Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Буркин, Малые подграфы в случайных дистанционных графах, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2015, том 60, выпуск 3, 439–458

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4632>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 17:51:50

© 2015 г.

БУРКИН А. В.*

МАЛЫЕ ПОДГРАФЫ В СЛУЧАЙНЫХ ДИСТАНЦИОННЫХ ГРАФАХ¹⁾

В настоящей работе изучается распределение числа копий фиксированных графов в случайных подграфах дистанционных графов, играющих важную роль в задачах комбинаторной геометрии. В качестве следствия полученных результатов доказывается теорема о пороговой вероятности для свойства планарности случайного подграфа дистанционного графа, которая интересна и в контексте случайных подграфов произвольных регулярных графов.

Ключевые слова и фразы: случайный граф, дистанционный граф, малые подграфы, планарность, пороговая вероятность.

1. Введение и новые результаты. В 1959 г. П.Эрдёшем и А.Реньи была предложена модель случайного графа, в котором каждое ребро присутствует с вероятностью p независимо от остальных ребер (см., например, [1]). Более формально, пусть n — натуральное число и $0 \leq p \leq 1$. Случайным графом $G(n, p)$ называется вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, где Ω — множество всех неориентированных графов $G = (V_n, E)$ без петель и кратных ребер с множеством вершин $V_n = \{1, \dots, n\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $\mathbf{P}(G) = p^{|E|}(1-p)^{C_n^2 - |E|}$.

Изучением $G(n, p)$ занимались многие авторы, большая доля работ посвящена исследованию асимптотических свойств случайного графа при $n \rightarrow \infty$. Подробное изложение существующих результатов по теории случайных графов представлено в [2]–[5].

Нам потребуется следующее определение пороговой вероятности для свойства $\mathcal{A} = \mathcal{A}(n)$. Множество графов, обладающих свойством $\mathcal{A}$, будем обозначать $G \models \mathcal{A}$. Вероятность $p^* = p^*(n)$ называется *пороговой*, если $\mathbf{P}(G \models \mathcal{A}) \rightarrow 0$ при $p = o(p^*)$, $n \rightarrow \infty$, и $\mathbf{P}(G \models \mathcal{A}) \rightarrow 1$ при $p = w(p^*)$, $n \rightarrow \infty$ (или наоборот). Здесь запись $f(n) = o(g(n))$ ($f(n) = w(g(n))$) означает, что для любого $C > 0$ существует $n_0 > 0$ такое, что для любого $n > n_0$ выполнено неравенство $|f(n)| < C|g(n)|$ ($C|g(n)| < |f(n)|$). Для этих отношений мы также будем использовать обозначения $f(n) \ll g(n)$ и $f(n) \gg g(n)$ соответственно.

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия;
e-mail: a.v.burkin@gmail.com

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-01-03530).

Напомним, что (средней) степенью графа F с k вершинами и l ребрами называется отношение $d(F) = 2l/k$. Граф F — сбалансированный (строго сбалансированный), если для любого его собственного непустого подграфа H выполнено неравенство $d(H) \leq d(F)$ ($d(H) < d(F)$).

П. Эрдёш и А. Реньи в [1] доказали следующую теорему о пороговой вероятности для свойства содержать копию фиксированного графа.

Теорема 1 (П. Эрдёш, А. Реньи). Пусть F — связный сбалансированный граф с k вершинами и l ребрами. Тогда вероятность $p = n^{-k/l}$ является пороговой для свойства содержать копию F .

Для данного графа F обозначим $X = X_F$ число подграфов $G(n, p)$, изоморфных F . Б. Боллобашем в [6] была доказана теорема о распределении X для строго сбалансированных графов при $p \sim cn^{-k/l}$, $c > 0$.

Теорема 2 (Б. Боллобаш). Пусть F — строго сбалансированный граф с k вершинами и l ребрами и a — количество автоморфизмов F . Пусть $p \sim cn^{-k/l}$, $c > 0$. Тогда распределение величины X сходится к пуассоновскому распределению с параметром $\lambda = c^l/a$.

Следующая теорема, доказанная также Б. Боллобашем, представляет собой центральную предельную теорему для случайного графа $G(n, p)$.

Теорема 3 (Б. Боллобаш). Пусть F — строго сбалансированный граф с k вершинами и l ребрами и a — количество его автоморфизмов. Пусть функция $p = p(n)$ такова, что $pn^{k/l} \rightarrow \infty$ и $pn^{k/l-\varepsilon} \rightarrow 0$ для любого $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\frac{X - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1),$$

где $\lambda_n = n^k p^l / a$.

Тем же автором, наряду с А. Ручински, Э. Винсом (см. [7]) и др., было получено обобщение теоремы 1 на случай произвольного графа. Напомним, что максимальной средней степенью графа F принято называть величину $m(F) = \max\{d(H) : H \subset F\}$. Теорема формулируется следующим образом.

Теорема 4 (Б. Боллобаш; А. Ручински, Э. Винс). Пусть F — произвольный фиксированный граф с максимальной средней степенью $2l/k > 0$. Тогда вероятность $p = n^{-k/l}$ является пороговой для свойства содержать копию F .

В настоящей работе рассматривается класс полных дистанционных графов $G(n, r, s) = (V(n, r), E(n, r, s))$, в которых

$$V(n, r) = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}, x_1 + \dots + x_n = r\},$$

$$E(n, r, s) = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = s\},$$

где $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — евклидово скалярное произведение.

Название этих графов объясняется тем, что две вершины графа смежны тогда и только тогда, когда они находятся на определенном расстоянии друг от друга, в данном случае это расстояние равно $\sqrt{2(r-s)}$. Рассмотрение графов такого рода мотивировано задачами комбинаторной геометрии, среди которых задача Борсука и задача о хроматическом числе пространства (см. [8]–[17]).

Графы $G(n, r, s)$ можно определить и по-другому. Пусть $\mathcal{F}$ — некоторое множество мощности n . Тогда вершинами нашего графа назовем все r -подмножества $\mathcal{F}$ и будем проводить между ними ребра в том и только том случае, если они пересекаются ровно по s элементам, т.е.

$$V(n, r) = \binom{\mathcal{F}}{r}, \quad E(n, r, s) = \{\{A, B\}: A, B \in V(n, r), |A \cap B| = s\}.$$

Количество вершин $G(n, r, s)$ будем обозначать N . Ясно, что $N = |V(n, r)| = C_n^r$. Кроме того, граф $G(n, r, s)$ — регулярный степени $N_1 = C_r^s C_{n-r}^{r-s}$.

Предметом нашего исследования является случайный дистанционный граф $G_p(n, r, s)$, т.е. вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, где Ω — множество всех остовных подграфов $G = (V(n, r), E)$ полного дистанционного графа $G(n, r, s)$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $\mathbf{P}(G) = p^{|E|}(1-p)^{|E(n, r, s)|-|E|}$.

М. Е. Жуковским в [18] была доказана следующая теорема для определенных функций r и s , растущих пропорционально n .

Теорема 5 (М. Е. Жуковский). Пусть $r = n/2$ и $s = n/4$. Обозначим $\tilde{N}$ количество вершин графа $G(n, r, s)$ при таких r и s . Пусть F — строго сбалансированный граф с k вершинами и l ребрами. Тогда функция

$$p = \tilde{N}^{-k/l} \sqrt{\ln \tilde{N}}$$

является пороговой вероятностью для свойства содержать копию графа F .

Мы, напротив, исследуем случай, когда r и s постоянны, и доказываем аналогичные результаты.

Далее мы будем использовать обозначение $X = X_F$ и для количества подграфов, изоморфных F , в $G_p(n, r, s)$.

Теорема 6. Пусть числа $r \in \mathbf{N}$ и $s \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ фиксированы. Пусть F — связный сбалансированный граф с k вершинами и l ребрами. Тогда функция

$$p = n^{-(kr-(k-1)s)/l}$$

является пороговой вероятностью для свойства содержать граф F .

Кроме того, при $p \gg n^{-(kr-(k-1)s)/l}$ имеет место закон больших чисел, т.е. для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{X}{\mathbf{E} X} - 1\right| < \varepsilon\right) \rightarrow 1.$$

Теорема 6 будет доказана в п. 2.2.

Напомним, что связный граф называется *двусвязным*, если при удалении любой его вершины и всех инцидентных ей ребер граф остается связным (см., например, [19]). *Компонентами двусвязности* связного графа F называются его максимальные двусвязные индуцированные подграфы. Будем называть *нетривиальными* компоненты двусвязности с числом вершин, большим двух. Известно, что компоненты двусвязности могут пересекаться лишь по одной вершине. Точки, по которым пересекаются нетривиальные компоненты, назовем *точками касания*. Пусть в графе F последние образуют множество $\{c_1, c_2, \dots, c_j\}$. *Кратностью* $k(c_i)$ точки касания c_i будем называть количество нетривиальных компонент, пересекающихся по ней. Обозначим h сумму $\sum_{i=1}^j (k(c_i) - 1)$.

Теорема 7. Пусть $r \in \mathbf{N}$ и $s \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ фиксированы. Пусть F — связный сбалансированный граф с k вершинами и l ребрами. Пусть F содержит b нетривиальных компонент двусвязности и число вершин, лежащих в них, равно d . Предположим, что $p \sim cn^{-(kr-(k-1)s)/l}$, $n \rightarrow \infty$, где $c > 0$. Тогда распределение величины X сходится к пуассоновскому распределению с параметром

$$\lambda = \frac{c^l}{ar!((r-s)!)^{k-1}} (C_r^s)^{k-d+2b-h-1},$$

где h , как и выше, — число точек касания, a — количество автоморфизмов F .

Теорема 7 будет доказана в п. 2.3.

Теорема 8. Пусть $r \in \mathbf{N}$ и $s \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ фиксированы. Пусть F — связный сбалансированный граф с k вершинами и l ребрами и b, d, h, a определены так же, как в теореме 7. Пусть функция $p = p(n)$ такова, что $pn^{(kr-(k-1)s)/l} \rightarrow \infty$ и $pn^{(kr-(k-1)s)/l-\varepsilon} \rightarrow 0$ для любого $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\frac{X - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1),$$

где

$$\lambda_n = Mp^l, \quad M \sim \frac{n^{kr-(k-1)s}}{ar!((r-s)!)^{k-1}} (C_r^s)^{k-d+2b-h-1}.$$

Теорема 8 будет доказана в п. 2.4.

Обозначим $v(H)$ и $e(H)$ число вершин и число ребер графа H соответственно.

Теорема 9. Пусть $r \in \mathbf{N}$ и $s \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ фиксированы. Предположим, что F — произвольный связный граф и

$$\tau(F) = \min_{H \subset F} \left\{ \frac{v(H)r - (v(H) - 1)s}{e(H)} \right\} = \min_{\substack{H \subset F \\ H \text{ связен}}} \left\{ \frac{v(H)r - (v(H) - 1)s}{e(H)} \right\}. \quad (1)$$

Тогда функция

$$p = n^{-\tau(F)}$$

является пороговой вероятностью для свойства содержать граф F . Как и для связных сбалансированных графов, при $p \gg n^{-\tau(F)}$ выполняется закон больших чисел: для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{X}{\mathbf{E} X} - 1\right| < \varepsilon\right) \rightarrow 1.$$

Теорема 9 будет доказана в п. 2.5.

Отметим, что при $s = 0$ условие (1) выполнено для любых связных графов F . Этот случай соответствует случайным подграфам графов $G(n, r, 0)$, известных также как кнезеровские. Отметим, кроме того, что при определенных r и s условие (1) не выполнено (оно нарушается, например, для графа F , полученного объединением двух копий K_5 и пути из четырех вершин, соединяющего две вершины из разных копий), и в этом случае теорема 9 неприменима.

Приведем пример, демонстрирующий кардинальное отличие случайного графа $G_p(n, r, s)$ от классической модели $G(n, p)$. Пусть граф F есть K_4 , к вершине которого присоединено еще одно ребро. Тогда в силу теоремы 9 при определенных r, s существует такая функция p , что $\mathbf{P}(X_{K_4} > 0) \rightarrow 1$, но $\mathbf{P}(X_F > 0) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. В модели случайного графа Эрдёша–Реньи такая ситуация невозможна.

Как следствие полученных результатов мы доказываем теорему о пороговой вероятности для свойства планарности $G_p(n, r, s)$. Напомним, что для классической модели случайного графа П. Эрдёшем и А. Реньи было доказано, что пороговой вероятностью для этого свойства является функция $p = 1/n$ (см. [1]). Исследованием планарности $G(n, p)$ занимались также Т. Лучак, Б. Питтель, Дж. Вирман (см. [20]).

А. Фриз и М. Кривелевич в [21] доказали следующее обобщение этой теоремы. Пусть $G(n)$ — последовательность конечных графов с минимальной степенью $t = t(n) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$. Так же, как раньше, образуем из нее последовательность случайных графов $G_p = G_p(n)$, добавляя в $G_p(n)$ каждое ребро из $G(n)$ независимо с вероятностью $p = p(n)$. Здесь и далее мы говорим, что событие $A = A(n)$ происходит асимптотически почти наверное (а.п.н.), если $\mathbf{P}(A) \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$.

Теорема 10 (А. Фриз, М. Кривелевич). В указанных обозначениях для любого $\varepsilon > 0$ при $p = (1 + \varepsilon)/t$ случайный граф G_p а.п.н. непланарен.

Справедливо следующее несложно доказываемое утверждение, которое мы не нашли в литературе. Для полноты картины мы приведем его доказательство в п. 3.1.

Предложение 1. Пусть $G(n)$ — последовательность регулярных графов на $N = N(n)$ вершинах степени $N_1 = N_1(n)$, причем $N \ll N_1^4$.

Тогда при $p \leq c/N_1$, где $c < 1$, случайный граф $G_p = G_p(n)$ а.н.н. планарен.

Из этого предложения и предыдущей теоремы следует, что при $N \ll N_1^4$ пороговой вероятностью для свойства планарности G_p является функция $p = 1/N_1$. Более того, эта пороговая вероятность является точной. Напомним, что функция p^* называется *точной пороговой вероятностью* для свойства $\mathcal{A}$, если $\mathbf{P}(G \models \mathcal{A}) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, при $p \leq cp^*$, где $c < 1$, и $\mathbf{P}(G \models \mathcal{A}) \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$, при $p \geq cp^*$, где $c > 1$ (или наоборот).

Для $G_p(n, r, s)$ с фиксированными r, s мы доказываем, что в противоположной ситуации, когда $N \gg N_1^4$, пороговая вероятность отличается от $1/N_1$ и не является точной, и находим, чему она равна в зависимости от r и s .

Теорема 11. Пусть $r \in \mathbf{N}$ и $s \in \mathbf{N}$ фиксированы, причем $N_1 = o(N^{1/4})$, т.е. $s > 3r/4$. Тогда пороговой вероятностью для свойства планарности $G_p(n, r, s)$ является функция

$$p = \frac{1}{N_1} \left(\frac{N_1^4}{N} \right)^{1/9} \asymp n^{-(6r-5s)/9}.$$

Кроме того, при $p \sim cn^{-(6r-5s)/9}$

$$\mathbf{P}(G_p(n, r, s) \text{ планарен}) \sim \mathbf{P}(X_{K_{3,3}} = 0) \rightarrow e^{-\lambda},$$

где

$$\lambda = \frac{c^9 C_r^s}{72r! ((r-s)!)^5}.$$

Здесь и далее запись $f(n) \asymp g(n)$ означает, что существуют такие положительные n_1, C_1, C_2 , что для всех $n > n_1$ выполняются неравенства $C_1 g(n) \leq f(n) \leq C_2 g(n)$.

Теорема 11 будет доказана в п. 3.2.

Из доказательства последней теоремы следует, что для последовательности регулярных графов с $N_1 \rightarrow \infty$ и $N_1^4 \ll N$ функция $p \ll (1/N_1)(N_1^4/N)^{1/9}$ не может быть пороговой. Таким образом, $G_p(n, r, s)$ с $s > 3r/4$ представляет собой класс (последовательностей) графов, на которых достигается в некотором смысле минимум пороговой вероятности для свойства планарности.

2. Копии фиксированных графов.

2.1. Вспомогательные утверждения. Для любых смежных вершин $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V(n, r)$ рассмотрим простые пути $(\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k = \mathbf{y})$, $\mathbf{x}_1 \sim \mathbf{x}_2 \sim \dots \sim \mathbf{x}_k$. Здесь мы пишем $\mathbf{x}_1 \sim \mathbf{x}_2$, если $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ соединены ребром. Обозначим P_k количество таких путей. Пусть также N_2 — число вершин, дополняющих произвольное ребро до треугольника. Ясно, что N_2 не зависит от выбора ребра и $N_2 \sim n^{r-s}/(r-s)!$, $n \rightarrow \infty$.

Лемма 1. Если $k = \text{const}$, то $P_k \sim N_2^{k-2}$, $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Несложно заметить, что количество вершин графа $G(n, r, s)$, соединенных с двумя вершинами $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$, зависит лишь от их скалярного произведения $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$. Таким образом, если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — концевые вершины простого пути длины k , то, зная скалярное произведение вершин с номерами $k-2$ и k , мы однозначно находим число таких вершин $\mathbf{x}_{k-1}$, что $\mathbf{x}_{k-1} \sim \mathbf{x}_{k-2}$ и $\mathbf{x}_{k-1} \sim \mathbf{x}_k$. Для произвольных $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ рассмотрим количество смежных с $\mathbf{z}_1$ вершин, скалярное произведение которых с $\mathbf{z}_2$ равно j . Ясно, что эта величина также зависит только от скалярного произведения $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = i$; будем обозначать ее A_i^j ($A_s^s = N_2$). Заметим, что поскольку $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ соединены ребром, то количество способов выбрать смежную с $\mathbf{x}$ вершину $\mathbf{x}_2$, скалярное произведение которой с $\mathbf{y}$ равно i_1 , есть в точности $A_s^{i_1}$. Поэтому количество путей (возможно, с повторяющимися вершинами) запишется в виде суммы

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_{k-3}} A_s^{i_1} A_{i_1}^{i_2} \dots A_{i_{k-3}}^s.$$

Количество простых путей оценим следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{k-3}} A_s^{i_1} \max \{A_{i_1}^{i_2} - 1, 0\} \max \{A_{i_2}^{i_3} - 2, 0\} \dots \max \{A_{i_{k-3}}^s - k + 1, 0\} \\ \leq P_k \leq \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{k-3}} A_s^{i_1} A_{i_1}^{i_2} \dots A_{i_{k-3}}^s. \end{aligned}$$

Нам потребуются следующие асимптотики для A_i^j :

$$\begin{aligned} A_s^j &= \sum_{m=\max\{s-r+\max\{j,s\}, 0\}}^{\min\{j,s\}} C_s^m C_{r-s}^{j-m} C_{r-s}^{s-m} C_{n-r-(r-s)}^{r-s-(j-m)} \\ &\asymp \begin{cases} 0, & \text{если } j < 2s - r, \\ n^{r-s}, & \text{если } 2s - r \leq j \leq s, \\ n^{r-s-(j-s)}, & \text{если } j > s; \end{cases} \\ A_i^s &= \sum_{m=\max\{s-r+\max\{i,s\}, 0\}}^{\min\{i,s\}} C_i^m (C_{r-i}^{s-m})^2 C_{n-r-(r-i)}^{r-s-(s-m)} \\ &\asymp \begin{cases} 0, & \text{если } i < 2s - r, \\ n^{r-s-(s-i)}, & \text{если } 2s - r \leq i \leq s, \\ n^{r-s}, & \text{если } i > s; \end{cases} \\ A_i^j &= \sum_{m=\max\{s-r+\max\{i,j\}, 0\}}^{\min\{i,j\}} C_i^m C_{r-i}^{j-m} C_{r-i}^{s-m} C_{n-r-(r-i)}^{r-s-(j-m)} \end{aligned}$$

$$\asymp \begin{cases} 0, & \text{если } j < s + i - r, \\ n^{r-s}, & \text{если } s + i - r \leq j \leq i, \\ n^{r-s-(j-i)}, & \text{если } i < j \leq i + r - s, \\ 0, & \text{если } j > i + r - s. \end{cases}$$

при $i < s$.

Заметим, что если какое-либо из i_t отлично от s , то слагаемое, задаваемое таким набором $i_1, \dots, i_{k-3}$, есть $o(n^{(r-s)(k-2)})$, поскольку в нем будет по крайней мере один множитель $A_i^j = o(n^{r-s})$. Таким образом, остается одно слагаемое порядка $n^{(r-s)(k-2)}$ с $i_1 = i_2 = \dots = i_{k-3} = s$, и оценка сверху величины P_k асимптотически с этим слагаемым совпадает. Поскольку k фиксировано, нижняя оценка также асимптотически равна этому слагаемому, и лемма доказана.

Обозначим C_k число простых циклов длины k .

Лемма 2. Если $k = \text{const}$, то $C_k \sim (2k)^{-1} N N_1 N_2^{k-2}$, $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Из леммы 1 следует, что количество простых путей с совпадающими первой и последней вершинами равно

$$\tilde{C}_k = N N_1 P_k \sim N N_1 N_2^{k-2}.$$

Для того чтобы получить утверждение леммы, нужно поделить эту величину на количество автоморфизмов цикла длины k , т.е. на $2k$. Лемма доказана.

Последовательность реберно-независимых путей $\{P_0, \dots, P_m\}$ называется *разложением на уши* (англ. *ear decomposition*) графа H , если P_0 есть простой цикл, $P_1, \dots, P_m$ — простые пути или простые циклы, причем $V(P_j)$ для всех $j \in \{1, \dots, m\}$ пересекается с $\bigcup_{i=0}^{j-1} V(P_i)$ лишь по концевым вершинам, $\bigcup_{i=1}^m V(P_i) = V(H)$, а $\bigcup_{i=1}^m E(P_i) = E(H)$. Разложение называется *открытым*, если $P_1, \dots, P_m$ являются простыми путями, т.е. концевые вершины P_j для каждого $j \in \{1, \dots, m\}$ различны.

Теорема Х. Уитни из [22] утверждает, что граф H такой, что $v(H) > 2$, является двусвязным тогда и только тогда, когда существует его открытое разложение на уши. Более того, в качестве P_0 можно взять любой простой цикл H .

Обозначим $M = M_F$ число подграфов полного дистанционного графа $G(n, r, s)$, изоморфных F .

Лемма 3. Пусть F — связный граф с k вершинами и l ребрами. Предположим, что F содержит b нетривиальных компонент двусвязности и число вершин, лежащих в них, равно d . Пусть h — величина, определенная перед формулировкой теоремы 7, и a — количество автоморфизмов F . Тогда

$$M \sim \frac{1}{a} N N_1^{k-d+2b-h-1} N_2^{d-2b+h}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Если F — дерево, то утверждение леммы очевидно. Далее будем предполагать, что в F есть хотя бы один цикл. Занумеруем определенным способом вершины графа F , т.е. составим упорядоченное множество A , содержащее все вершины графа, и в качестве нового индекса вершины возьмем порядковый номер вершины в A . Для этого выберем произвольную нетривиальную компоненту двусвязности H_1 и простой цикл C в ней. Вершины этого цикла в том же порядке добавим в множество A . Для H_1 рассмотрим ее разложение на уши $\{P_0, \dots, P_m\}$ с $P_0 = C$. Для каждого $j \in \{1, \dots, m\}$ добавим в A неконцевые вершины соответствующего пути, сохраняя порядок. Пройдем далее по всем вершинам v_i из $V(H_1)$. Пусть $C_i, i \in \{1, \dots, |V(H_1)|\}$, — связные компоненты в $(V(F) \setminus A) \cup \{v_i\}$, содержащие v_i . Если $C_i = \{v_i\}$, переходим к следующей вершине. Если C_i — дерево, добавим в A вершины C_i в порядке, соответствующем нумерации в ширину (будем называть этот порядок *стандартным*), считая v_i корнем. Если же компонента C_i содержит цикл, то ее можно представить в виде объединения дерева T_i с корнем v_i и подграфов, содержащих нетривиальные компоненты двусвязности, причем каждый подграф пересекается с T_i лишь по одной вершине и эта вершина лежит в одной из компонент. Обозначим эти вершины $x_j, j \in \{1, \dots, k_1\}$. Добавим в множество A вершины дерева T_i в стандартном порядке. Для каждой вершины x_j найдем проходящий через нее цикл в компоненте, содержащей x_j , и добавим вершины этого цикла в A , начиная с вершины, смежной с x_j , и сохраняя порядок. Так же, как выше, используя разложение на уши, дополним A остальными вершинами компоненты. Для каждой вершины последней сделаем то же самое. Таким образом получим множество A , в котором содержится каждый элемент $V(F)$. Далее будем обозначать $v_i, i \in \{1, \dots, k\}$, вершины графа F , подразумевая построенную нумерацию.

Пусть $\widetilde{M}$ — число последовательностей $\{x_1, \dots, x_k\}$ в $V(n, r)$ таких, что если $v_i \sim v_j$, то $x_i \sim x_j$. Нетрудно видеть, что $M = \widetilde{M}/a$.

В силу связности графа F , для любого простого цикла C длины t в F справедливо неравенство $\widetilde{M} \leq \widetilde{C}_t N_1^{k-t}$, где $\widetilde{C}_t$ — количество последовательностей вершин $\{x_1, \dots, x_t\}$, образующих (не обязательно индуцированный) цикл в $G(n, r, s)$. В лемме 2 утверждается, что

$$\begin{aligned} \widetilde{C}_t &\sim N N_1 N_2^{t-2} \sim \frac{1}{s!((r-s)!)^t} n^{tr-(t-1)s} \\ &\sim C_n^s C_{n-s}^{r-s} C_{n-s-(r-s)}^{r-s} \cdots C_{n-s-(t-1)(r-s)}^{r-s}, \end{aligned}$$

т.е. $\widetilde{C}_t$ асимптотически совпадает с числом последовательностей вершин-векторов в $G(n, r, s)$ с единицами на фиксированных s местах, образующих полный подграф. То же верно и для количества простых путей. Поэтому при подсчете величины $\widetilde{M}$ можно считать, что нетривиальные компоненты двусвязности должны образовывать полные подграфы

в $G(n, r, s)$, все вершины каждого из которых имеют единицы на фиксированных s позициях. Пусть компоненты имеют мощности $t_1, \dots, t_b$. Тогда, группируя множители, соответствующие вершинам, не лежащим в компонентах, и их дополнению, получим

$$\begin{aligned}\widetilde{M} &\sim N N_1 N_2^{t_1-2} N_1^2 N_2^{t_2-2} \dots N_1^2 N_2^{t_b-2} N_1^{-h} N_1^{k-d} \\ &= N N_1^{2b-1-h+k-d} N_2^{\sum t_i-2b} = N N_1^{2b-1-h+k-d} N_2^{d+h-2b}.\end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

2.2. Доказательство теоремы 6. Пусть, как и в п. 2.1, $M = M_F$ — количество подграфов полного дистанционного графа $G(n, r, s)$, изоморфных графу F . Из леммы 3 следует, что $M \asymp n^{kr-(k-1)s}$. Обозначим $\mathfrak{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_M\}$ множество всех таких подграфов. Пусть X_i для любого $i \in \{1, 2, \dots, M\}$ — случайная величина, равная единице, если F_i присутствует в $G_p(n, r, s)$, и нулю в противном случае. Очевидно, что количество копий F в $G_p(n, r, s)$ представляется в виде суммы $\sum_{i=1}^M X_i$.

Легко видеть, что

$$\mathbf{E} X = \sum_{i=1}^M \mathbf{E} X_i \asymp n^{kr-(k-1)s} p^l.$$

Дальнейшее разделим доказательство на две части.

Часть 1. Пусть $p \ll n^{-(kr-(k-1)s)/l}$.

В этом случае $\mathbf{E} X \rightarrow 0$, и из неравенства Маркова следует, что $\mathbf{P}(X > 0) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Часть 2. Пусть теперь $p = \omega n^{-(kr-(k-1)s)/l}$, где $\omega = \omega(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Ясно, что при таком условии $\mathbf{E} X \rightarrow \infty$. Оценим дисперсию X . Для нее верно равенство

$$\mathbf{D} X = \sum_{i=1}^M \mathbf{D} X_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq M} \text{Cov}(X_i, X_j).$$

Заметим, что число пар подграфов из $\mathfrak{F}$, множества вершин которых пересекаются по t элементам, составляет $O(N N_1^{2k-t-1})$. Действительно, эта величина оценивается сверху с точностью до константы количеством связных подграфов на $2k-t$ вершинах в $G(n, r, s)$. Используя сбалансированность F , получим, что если у двух подграфов совпадают u ребер, то $u \leq tl/k$. Поэтому дисперсия оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{D} X &\leq \sum_{i=1}^M \mathbf{E} X_i + \sum_{t=2}^k O\left(N N_1^{2k-t-1} p^{2l-tl/k}\right) \\ &\leq \mathbf{E} X + n^{2k(r-s)+s} p^{2l} \sum_{t=2}^k O\left(n^{-t(r-s)} p^{-tl/k}\right)\end{aligned}$$

$$\leq \mathbf{E} X + (\mathbf{E} X)^2 \sum_{t=2}^k O\left(n^{-s(1-t/k)} \omega^{-tl/k}\right) = o((\mathbf{E} X)^2).$$

Отсюда с помощью неравенства Чебышёва получаем

$$\mathbf{P}(X = 0) = \mathbf{P}(-X \geq 0) \leq \mathbf{P}(|\mathbf{E} X - X| \geq \mathbf{E} X) \leq \frac{\mathbf{D} X}{(\mathbf{E} X)^2} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Применим это же неравенство для доказательства закона больших чисел при $p \gg n^{-(kr-(k-1)s)/l}$. Для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{X}{\mathbf{E} X} - 1\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \mathbf{P}(|X - \mathbf{E} X| \geq \varepsilon \mathbf{E} X) \geq 1 - \frac{\mathbf{D} X}{\varepsilon^2 (\mathbf{E} X)^2} \rightarrow 1.$$

Таким образом, теорема 6 полностью доказана.

2.3. Доказательство теоремы 7. Выпишем асимптотическое выражение для M :

$$\begin{aligned} M &\sim \frac{1}{a} N N_1^{2b-1-h+k-d} N_2^{d+h-2b} \\ &\sim \frac{1}{a} \frac{n^r}{r!} \left(C_r^s \frac{n^{r-s}}{(r-s)!}\right)^{2b-1-h+k-d} \left(\frac{n^{r-s}}{(r-s)!}\right)^{d+h-2b} \\ &\sim \frac{(C_r^s)^{k-d+2b-h-1}}{ar! ((r-s)!)^{k-1}} n^{kr-(k-1)s}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{E} X = \sum_{i=1}^M \mathbf{E} X_i = M p^l \sim M_1 c^l = \lambda, \quad \text{где } M_1 = \frac{(C_r^s)^{k-d+2b-h-1}}{ar! ((r-s)!)^{k-1}}.$$

В силу теоремы 1.20 из [2] достаточно доказать сходимость факториальных моментов

$$\mathbf{E} X^j = \mathbf{E} X(X-1) \cdots (X-j+1)$$

к λ^j при $n \rightarrow \infty$ для всех фиксированных натуральных j . Из этого будет следовать утверждение теоремы.

Ясно, что $\mathbf{E} X^j$ есть математическое ожидание числа упорядоченных наборов копий графа F . Покажем, что эта величина асимптотически совпадает с математическим ожиданием Y_j — количества упорядоченных наборов копий F с непересекающимися множествами вершин. Заметим, что

$$M(M-kN_1^{k-1}) \cdots (M-(j-1)kN_1^{k-1}) p^{jl} \leq \mathbf{E} Y_j \leq M(M-1) \cdots (M-j+1) p^{jl}, \quad (2)$$

откуда следует, что

$$\mathbf{E} Y_j \sim M^j p^{jl} \sim \lambda^j.$$

Остается доказать, что $\mathbf{E} Z_j = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$, где $Z_j = X^j - Y_j$.

Напомним, что $e(H)$ — количество ребер в графе H . Сначала отметим, что для двух различных графов A и B таких, что B изоморфен F и в точности t вершин графа B не принадлежат $V(A)$, в силу сбалансированности F выполнено неравенство $e_B(A \cap B) \leq (k-t)l/k$ (где $e_B(A \cap B)$ — число ребер из B в индуцированном подграфе B с множеством вершин $V(A) \cap V(B)$), из чего следует, что

$$e(A \cup B) \geq e(A) + \frac{tl}{k}, \quad \text{если } t > 0; \quad e(A \cup B) \geq e(A) + 1, \quad \text{если } t = 0. \quad (3)$$

Пусть $F_1, \dots, F_j$ — подграфы $G(n, r, s)$, изоморфные F , и пусть $|\bigcup_{i=1}^j V(F_i)| = t < jk$. Перенумеровывая эти подграфы, разобьем их на u групп: $\{F_1^1, \dots, F_{j_1}^1; \dots; F_u^1, \dots, F_{j_u}^1\}$ (здесь $1 \leq u \leq j-1$, поскольку случай $u = j$ отвечает величине Y_j) таким образом, чтобы множества вершин подграфов из разных групп не пересекались, ровно t_v^m вершин F_v^m (здесь $0 \leq t_v^m < k$) не принадлежали $\bigcup_{i=1}^{m-1} F_v^i$ и выполнялись равенства $|\bigcup_{i=1}^{j_v} V(F_v^i)| = t_v$. Заметим, что $\sum_{v=1}^u t_v = t$. Используя (3), получим

$$e\left(\bigcup_{i=1}^{j_v} F_v^i\right) \geq e\left(\bigcup_{i=1}^{j_v-1} F_v^i\right) + \frac{t_v^j l}{k} \geq \dots \geq \frac{t_v l}{k}, \quad \text{если } t_v = \left|\bigcup_{i=1}^{j_v} V(F_v^i)\right| > k;$$

$$e\left(\bigcup_{i=1}^{j_v} F_v^i\right) \geq e(F_v^1 \cup F_v^2) \geq l + 1, \quad \text{если } t_v = \left|\bigcup_{i=1}^{j_v} V(F_v^i)\right| = k \text{ и } j_v > 1.$$

Напомним, что $[P]$ — скобка Айверсона:

$$[P] = \begin{cases} 1, & \text{если } P \text{ истинно;} \\ 0, & \text{если } P \text{ ложно.} \end{cases}$$

Выпишем выражение для математического ожидания Z_j :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} Z_j &= \sum_{t=k}^{kj-1} \sum_{u=1}^{j-1} \sum' O\left(\left(NN_1^{t_1-1} p^{t_1 l/k} [t_1 > k] + NN_1^{k-1} p^{l+1} [t_1 = k; j_1 > 1] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + NN_1^{k-1} p^l [j_1 = 1]\right) \dots \left(NN_1^{t_u-1} p^{t_u l/k} [t_u > k] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + NN_1^{k-1} p^{l+1} [t_u = k; j_u > 1] + NN_1^{k-1} p^l [j_u = 1]\right)\right) \\ &= \sum_{t=k}^{kj-1} \sum_{u=1}^{j-1} \sum' O\left(\left(n^{s(1-t_1/k)} [t_1 > k] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + n^{-(kr-(k-1)s)/l} [t_1 = k; j_1 > 1] + [j_1 = 1]\right) \dots \right) \end{aligned}$$

$$\times \left(n^{s(1-t_u/k)} [t_u > k] + n^{-(kr-(k-1)s)/l} [t_u = k; j_u > 1] + [j_u = 1] \right), \quad (4)$$

где

$$\sum' = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_u \\ j_v \geq 1 \quad \forall v \in \{1, \dots, u\} \\ j_1 + \dots + j_u = j}} \sum_{\substack{t_1, \dots, t_u \\ t_v \geq k \quad \forall v \in \{1, \dots, u\} \\ t_1 + \dots + t_u = t}}.$$

Поскольку хотя бы одно из j_v отлично от единицы, выражение в правой части (4) равно

$$\sum_{t=k}^{kj-1} \sum_{u=1}^{j-1} \sum' O \left(\max \{ n^{-s/k}, n^{-(kr-(k-1)s)/l} \} \right),$$

и, следовательно, $\mathbf{E} Z_j = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$, что завершает доказательство теоремы 7.

2.4. Доказательство теоремы 8. Мы докажем, что $\mathbf{E} X_n^j = \lambda_n^j + o(\lambda_n^{-t})$ для всех натуральных j и t . Отсюда, по теореме 1.24 из [2], будет следовать сходимость распределения $(X - \lambda_n)/\sqrt{\lambda_n}$ к $\mathcal{N}(0, 1)$.

Заметим, что из условий на функцию p следует, что $\lambda_n \rightarrow \infty$ и $\lambda_n = o(n^\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$.

Как и в доказательстве теоремы 7, представим X_n^j в виде суммы $Y_j + Z_j$, где Y_j есть количество последовательностей подграфов $G_p(n, r, s)$, изоморфных F , с непересекающимися множествами вершин.

Из (2) следует, что

$$\mathbf{E} Y_j = M^j p^{jl} + O(n^{-r}) = \lambda_n^j + o(\lambda_n^{-t}) \quad \text{для любых } j \text{ и } t.$$

Продолжим цепочку равенств (4), принимая во внимание условия теоремы:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} Z_j &= \sum_{t=k}^{kj-1} \sum_{u=1}^{j-1} \sum' O \left(\left(n^{t_1 r - (t_1 - 1)s} p^{t_1 l/k} [t_1 > k] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + n^{kr - (k-1)s} p^{l+1} [t_1 = k; j_1 > 1] + n^{kr - (k-1)s} p^l [j_1 = 1] \right) \dots \right. \\ &\quad \left. \times \left(n^{t_u r - (t_u - 1)s} p^{t_u l/k} [t_u > k] + n^{kr - (k-1)s} p^{l+1} [t_u = k; j_u > 1] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + n^{kr - (k-1)s} p^l [j_u = 1] \right) \right) \\ &= \sum_{t=k}^{kj-1} \sum_{u=1}^{j-1} \sum' O \left(\left(n^{s(1-t_1/k)} (n^{kr - (k-1)s} p^l)^{t_1/k} [t_1 > k] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + p n^{kr - (k-1)s} p^l [t_1 = k; j_1 > 1] + n^{kr - (k-1)s} p^l [j_1 = 1] \right) \dots \right. \\ &\quad \left. \times \left(n^{s(1-t_u/k)} (n^{kr - (k-1)s} p^l)^{t_u/k} [t_u > k] \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + p n^{kr-(k-1)s} p^l [t_u = k; j_u > 1] + n^{kr-(k-1)s} p^l [j_u = 1] \Big) \\
& = \sum_{t=k}^{kj-1} \sum_{u=1}^{j-1} \sum' O \left(\left(n^{-s/k} (\lambda_n)^{t_1/k} [t_1 > k] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + p \lambda_n [t_1 = k; j_1 > 1] + \lambda_n [j_1 = 1] \right) \cdots \right. \\
& \quad \left. \times \left(n^{-s/k} \lambda_n^{t_u/k} [t_u > k] + p \lambda_n [t_u = k; j_u > 1] + \lambda_n [j_u = 1] \right) \right). \tag{5}
\end{aligned}$$

Как и при доказательстве предыдущей теоремы, заметим, что хотя бы одно из j_v больше единицы. Поскольку $p = o(n^{-(kr-(k-1)s)/l+\varepsilon})$ для любого $\varepsilon > 0$, а $n^{-c} = o(\lambda_n^{-t})$, где c не зависит от n , для любого натурального t , из (5) следует, что

$$\mathbf{E} Z_j = o(\lambda_n^{-t}) \quad \text{для любых } j, t \in \mathbf{N},$$

что завершает доказательство теоремы 8.

2.5. Доказательство теоремы 9. Будем использовать обозначения из п. 2.2. Напомним, что $e(H) = |E(H)|$ — количество ребер в графе H , а $v(H) = |V(H)|$ — количество его вершин. Напомним также, что

$$\tau(F) = \min_{H \subset F} \left\{ \frac{v(H)r - (v(H) - 1)s}{e(H)} \right\}.$$

Пусть $H_0 \subset F$ — подграф, на котором достигается этот минимум. Поскольку

$$\min_{H \subset F} \left\{ \frac{v(H)r - (v(H) - 1)s}{e(H)} \right\} = \min_{\substack{H \subset F \\ H \text{ связен}}} \left\{ \frac{v(H)r - (v(H) - 1)s}{e(H)} \right\},$$

можно считать, что H_0 связен.

Как и при доказательстве теоремы 6, разобьем наши рассуждения на две части.

Часть 1. Пусть $p \ll n^{-\tau(F)}$. Тогда, поскольку H_0 связен,

$$\mathbf{E} X_{H_0} \leqslant N N_1^{v(H_0)-1} p^{e(H_0)} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

В силу неравенства Маркова

$$\mathbf{P}(X_{H_0} > 0) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Поскольку $\mathbf{P}(X_F > 0) \leqslant \mathbf{P}(X_{H_0} > 0)$, из этого следует первая часть утверждения теоремы.

Часть 2. Пусть теперь $p = \omega n^{-\tau(F)}$, где $\omega = \omega(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Ясно, что в этом случае $\mathbf{E} X \rightarrow \infty$. Следуя схеме доказательства теоремы 6, оценим дисперсию $X = X_F$:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} X &\leq \mathbf{E} X + O\left(\sum_{H \subset F: e(H) \geq 1} N N_1^{2k-v(H)-1} p^{2l-e(H)}\right) \\ &= \mathbf{E} X + n^{2k(r-s)+2s} p^{2l} O\left(\sum_{H \subset F: e(H) \geq 1} n^{-v(H)(r-s)-s} p^{-e(H)}\right) \\ &= \mathbf{E} X + (\mathbf{E} X)^2 O\left(\frac{1}{\omega \min_{H \subset F} \{n^{v(H)(r-s)+s-e(H)\tau(F)}\}}\right) \\ &= \mathbf{E} X + O\left(\frac{(\mathbf{E} X)^2}{\omega}\right) = o((\mathbf{E} X)^2). \end{aligned}$$

Отсюда, применяя неравенство Чебышёва, получаем, что

$$\mathbf{P}(X = 0) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Очевидно, что закон больших чисел при $p \gg n^{-\tau(F)}$ справедлив и в этом случае: для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{X}{\mathbf{E} X} - 1\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \mathbf{P}(|X - \mathbf{E} X| \geq \varepsilon \mathbf{E} X) \geq 1 - \frac{\mathbf{D} X}{\varepsilon^2 (\mathbf{E} X)^2} \rightarrow 1.$$

Теорема 9 доказана.

3. Планарность.

3.1. Доказательство предложения 1. Обозначим $Y_k = Y_k(n)$ ($6 \leq k \leq N$) число различных k -вершинных компонент связности в $G_p(n)$, имеющих не менее $k + 3$ ребер. Докажем, что а.п.н. $Y = \sum_{k=6}^N Y_k = 0$. Отсюда, поскольку единственный непланарный граф на k вершинах, где $k < 6$, — это K_5 , а

$$\mathbf{P}(X_{K_5} > 0) \leq \mathbf{E} X_{K_5} \leq N N_1^4 \left(\frac{c}{N_1}\right)^{10} = O\left(\frac{N}{N_1^6}\right) \rightarrow 0,$$

будет следовать, что случайный граф $G_p(n)$ планарен с вероятностью, стремящейся к единице при $n \rightarrow \infty$. Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 4. Пусть $p = c/N_1$, где $c < 1$. Тогда в случайном графе $G_p(n)$ все компоненты связности а.п.н. имеют размер $O(\ln N)$, т.е.

$$\mathbf{P}\left(\sum_{k=[\beta \ln N]+1}^N X_k = 0\right) \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где $X_k = X_k(n)$ — количество k -вершинных компонент связности в $G_p(n)$.

Доказательство проходит аналогично рассмотренному в [23] доказательству для случайного графа $G_p(n, n/2, n/4)$ и использует технику ветвящихся процессов (см., например, [24], [25]).

Из леммы 4 следует, что ее утверждение верно и для соответствующих Y_k :

$$\mathbf{P}\left(\sum_{k=[\beta \ln N]+1}^N Y_k = 0\right) \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Остается доказать, что случайный граф $G_p(n)$ а.п.н. не будет содержать вышеуказанных компонент связности с числом вершин $k \leq \beta \ln N$. Пусть $\tilde{Y}$ — число всех таких компонент, т.е.

$$\tilde{Y} = \sum_{k=6}^{[\beta \ln N]} Y_k.$$

Пусть также $T_k = T_k(n)$ обозначает количество k -вершинных деревьев в $G_p(n)$. Используя оценку

$$T_k \leq NN_1^{k-1} \frac{k^{k-2}}{k!}$$

и подставляя $p = c/N_1$, где $c < 1$, получаем, что

$$\mathbf{E} Y_k \leq T_k C_{C_k^2}^4 p^{k+3} (1-p)^{kN_1-k^2} \leq NN_1^{k-1} \frac{k^{k-2}}{k!} C_{C_k^2}^4 p^{k+3} (1-p)^{kN_1-k^2}.$$

При $k \leq \sqrt{N_1}$ полученное выражение оценивается сверху величиной

$$O\left(NN_1^{k-1} \frac{k^{k-2}}{k!} C_{C_k^2}^4 \frac{c^{k+3}}{N_1^{k+3}} e^{-ck}\right) = O\left(\frac{N}{N_1^4} (ce^{1-c} k^{6/k})^k\right).$$

Поскольку $m^{6/m} \rightarrow 1$ при $m \rightarrow \infty$, а $ce^{1-c} < 1$, если $c \neq 1$, то, начиная с некоторого $k_0 = k_0(c)$, справедливо неравенство $ce^{1-c} k^{6/k} \leq q < 1$. Следовательно,

$$\mathbf{E} \tilde{Y} = \sum_{k=6}^{[\beta \ln N]} \mathbf{E} Y_k = \sum_{k=6}^{k_0-1} O\left(\frac{N}{N_1^4}\right) + \sum_{k=k_0}^{[\beta \ln N]} O\left(\frac{N}{N_1^4} q^k\right) = O\left(\frac{N}{N_1^4}\right) \rightarrow 0,$$

что в силу неравенства Маркова завершает доказательство предложения 1.

3.2. Доказательство теоремы 11. Пусть Y_k — количество k -вершинных связных подграфов в $G_p(n, r, s)$, имеющих не менее $k + 3$ ребер, и $Y = \sum_{k=6}^N Y_k$. Пусть T_k , как и раньше, обозначает количество k -вершинных деревьев в $G_p(n, r, s)$.

Разделим доказательство на три части.

Часть 1. Пусть

$$p = \omega \left(\frac{1}{N_1} \left(\frac{N_1^4}{N} \right)^{1/9} \right), \quad \text{где } \omega = \omega(n) = o(1) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} Y_k &\leq T_k C_k^4 p^{k+3} \leq N N_1^{k-1} \frac{k^{k-2}}{k!} C_k^4 \frac{\omega^{k+3}}{N_1^{k+3}} \left(\frac{N_1^4}{N} \right)^{(k+3)/9} \\ &\leq \frac{N}{N_1^4} k^6 e^k \omega^{k+3} \left(\frac{N_1^4}{N} \right)^{(k+3)/9}. \end{aligned}$$

Следовательно, математическое ожидание Y оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} Y &= \sum_{k=6}^N \mathbf{E} Y_k \leq \frac{N}{N_1^4} \sum_{k=6}^N k^6 e^k \omega^{k+3} \left(\frac{N_1^4}{N} \right)^{(k+3)/9} \\ &\leq \frac{N}{N_1^4} \sum_{k=9}^N k^6 e^k \omega^k \left(\frac{N_1^4}{N} \right)^{k/9} = \frac{N}{N_1^4} \sum_{k=9}^N \omega^k \left(k^{6/k} e \left(\frac{N_1^4}{N} \right)^{1/9} \right)^k \\ &\leq \frac{N}{N_1^4} \sum_{k=9}^N \omega^k \left(e^{6/e+1} \left(\frac{N_1^4}{N} \right)^{1/9} \right)^k \leq \frac{e^{9(6/e+1)} \omega^9}{1 - e^{6/e+1} \omega (N_1^4/N)^{1/9}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в силу неравенства Маркова, имеем

$$\mathbf{P}(Y \geq 1) \leq \mathbf{E} Y \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Кроме того,

$$\mathbf{P}(X_{K_5} > 0) \leq \mathbf{E} X_{K_5} \leq N N_1^4 \left(\frac{1}{N_1} \left(\frac{N_1^4}{N} \right)^{1/9} \right)^{10} = \frac{1}{N_1^2} \left(\frac{N_1^4}{N} \right)^{1/9} \rightarrow 0.$$

Отсюда получаем, что при $p \ll (1/N_1)(N_1^4/N)^{1/9}$

$$\mathbf{P}(G_p(n, r, s) \text{ планарен}) \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Часть 2. Пусть теперь

$$p \gg \frac{1}{N_1} \left(\frac{N_1^4}{N} \right)^{1/9}.$$

Применим теорему 6 для графа $F = K_{3,3}$. Из нее следует, что при таких p в графе $G_p(n, r, s)$ а.п.н. существует подграф, изоморфный F , т.е. $\mathbf{P}(X_F > 0) \rightarrow 1$. Очевидно, что

$$\mathbf{P}(G_p(n, r, s) \text{ планарен}) \leq \mathbf{P}(X_F = 0) \rightarrow 0.$$

Часть 3. Пусть, наконец, $p \sim cn^{-(6r-5s)/9}$. Ясно, что, начиная с некоторого n , выполнено неравенство $p \leq c_1 n^{-(6r-5s)/9}$. Аналогично части 1 получаем:

$$\mathbf{E} Y_k = O\left(\frac{N}{N_1^4} k^6 e^k c_1^k \left(\frac{N_1^4}{N}\right)^{(k+3)/9}\right).$$

Оценим математическое ожидание случайной величины $\hat{Y} = \sum_{k=7}^N Y_k$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \hat{Y} &= \sum_{k=7}^N \mathbf{E} Y_k = O\left(\frac{N}{N_1^4} \sum_{k=7}^N k^6 e^k c_1^{k+3} \left(\frac{N_1^4}{N}\right)^{(k+3)/9}\right) \\ &= O\left(\frac{N}{N_1^4} \sum_{k=10}^N k^6 e^k c_1^k \left(\frac{N_1^4}{N}\right)^{k/9}\right) \\ &= O\left(\frac{N}{N_1^4} \sum_{k=10}^N \left(e c_1 k^{6/k} \left(\frac{N_1^4}{N}\right)^{1/9}\right)^k\right) \\ &= O\left(\frac{N}{N_1^4} \sum_{k=10}^N \left(c_1 e^{6/e+1} \left(\frac{N_1^4}{N}\right)^{1/9}\right)^k\right) \\ &= O\left(\left(\frac{N_1^4}{N}\right)^{1/9} \frac{e^{10(6/e+1)} c_1^{10}}{1 - c_1 e^{6/e+1} (N_1^4/N)^{1/9}}\right) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{P}(\hat{Y} > 0) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Пусть Z_k — количество k -вершинных связных непланарных подграфов в $G_p(n, r, s)$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(G_p(n, r, s) \text{ непланарен}) &= \mathbf{P}\left(\sum_{k=5}^N Z_k > 0\right) = \mathbf{P}\left(\{Z_6 > 0\} \cup \left\{Z_5 + \sum_{k=7}^N Z_k > 0\right\}\right) \\ &= \mathbf{P}(Z_6 > 0) + \mathbf{P}\left(Z_5 + \sum_{k=7}^N Z_k > 0\right) - \mathbf{P}\left(Z_6 > 0; Z_5 + \sum_{k=7}^N Z_k > 0\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(Z_5 + \sum_{k=7}^N Z_k > 0\right) &= \mathbf{P}\left(\{Z_5 > 0\} \cup \left\{\sum_{k=7}^N Z_k > 0\right\}\right) \\ &\leq \mathbf{P}(Z_5 > 0) + \mathbf{P}\left(\sum_{k=7}^N Z_k > 0\right), \\ \mathbf{P}(Z_5 > 0) &= \mathbf{P}(X_{K_5} > 0) \leq \mathbf{E} X_{K_5} = O\left(N N_1^4 \left(\frac{1}{N_1} \left(\frac{N_1^4}{N}\right)^{1/9}\right)^{10}\right) \\ &= O\left(\frac{1}{N_1^2} \left(\frac{N_1^4}{N}\right)^{1/9}\right) \rightarrow 0, \\ \mathbf{P}\left(\sum_{k=7}^N Z_k > 0\right) &\leq \mathbf{P}\left(\sum_{k=7}^N Y_k > 0\right) \rightarrow 0, \\ \mathbf{P}\left(Z_6 > 0; Z_5 + \sum_{k=7}^N Z_k > 0\right) &\leq \mathbf{P}\left(Z_5 + \sum_{k=7}^N Z_k > 0\right) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Поэтому (6) асимптотически равно

$$\mathbf{P}(Z_6 > 0) = \mathbf{P}(X_{K_{3,3}} + \tilde{Z}_6 > 0),$$

где $\tilde{Z}_6$ есть количество связанных подграфов с шестью вершинами в $G_p(n, r, s)$, содержащих граф, гомеоморфный K_5 . Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tilde{Z}_6 > 0) &\leq \mathbf{E} \tilde{Z}_6 = O\left(N N_1^5 \left(\frac{1}{N_1} \left(\frac{N_1^4}{N}\right)^{1/9}\right)^{11}\right) = O\left(\frac{1}{N_1^2} \left(\frac{N_1^4}{N}\right)^{2/9}\right) \rightarrow 0, \\ \mathbf{P}(X_{K_{3,3}} > 0; \tilde{Z}_6 > 0) &\leq \mathbf{P}(\tilde{Z}_6 > 0) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_6 > 0) &= \mathbf{P}\left(\{X_{K_{3,3}} > 0\} \cup \{\tilde{Z}_6 > 0\}\right) \\ &= \mathbf{P}(X_{K_{3,3}} > 0) + \mathbf{P}(\tilde{Z}_6 > 0) - \mathbf{P}(X_{K_{3,3}} > 0; \tilde{Z}_6 > 0) \\ &\sim \mathbf{P}(X_{K_{3,3}} > 0) \rightarrow 1 - e^{-\lambda} \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где $\lambda = c^9 C_r^s / (72r! ((r-s)!)^5)$. В последнем переходе была применена теорема 7.

Теорема 11 полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Erdős P., Rényi A. On the evolution of random graphs. — Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci., 1960, v. 5, p. 17–61.

2. *Bollobás B.* Random Graphs. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001, 528 p. (Cambridge Stud. Adv. Math., v. 73.)
3. *Janson S., Luczak T., Ruciński A.* Random Graphs. New York: Wiley, 2000, 333 p.
4. *Райгородский А. М.* Модели случайных графов. М.: МЦНМО, 2011, 136 с.
5. *Колчин В. Ф.* Случайные графы. М.: Физматлит, 2000, 255 с.
6. *Bollobás B.* Threshold functions for small subgraphs. — *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1981, v. 90, № 2, p. 197–206.
7. *Ruciński A., Vince A.* Balanced graphs and the problem of subgraphs of random graphs. — *Proceedings of the Sixteenth Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing*. Winnipeg: Utilitas Math., 1985, p. 181–190. (Congr. Numer., v. 49.)
8. *Райгородский А. М.* Проблема Борсука для $(0,1)$ -многогранников и кросс-политопов. — *Докл. РАН*, 2000, v. 371, № 5, p. 593–597.
9. *Райгородский А. М.* Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств. — *Успехи матем. наук*, 2001, т. 56, № 1, с. 107–146.
10. *Райгородский А. М.* Проблема Борсука для целочисленных многогранников. — *Матем. сб.*, 2002, v. 193, № 10, с. 139–160.
11. *Райгородский А. М.* Проблема Эрдеша–Хадвигера и хроматические числа конечных геометрических графов. — *Матем. сб.*, 2005, т. 196, № 1, с. 123–156.
12. *Райгородский А. М.* Проблемы Борсука и Грюнбаума для решетчатых многогранников. — *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005, т. 69, № 3, с. 81–108.
13. *Райгородский А. М.* Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2007, 136 с.
14. *Raigorodskii A. M.* Three lectures on the Borsuk partition problem. — *Surveys in Contemporary Mathematics*. Ed. by N. Young et al. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007, p. 202–247.
15. *Raigorodskii A. M.* Around Borsuk’s conjecture. — *J. Math. Sci.*, 2008, v. 154, № 4, p. 604–623.
16. *Raigorodskii A. M.* Coloring distance graphs and graphs of diameters. — *Thirty Essays on Geometric Graph Theory*. Berlin: Springer, 2013, p. 429–460.
17. *Raigorodskii A. M.* On the chromatic numbers of spheres in $\mathbf{R}^n$. — *Combinatorica*, 2012, v. 32, № 1, p. 111–123.
18. *Жуковский М. Е.* О вероятности вхождения копии фиксированного графа в случайный дистанционный граф. — *Матем. заметки*, 2012, т. 92, № 6, с. 844–855.
19. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Эдиториал УРСС, 2003, 300 с.
20. *Luczak T., Pittel B., Wierman J. C.* The structure of a random graph at the point of the phase transition. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1994, v. 341, № 2, p. 721–748.
21. *Frieze A., Krivelevich M.* On the non-planarity of a random subgraph. — *Combin. Probab. Comput.*, 2013, v. 22, № 5, p. 722–732.
22. *Whitney H.* Non-separable and planar graphs. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1932, v. 34, № 2, p. 339–362.
23. *Ярмухаметов А. Р.* О связности случайных дистанционных графов специального вида. — *Чебышевский сб.*, 2009, v. 10, № 1, с. 95–108.
24. *Алон Н., Спенсер Дж.* Вероятностный метод. М.: БИНОМ, 2007, 320 с.
25. *Karp R. M.* The transitive closure of a random digraph. — *Random Structures Algorithms*, 1990, v. 1, № 1, p. 73–93.

Поступила в редакцию
17.III.2015