусть обозначение $\mathfrak{A}$ имеет тот же смысл, что в доказательстве леммы 1.1. Ясно, что $A_1 \in \mathfrak{A}$ и равенство (1.37) сохранится. Рассмотрим множитель

$$\mathbf{E}(\mathbf{1}(A_2) | \mathfrak{A}) = \mathbf{P}(A_2 | \mathfrak{A}).$$

Эту функцию на множестве A_1 можно рассматривать как вероятность (при $T^* = (1 - u)T$)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(Z^*(T^*) \in (\alpha_2 - y)_\varepsilon T^* \times \frac{T}{T^*} \middle| \mathfrak{A}\right) &\leq \mathbf{P}\left(Z^*(T^*) \in (0)_{3\varepsilon} T^* \times \frac{T}{T^*} \middle| \gamma = v\right) \\ &=: P_v(T^*), \end{aligned} \quad (2.17)$$

где $v < \delta_T$, $Z^*(t)$ — процесс восстановления с начальным скачком $(\tau_0, \zeta_0) = (\chi, 0)$ таким, что

$$\mathbf{P}(\chi > t) := \frac{\mathbf{P}(\tau > v + t)}{\mathbf{P}(\tau > v)}.$$

Так как τ удовлетворяет условию гладкости (0.16), то при $v < \delta_T$

$$\mathbf{P}(\tau > v) \geq \mathbf{P}(\tau > \delta_T) = e^{o(T)},$$

и для значений t , сравнимых с T ,

$$\mathbf{P}(\tau_0 > t) = \mathbf{P}(\chi > t) \leq \mathbf{P}(\tau > t)e^{o(T)}.$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{P}(\tau_0 > t) \leq \mathbf{P}(\tau > t)e^{o(t)} \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (2.18)$$

Нетрудно видеть, что все утверждения о грубой асимптотике функции восстановления $H_0(T\Delta[t], T\Delta[y])$ для процесса восстановления с начальным скачком $(\tau_0, 0)$, удовлетворяющим (2.18), будут иметь тот же вид, что и для функции восстановления H , соответствующей однородному процессу восстановления, $\lambda_+^{(\tau_0)} \geq \lambda_+^{(\tau)}$. Поэтому из соотношения (2.11) в [2] и следующих за ним рассуждений мы, как и в доказательстве теоремы 2.1 в [2], получаем соотношение (2.12) в [2] или, что то же, получаем утверждение о том, что в нашем случае на множестве A_1 для правой части (2.17) выполняется соотношение

$$\lim_{T^* \rightarrow \infty} \frac{1}{T^*} \ln P_v(T^*) = -\hat{D}(0).$$

Это, в свою очередь, означает, что на множестве A_1

$$\lim_{T^* \rightarrow \infty} \frac{1}{T^*} \ln \mathbf{P}(A_2 | \mathfrak{A}) = -\hat{D}(0) = -\lambda_+^{(\tau)}.$$

В итоге, аналогично (1.41) находим

$$\mathbf{P}(A) \leq e^{-T\hat{I}(f^{\mathbf{u}_2}) + o(T)}.$$

Требуемая оценка сверху (2.16) при $L = 2$ установлена. Переход в доказательстве по индукции происходит так же, как в лемме 1.1. Оценка (2.16) установлена. Лемма 2.3 доказана.

Опираясь на лемму 2.3, продолжим доказательство теоремы 2.1.

(i). *Оценка сверху.* Из (1.12) и леммы 2.3 получаем

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in (f)_\varepsilon) \leq -\hat{I}(f^{\mathbf{u}_L}). \quad (2.19)$$

Поскольку левая часть (2.19) от разбиения $\mathbf{u}_L$ не зависит, то в силу (1.9) правую часть в (2.19) можно заменить на $-\hat{I}(f)$. Оценка сверху, необходимая для доказательства (2.4), получена.

(ii). *Оценка снизу.* Из утверждения (ii) леммы 1.1 вытекает, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in (f)_\varepsilon) \geq -I(f). \quad (2.20)$$

Следовательно, для функций $f \in \mathbb{C}_a$ таких, что $\hat{I}(f) = I(f)$, оценка снизу, необходимая для доказательства (2.4), установлена.

Пусть теперь $\hat{I}(f) < I(f)$, т.е. функция f имеет участок постоянства $[u, 1]$, $u = t^1(f)$. Тогда для любой последовательности $\varepsilon = \varepsilon_T \rightarrow 0$, $T \rightarrow 0$, найдется последовательность $\delta_T \rightarrow 0$ такая, что справедливо включение

$$\left\{ \sup_{0 \leq t \leq u} |z_T(t) - f(t)| < \varepsilon \right\} \subset \left\{ \frac{1}{T} \gamma_T \leq \delta_T \right\},$$

где $\gamma_T := Tu - T_{0,\eta(Tu)}$ — величина недоскока блуждания $T_{0,k}$ до уровня Tu . Поэтому справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(f \in (f)_\varepsilon) &\geq \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq u} |z_T(t) - f(t)| < \varepsilon, \frac{1}{T} \gamma_T \leq \delta_T, \right. \\ &\quad \left. \tau_{\eta(Tu)} > T(1-u) + \delta_T\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq u} |z_T(t) - f(t)| < \varepsilon\right) \mathbf{P}(\tau > T(1-u) + \delta_T). \quad (2.21) \end{aligned}$$

Для оценки снизу первого сомножителя в правой части последнего равенства воспользуемся уже установленным соотношением (2.20), а для оценки снизу второго сомножителя — условием грубой гладкости (2.2). В результате получим, что левая часть (2.21) не превосходит

$$\exp\left\{-T\left[\int_0^u D(1, f'(t)) dt + \lambda_+^{(\tau)}(1-u)\right] + o(T)\right\} = \exp\{-T\hat{I}(f) + o(T)\}.$$

Оценка снизу, необходимая для доказательства (2.4), установлена. Теорема 2.1 доказана.

3. Полный локальный принцип больших уклонений для траекторий обобщенного процесса восстановления. Как уже отмечалось, локальные п.б.у., полученные в разделах 1, 2, являются «частичными», так как они справедливы не для всех функций $f \in \mathbb{D}$, а лишь для $f \in \mathbb{C}_a$. Получить с помощью таких локальных п.б.у. «интегральный» п.б.у. об асимптотике $\mathbf{P}(z_T \in B)$, $B \subset \mathbb{D}$, не представляется возможным, так как асимптотика $\mathbf{P}(z_T \in (f)_\varepsilon)$ при $f \notin \mathbb{C}_a$ остается неизвестной. Если $f \notin \mathbb{C}_a$ и выполнено лишь условие $[\mathbf{C}_0]$ (но не $[\mathbf{C}_\infty]$), то предел в (1.3) (конечный или бесконечный) может не существовать. Пусть, например, τ_0 и τ арифметичны, ζ не зависит от τ и имеет экспоненциальное распределение на правой полуоси:

$$\mathbf{P}(\zeta > v) = ce^{-bv} \quad \text{при } v > 0, \quad b > 0, \quad c > 0, \quad \mathbf{E}\zeta = 0,$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 1/2, \\ 1 & \text{при } t \geq 1/2. \end{cases}$$

Тогда при целых четных $T \rightarrow \infty$ траектория $z_T(t)$ с вероятностью, близкой к $1/\mathbf{E}\tau$, имеет скачок в точке $t = 1/2$ и существует предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in (f)_\varepsilon) = -b.$$

Если же $T \rightarrow \infty$ по целым нечетным значениям, то вероятность иметь скачок в точке $t = 1/2$ равна нулю и соответствующий предел равен $-\infty$. Здесь сказывается «несогласованность» равномерной метрики с

природой пространства $\mathbb{D}$: для функций f с разрывом в точке t_0 окрестность $(f)_\varepsilon$ в равномерной метрике оказывается слишком «тонкой» и любая функция $g \in (f)_\varepsilon$ при достаточно малом ε с необходимостью должна иметь разрыв в той же точке t_0 . Это «неудобство» в значительной мере исчезает, если потребовать, чтобы ζ удовлетворяло условию $[\mathbf{C}_\infty]$. Тогда наличие скачков у функции f в (1.3) всегда обращает предел в (1.3) в $-\infty$ и будет иметь место «более полный» локальный п.б.у., справедливый для всех $f \in \mathbb{D}$.

С другой стороны, равномерной метрике ρ соответствуют наиболее тонкие границы множеств B и наиболее широкий класс функционалов, непрерывных относительно этой метрики. Имеется в виду сравнение с метриками в $\mathbb{D}$, рассмотренными в [3, гл. 4] (и являющимися некоторым ослаблением метрики Скорохода), для которых названное выше «неудобство» отсутствует. Поэтому, если рассматривать «интегральный» п.б.у. в $(\mathbb{D}, \rho)$ с равномерной метрикой, то условие непрерывности, нужное для совпадения верхних и нижних пределов, будет выполнено для наиболее широкого класса множеств (см. следствие 4.2).

В этом разделе мы получим «полный» локальный п.б.у., позволяющий доказать «полный интегральный» п.б.у. (см. раздел 4); однако это удастся сделать лишь при условии $\zeta_0 \in [\mathbf{C}_\infty]$, $\zeta \in [\mathbf{C}_\infty]$. В этом случае в силу леммы 1.1 в [2] (см. [2, формула (1.19)]) с необходимостью $\lambda_+^{(\tau)} \geq D(1, 0)$ ($\hat{D}(\alpha) = D(1, \alpha)$).

Теорема 3.1 (полный локальный п.б.у.). Пусть выполнены условия теоремы 1.1 и, кроме того, $\zeta_0 \in [\mathbf{C}_\infty]$, $\zeta \in [\mathbf{C}_\infty]$. Тогда для любой функции $f \in \mathbb{D}$ и любой последовательности $\varepsilon = \varepsilon_T$, достаточно медленно сходящейся к 0 при $T \rightarrow \infty$, имеет место соотношение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in (f)_\varepsilon) = -I(f), \quad (3.1)$$

в котором

$$I(f) := \begin{cases} \int_0^1 D(1, f'(t)) dt, & \text{если } f \in \mathbb{C}_a, \\ \infty, & \text{если } f \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{C}_a. \end{cases}$$

В качестве очевидного следствия из теоремы 3.1 получаем полный локальный п.б.у. для траекторий обобщенных процессов восстановления $z_T^{(q)}$ с линейным сносом:

$$z_T^{(q)} = z_T^{(q)}(t) := \frac{1}{x} Z^{(q)}(tT), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

где

$$Z^{(q)}(t) := Z(t) + qe(t), \quad e(t) := t, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Следствие 3.1. Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда при любом $q \in \mathbb{R}$ семейство $\{z_T^{(q)}\}$ удовлетворяет соответствующему локальному п.б.у. (3.1) с функционалом уклонений $I^{(q)}(f) := I(f - qe)$.

Доказательство теоремы 3.1 следует той же схеме, что и теоремы 1.1, но для функций f из $\mathbb{D} \setminus \mathbb{C}_a$ нужны дополнительные рассмотрения. Именно, мы установим справедливость следующих двух утверждений:

1) если f имеет разрыв, то

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in (f)_\varepsilon) = -\infty; \quad (3.2)$$

2) если $f \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_a$, то соотношение (3.2) также имеет место.

Докажем первое утверждение. Если f имеет в точке $t \in (0, 1)$ разрыв величиной $2h$, то любая функция $g \in (f)_\varepsilon$ при достаточно малом ε будет иметь в точке t разрыв величиной не менее h . Если $\mathbf{P}(T_{0,k} = t) = 0$ при всех k , то $\mathbf{P}(z_T \in (f)_\varepsilon) = 0$, и выполнение (3.2) очевидно. Если

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \{T_{0,k} = t\}\right) > 0,$$

то при целом MT

$$\mathbf{P}(z_T \in (f)_\varepsilon) \leq \mathbf{P}(\eta(Tt) > MT) + \mathbf{P}(\bar{\zeta}_{MT} \geq hT), \quad (3.3)$$

где $\bar{\zeta}_n := \max_{k \leq n} |\zeta_k|$. Как мы уже видели, для любого заданного $N < \infty$ найдется число $M < \infty$ такое, что (см. (1.34))

$$\mathbf{P}(\eta(T) \geq MT) \leq e^{-NT}.$$

Следовательно, по условию $\zeta \in [\mathbf{C}_\infty]$ при всех достаточно больших T

$$\mathbf{P}(\bar{\zeta}_{MT} \geq hT) \leq MTP(|\zeta| \geq hT) \leq MTe^{-NT}.$$

Вместе с (3.3) это означает, что левая часть в (3.2) не превосходит $-N$ при любом N . Это доказывает утверждение 1).

Установим теперь утверждение 2), когда $f \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_a$. В силу соотношения (1.11) и леммы 1.1 в этом случае

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in (f)_\varepsilon) \leq -I(f^{\mathbf{u}_L}).$$

Согласно результатам [3, § 4.2], при $L \rightarrow \infty$ имеет место сходимость

$$I(f^{\mathbf{u}_L}) \rightarrow J(f) := \begin{cases} \infty, & \text{если } \text{Var } f = \infty, \\ I(f_a) + \mu_+ \text{Var } f_s^+ - \mu_- \text{Var } f_s^-, & \text{если } \text{Var } f < \infty, \end{cases}$$

где f_a и f_s — абсолютно непрерывная и сингулярная составляющие функции f , $f = f_a + f_s$, $f_s^\pm$ — возрастающая и убывающая компоненты функции f_s , $\mu_\pm$ — концы максимального интервала (μ_-, μ_+) , на котором функция $\mathbf{E} e^{\mu\zeta}$ конечна. Поскольку $\zeta \in [\mathbf{C}_\infty]$, то $\mu_\pm = \pm\infty$. Стало быть, $J(f) = \infty$, если $\text{Var } f_s > 0$. Утверждение 2), а вместе с ним и теорема 3.1 доказаны.

4. Интегральный принцип больших уклонений для траекторий обобщенного процесса восстановления. В настоящем разделе мы покажем, что при выполнении условий теоремы 3.1 процесс $z_T = z_T(t)$, $0 \leq t \leq 1$, удовлетворяет «интегральному» п.б.у.

Основным утверждением этого раздела является следующая теорема.

Теорема 4.1 (полный интегральный п.б.у.). *Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда для семейства процессов $\{z_T\}$ имеет место п.б.у.: для любого измеримого множества $B \subset \mathbb{D}$*

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in B) \leq -I([B]), \quad (4.1)$$

$$\underline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in B) \geq -I((B)), \quad (4.2)$$

где $[B]$, (B) — соответственно замыкание и внутренность множества B относительно равномерной метрики и

$$I(B) := \inf_{f \in B} I(f).$$

Как и прежде, из п.б.у. для z_T в качестве простого следствия вытекает аналогичное утверждение для семейства

$$z_T^{(q)} := \frac{1}{x} Z^{(q)}(tT), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

соответствующего обобщенному процессу восстановления $Z^{(q)}(t) = Z(t) + qt$ с линейным сносом qt .

Следствие 4.1. *Пусть выполнены условия теоремы 4.1. Тогда для семейства $\{z_T^{(q)}\}$ при любом $q \in \mathbb{R}$ имеет место п.б.у. с функционом уклонений $I^{(q)}(f) := I(f - qe)$, где $e = e(t) = t$, $0 \leq t \leq 1$.*

Как уже отмечалось перед теоремой 3.1, равномерной метрике ρ соответствует наиболее широкий класс множеств, для которых выполнено условие непрерывности $I((B)) = I([B])$. В частности, равномерной метрике соответствует наиболее широкий класс функционалов G на $\mathbb{D}$, непрерывных относительно этой метрики. Пусть

$$B_y := \{f \in \mathbb{D}: G(f) < y\}.$$

Тогда для функционалов G , непрерывных относительно ρ , множество $B_y = (B_y)$ будет открытым, а множество $\{f \in \mathbb{D}: G(f) \leq y\} = [B_y]$ — замкнутым.

Следствие 4.2. Пусть выполнены условия теоремы 3.1 и G — функционал, непрерывный относительно равномерной метрики. Тогда для почти всех y существует предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(G(z_T) < y) = -I(B_y). \quad (4.3)$$

Доказательство. Так как функция $I(B_y)$ не возрастает по y , то она п.в. непрерывна и, стало быть, для почти всех y

$$I(B_y) = I([B_y]).$$

Поэтому (4.3) следует из (4.1), (4.2). Следствие доказано.

При доказательстве теоремы 4.1 нам будет удобно использовать ряд понятий.

Будем называть функционал $I = I(f)$ *компактным*, если для любого $N \geq 0$ множество $\{f \in \mathbb{D}: I(f) \leq N\}$ является компактом в пространстве $(\mathbb{D}, \rho)$, где ρ — равномерная метрика.

Мы будем говорить, что процессы $z_T(t)$ и $\tilde{z}_T(t)$, $t \in [0, 1]$, *асимптотически эквивалентны* (относительно п.б.у.), если при любом $\delta > 0$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(\rho(z_T, \tilde{z}_T) \geq \delta) = -\infty. \quad (4.4)$$

Смысл введения этого понятия поясняет следующая лемма.

Лемма 4.1. Если процессы z_T , $\tilde{z}_T$ асимптотически эквивалентны и процесс z_T удовлетворяет п.б.у. (локальному п.б.у.) с непрерывным снизу компактным функционалом уклонений $I = I(f)$, то и процесс $\tilde{z}_T$ также удовлетворяет п.б.у. (локальному п.б.у.) с тем же функционалом уклонений.

Доказательство леммы 4.1. Пусть процесс z_T удовлетворяет п.б.у.

(i). *Оценка сверху.* Воспользуемся очевидным неравенством

$$\mathbf{P}(\tilde{z}_T \in B) \leq \mathbf{P}(z_T \in (B)_\delta) + \mathbf{P}(\rho(z_T, \tilde{z}_T) \geq \delta),$$

в котором $(B)_\delta$ есть δ -окрестность множества B . Применяя далее оценку сверху в п.б.у. для z_T и соотношение (4.4), получаем для любого $\delta > 0$ неравенство

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(\tilde{z}_T \in B) \leq -I([(B)_\delta]) \leq -I((B)_{2\delta}).$$

Устремляя δ к 0, приходим к неравенству

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(\tilde{z}_T \in B) \leq -I(B+),$$

где $I(B+) := \lim_{\delta \rightarrow 0} I((B)_\delta)$.

Далее, из утверждения (iv) леммы 1.1 в [2] следует, что выпуклая непрерывная снизу функция $D(1, \alpha)$ для $\zeta \in [\mathbf{C}_\infty]$ растет при $\alpha \rightarrow \pm\infty$ быстрее любой линейной функции. Поэтому функционал $I(f)$ является *выпуклым, непрерывным снизу, компактным функционалом* (см., например, [3, § 4.2]).

Остается заметить, что для непрерывного снизу, компактного функционала I имеет место равенство (см. [3, § 4.2]) $I(B+) = I([B])$. Это доказывает оценку сверху

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(\tilde{z}_T \in B) \leq -I([B])$$

в п.б.у. для $\tilde{z}_T$.

(ii). *Оценка снизу.* Для любого фиксированного $\delta > 0$ имеем

$$\mathbf{P}(\tilde{z}_T \in (f)_\delta) \geq \mathbf{P}(z_T \in (f)_{\delta/2}) - \mathbf{P}\left(\rho(z_T, \tilde{z}_T) \geq \frac{\delta}{2}\right).$$

Применяя далее оценку снизу в п.б.у. для z_T и (4.4), получаем оценку снизу в локальном п.б.у. для $\tilde{z}_T$:

$$\underline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(\tilde{z}_T \in (f)_\delta) \geq -I((f)_{\delta/2}) \geq -I(f).$$

Отсюда вытекает оценка снизу в п.б.у. для $\tilde{z}_T$ (см. [3, § 4.2]):

$$\underline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(\tilde{z}_T \in B) \geq -I((B)).$$

Утверждение леммы, относящееся к локальному п.б.у., доказывается аналогично. Лемма 4.1 доказана.

Доказательство теоремы 4.1. Будем считать, не ограничивая общности, что нормирующая последовательность $x = x(T)$, по которой строится процесс $z_T(t)$, имеет вид $x = T$ (см. также доказательство теоремы 1.1 в [1]). Если это не так, то можно заменить процесс $z_T(t)$ асимптотически эквивалентным ему процессом $(x/T)z_T(t)$, у которого нормирующая последовательность имеет нужный вид.

Нам будет удобно доказывать п.б.у. не непосредственно для исходного процесса z_T , а для асимптотически эквивалентного ему процесса $\tilde{z}_T$, который мы определим в два этапа.

Сначала построим «укрупненный» процесс восстановления $Z^*(t)$ по скачкам (τ_0^*, ζ_0^*) , (τ_i^*, ζ_i^*) , $i \geq 1$, где названные случайные величины определяются следующим образом:

$$\tau_0^* := T_{0, \eta_0}, \quad \zeta_0^* := Z_{0, \eta_0}, \quad \eta_0 := \min\{k \geq 0: T_{0, k} \geq 1\}, \quad (4.5)$$

а случайные векторы (τ_i^*, ζ_i^*) суть независимые копии случайного вектора (τ^*, ζ^*) , где

$$\tau^* := T_\eta, \quad \zeta^* := Z_\eta, \quad \eta := \min\{k \geq 1: T_k \geq 1\}. \quad (4.6)$$

Ясно, что процессы Z и Z^* можно построить на одном вероятностном пространстве, так что значения $Z(t)$ и $Z^*(t)$ в моменты τ_0^* , $\tau_0^* + \tau_1^*$, ... совпадают.

На втором этапе «сгладим» процесс $Z^*(t)$, построив с его помощью непрерывную ломаную $\tilde{Z}(t)$ с узловыми точками $(0, 0)$, $(\tau_0^*, Z^*(\tau_0^*))$, $(\tau_0^* + \tau_1^*, Z^*(\tau_0^* + \tau_1^*))$, ... Процесс

$$\tilde{z}_T(t) := \frac{1}{T} \tilde{Z}(Tt), \quad t \in [0, 1],$$

и будет в дальнейшем рассматриваться в качестве асимптотически эквивалентного для процесса z_T .

Для того, чтобы провести доказательство теоремы 4.1 с помощью предложенной конструкции, нам нужно

- (I) доказать асимптотическую эквивалентность процессов z_T и $\tilde{z}_T$;
- (II) доказать п.б.у. для процесса $\tilde{z}_T$.

Начнем с первого этапа. Нам понадобятся свойства скачков ζ_i^* , $i \geq 0$.

Лемма 4.2. Если $\zeta_0 \in [\mathbf{C}_\infty]$, $\zeta \in [\mathbf{C}_\infty]$, то $\zeta_i^* \in [\mathbf{C}_\infty]$, $i \geq 0$.

Доказательство. Положим $Y_0 = 0$, $Y_k = Z_{0, k-1}$ при $k = 1, 2, \dots$ и рассмотрим неотрицательный мартингал

$$X_0 = 1, \quad X_k = \frac{e^{\lambda Y_k}}{\psi_0(\lambda) \psi^{k-1}(\lambda)},$$

где $\psi_0(\lambda) := \mathbf{E} e^{\lambda \zeta_0}$, $\psi(\lambda) := \mathbf{E} e^{\lambda \zeta}$. Величина $\eta_0 = \min\{k \geq 1: T_{0, k-1} \geq 1\}$ является марковским моментом относительно последовательности $\{(\tau_i, \zeta_i); i \geq 0\}$. Поэтому

$$\mathbf{E} X_{\eta_0} \leq 1 \quad (4.7)$$

(см., например, [4, следствие 15.2.2]). Далее, в силу неравенства Коши и неравенства (4.7)

$$\mathbf{E} e^{\lambda Y_{\eta_0}} = \mathbf{E} \frac{e^{\lambda Y_{\eta_0}}}{\sqrt{\psi_0(2\lambda) \psi^{\eta_0-1}(2\lambda)}} \sqrt{\psi_0(2\lambda) \psi^{\eta_0-1}(2\lambda)}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left[\mathbf{E} \frac{e^{2\lambda Y_{\eta_0}}}{\psi_0(2\lambda)\psi^{\eta_0-1}(2\lambda)} \right]^{1/2} [\mathbf{E} \psi_0(2\lambda)\psi^{\eta_0-1}(2\lambda)]^{1/2} \\ &\leq \left[\frac{\psi_0(2\lambda)}{\psi(2\lambda)} \right]^{1/2} [\mathbf{E} \psi^{\eta_0}(2\lambda)]^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Заметим, что $\eta_0 \in [\mathbf{C}_\infty]$. Действительно, по экспоненциальному неравенству Чебышёва

$$\mathbf{P}(\eta_0 > n + 1) \leq \mathbf{P}(T_n < 1) \leq e^{-n\Lambda^{(\tau)}(1/n)},$$

где $\Lambda^{(\tau)}(v) \rightarrow \infty$ при $v \rightarrow 0$. Стало быть, $\mathbf{E} e^{\lambda Y_{\eta_0}} < \infty$ при любом λ . Отсюда и из (4.8) следует, что $\zeta_0^* =_d Y_{\eta_0} \in [\mathbf{C}_\infty]$. Если положить $\psi_0(\lambda) = \psi(\lambda)$, то получим также, что

$$\zeta^* =_d Y_\eta \in [\mathbf{C}_\infty] \quad \text{при любом } i \geq 1.$$

Лемма 4.2 доказана.

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tau_0^* \geq t) &\leq \mathbf{P}(\tau_0 \geq t) + \int_0^1 H_0(dv) \mathbf{P}(\tau \geq t - v) \\ &\leq \mathbf{P}(\tau_0 \geq t) + H_0(1) \mathbf{P}(\tau \geq t - 1), \end{aligned}$$

и, стало быть, τ_0^* удовлетворяет тем же условиям, что и τ_0, τ .

Следствие 4.3. Если выполнены условия леммы 4.2, то

$$\bar{Y}_{\eta_0} := \max_{k \leq \eta_0} |Y_k| \in [\mathbf{C}_\infty], \quad (4.9)$$

$$\max_{t \leq \tau_0^*} |\tilde{Z}(t) - Z(t)| \in [\mathbf{C}_\infty], \quad (4.10)$$

$$\max_{t \leq \tau_0^*} |Z^*(t) - Z(t)| \in [\mathbf{C}_\infty]. \quad (4.11)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы получим утверждение (4.9), если воспользуемся неравенством

$$\bar{Y}_{\eta_0} \leq \sum_{k=1}^{\eta_0} |Y_k - Y_{k-1}|$$

и леммой 4.2 для слагаемых $|Y_1| = |\zeta_0|$, $|Y_k - Y_{k-1}| = |\zeta_k|$ при $k \geq 2$.

Утверждение (4.10) вытекает из (4.9) и неравенства

$$\max_{t \leq \tau_0^*} |\tilde{Z}(t) - Z(t)| \leq \bar{Y}_{\eta_0} + |Y_{\eta_0}|.$$

Утверждение (4.11) доказывается аналогично. Следствие 4.3 доказано.

Мы можем доказать теперь основное утверждение этапа I.

Лемма 4.3. При выполнении условий леммы 4.2 процессы z_T , $\tilde{z}_T$ и $z_T^* := (1/T)Z^*(Tt)$ асимптотически эквивалентны.

Доказательство. Так как $\tau_i^* \geq 1$, то

$$P_T := \mathbf{P}\left(\max_{t \leq T} |\tilde{Z}(t) - Z(t)| \geq \delta T\right) \leq \mathbf{P}(W_0 > \delta T) + T\mathbf{P}(W \geq \delta T),$$

где

$$W_0 := \max_{t \leq \tau_0^*} |\tilde{Z}(t) - Z(t)|, \quad W := \max_{t \leq \tau^*} |\tilde{Z}(t) - Z(t)|,$$

τ_0^* , τ^* определены в (4.5), (4.6). В силу экспоненциального неравенства Чебышёва

$$P_T \leq e^{-\Lambda^{(W_0)}(\delta T)} + Te^{-\Lambda^{(W)}(\delta T)},$$

где $\Lambda^{(W_0)}$, $\Lambda^{(W)}$ — функции уклонений величин W_0 и W , соответственно. Так как в силу леммы 4.2

$$\Lambda^{(W_0)}(v) \gg v, \quad \Lambda^{(W)}(v) \gg v \quad \text{при } v \rightarrow \infty,$$

то $(1/T) \ln P_T \rightarrow -\infty$ при $T \rightarrow \infty$. Это значит, что процессы z_T и $\tilde{z}_T$ асимптотически эквивалентны. Эквивалентность z_T и z_T^* устанавливается аналогично. Лемма 4.3 доказана.

Перейдем теперь к этапу II и докажем п.б.у. для процесса $\tilde{z}_T$. В соответствии с общими теоремами о п.б.у. в метрических пространствах (см. [3, п. 4]), для доказательства п.б.у. для траекторий $\tilde{z}_T(t)$ достаточно доказать два факта:

- 1) выполнение локального п.б.у. для $\tilde{z}_T(t)$;
- 2) «экспоненциальную плотность» распределения $\tilde{z}_T$, т.е. что для любого $N < \infty$ найдется компакт K в пространстве $(\mathbb{C}, \rho)$ такой, что при всех достаточно больших T

$$\mathbf{P}(\tilde{z}_T \notin K) \leq e^{-TN}. \quad (4.12)$$

Выполнение локального п.б.у. для $\tilde{z}_T(t)$ следует из теоремы 3.1 и лемм 4.2, 4.3. Свойство (4.12) вытекает из следующего утверждения.

Лемма 4.4. Если выполнены условия теоремы 4.1, то выполнено (4.12).

Таким образом, для доказательства теоремы 4.1 нам осталось доказать лемму 4.4.

Доказательство леммы 4.4. Из сказанного выше видно, что наличие неоднородности $\xi_0 \neq_d \xi$, когда $\xi_0 \in [\mathbf{C}_0]$, $\xi \in [\mathbf{C}_0]$, никак не меняет нужных нам свойств траекторий $Z(t)$, $\tilde{Z}(t)$ по сравнению с однородным случаем. Поэтому в дальнейшем для упрощения изложения мы везде будем полагать, что $\tau_0 =_d \tau$. Кроме того, для упрощения записи будем считать, что T целочисленны. Наряду с укрупненным процессом

z_T^* и его непрерывной версией $\tilde{z}_T$ рассмотрим траекторию случайного блуждания $s_n(t)$ при $n = T$, построенную как непрерывная ломаная с узловыми точками $(k/n, Z_k^*/x)$, где

$$Z_0^* = 0, \quad Z_k^* = \sum_{j=1}^k \zeta_j^*, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Заметим далее, что если $\zeta^* \in [\mathbf{C}_\infty]$, то множество

$$K_v := \{f \in \mathbb{C}: f(0) = 0, I^*(f) \leq v\}$$

является компактом в $(\mathbb{C}, \rho)$, где

$$I^*(f) = \begin{cases} \int_0^1 \Lambda^*(f'(t)) dt, & \text{если } f \in \mathbb{C}_a, \\ \infty, & \text{если } f \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{C}_a, \end{cases}$$

и Λ^* — функция уклонений случайной величины ζ^* (см., например, [3, § 4.2]).

Предположим сначала, что $\mathbf{E} \zeta = 0$, так что $\mathbf{E} \zeta^* = \mathbf{E} \zeta \mathbf{E} \eta(1) = 0$, где $\eta(t) := \min\{k \geq 1: T_k \geq t\}$. Для упрощения записи верхний индекс $*$ в обозначениях τ_i^* , ζ_i^* , Λ^* , I^* , $\eta^*(t)$ будем опускать, и будем считать, что $\tau_i \geq 1$, $\zeta \in [\mathbf{C}_\infty]$.

Нам нужно оценить вероятность

$$\mathbf{P}(\tilde{z}_T \notin K_v) \leq \mathbf{P}(I(\tilde{z}_T) > v) \leq \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{\eta(T)} \tau_k \Lambda\left(\frac{\zeta_k}{\tau_k}\right) > vT\right).$$

Так как $\eta(T) \leq T$ и по предположению $T = n$ — целое число, то

$$\mathbf{P}(\tilde{z}_T \notin K_v) \leq \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^n \tau_k \Lambda\left(\frac{\zeta_k}{\tau_k}\right) > vn\right).$$

В силу выпуклости функции Λ и того, что $\Lambda(0) = 0$, $\tau_k \geq 1$, имеем $1/\tau_k \leq 1$ и

$$\Lambda\left(\frac{\zeta_k}{\tau_k}\right) \leq \left(1 - \frac{1}{\tau_k}\right) \Lambda(0) + \frac{1}{\tau_k} \Lambda(\zeta_k) = \frac{1}{\tau_k} \Lambda(\zeta_k),$$

так что

$$\mathbf{P}(\tilde{z}_T \notin K_v) \leq \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^n \Lambda(\zeta_k) > vn\right). \quad (4.13)$$

Из леммы 4.4.4 в [3] следует, что правая часть в (4.13) не превосходит $e^{-n(v-\mathbf{E} \gamma)}$, где $\gamma := \Lambda(\zeta) < \infty$. При $v = N + \mathbf{E} \gamma$ это доказывает (4.12).

Пусть теперь $b := \mathbf{E} \zeta \neq 0$. Тогда $\tilde{z}_T(t) = \tilde{z}_T^0(t) + b\pi_T(t)$, где процесс $\tilde{z}_T^0$ построен так же, как $\tilde{z}_T$, но по скачкам $\zeta^0 = \zeta - b$, $\mathbf{E} \zeta^0 = 0$; процесс

$\pi_T(t)$ есть непрерывная ломаная, построенная по стандартному процессу восстановления, с теми же точками скачков T_k (в которых происходят скачки величиной 1), что и для процесса z_T^* . Если $\tilde{z}_T^0 \in K_{(1)}$, $b\pi_T(t) \in K_{(2)}$, где $K_{(1)}$, $K_{(2)}$ — компакты, то очевидно, что $\tilde{z}_T^0 + b\pi_T(t) \in K_{(3)}$, где $K_{(3)} := K_{(1)} \cup K_{(2)}$ — тоже компакт. Пусть для определенности $b > 0$. Тогда, поскольку $\tau_k \geq 1$, имеем для всех $t \in [0, 1]$ неравенства $0 \leq b\pi'_T(t) \leq b$ и, следовательно, $b\pi_T(t) \in K_{(2)}$ всегда, где

$$K_{(2)} := \{f: f(0) = 0, 0 \leq f'(t) \leq b\}$$

— компакт. Далее,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tilde{z}_T^0 \in K_{(1)}, b\pi_T(t) \in K_{(2)}) &\leq \mathbf{P}(\tilde{z}_T \in K_{(3)}), \\ \mathbf{P}(\tilde{z}_T \notin K_{(3)}) &\leq \mathbf{P}(\tilde{z}_T^0 \notin K_{(1)}). \end{aligned}$$

Остается воспользоваться первым этапом доказательства. Лемма 4.4, а вместе с ней и теорема 4.1 доказаны.

Отметим, что возможны и иные подходы к доказательству леммы 4.4. Пусть $T = n$ — целое число и $s_n(t)$ — непрерывная ломаная, построенная по узловым точкам $(k/n, Z_k^*/x)$, $k = 0, 1, \dots, n$. Тогда нетрудно убедиться, что

$$\omega(\Delta, \tilde{z}_T) \leq \omega(\Delta, s_n), \quad (4.14)$$

где $\omega(\Delta, f)$ — модуль непрерывности функции f :

$$\omega(\Delta, f) := \sup \{|f(u+v) - f(u)|: 0 \leq u < u+v \leq 1, v \leq \Delta\}.$$

Затем, пользуясь условием $\zeta \in [\mathbf{C}_\infty]$, можно построить в явном виде (по функции уклонений случайной величины ζ) функцию $\delta(v) \downarrow 0$, $v \downarrow 0$, и соответствующий компакт $K^{(\delta)} := \{f \in \mathbb{C}: f(0) = 0, \omega(\Delta, f) \leq \delta(\Delta) \text{ при } 0 \leq \Delta \leq 1\}$, для которого будет выполнено соотношение (4.12) для процесса s_n , а стало быть, в силу (4.14), и для процесса $\tilde{z}_T$.

«Высоковероятностный» компакт для s_n можно строить и как множество $\{I^*(f) \leq v\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков А. А., Мозульский А. А., Принципы больших уклонений для траекторий обобщенных процессов восстановления. I. — Теория вероятн. и ее примен., 2015, т. 60, в. 2, с. 227–247.
2. Боровков А. А., Мозульский А. А. Принципы больших уклонений для конечномерных распределений обобщенных процессов восстановления. — Сиб. матем. журн., 2015, т. 56, № 1, с. 36–64.
3. Боровков А. А. Асимптотический анализ случайных блужданий. Быстро убывающие распределения приращений. М.: Физматлит, 2013, 447 с.
4. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 2009, 470 с.

Поступила в редакцию
15.IX.2014