Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Вахтель, Д. Э. Денисов, Точная асимптотика момента пересечения криволинейной границы асимптотически устойчивым случайным блужданием, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2015, том 60, выпуск 3, 459–481

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4633>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 14:14:05

© 2015 г.

ВАХТЕЛЬ В. И.^{*}, ДЕНИСОВ Д. Э.^{**}ТОЧНАЯ АСИМПТОТИКА МОМЕНТА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ
КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЫ АСИМПТОТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫМ
СЛУЧАЙНЫМ БЛУЖДЕНИЕМ

Пусть $\{S_n, n \geq 0\}$ — асимптотически устойчивое случайное блуждание, g — положительная функция и T_g — первый момент, когда S_n покидает интервал $[-g(n), \infty)$. В настоящей статье мы изучаем асимптотическое поведение момента T_g . Мы приводим интегральные тесты для g , гарантирующие выполнение соотношения $\mathbf{P}(T_g > n) \sim V(g)\mathbf{P}(T_0 > n)$, где T_0 — первая отрицательная лестничная высота случайного блуждания $\{S_n\}$.

Ключевые слова и фразы: момент первого пересечения, подвижная граница, нелинейная граница, момент выхода.

1. Введение и основные результаты. Рассматривается одномерное случайное блуждание

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad n \geq 1,$$

где $X, X_1, X_2, \dots$, — независимые одинаково распределенные случайные величины. Пусть $g(t)$ — возрастающая функция; рассмотрим момент выхода из области, ограниченной кривой $-g(t)$:

$$T_g := \min\{n \geq 1: S_n < -g(n)\}.$$

Цель этой статьи — изучение асимптотик $\mathbf{P}(T_g > n)$ при n , стремящемся к бесконечности.

Данный вопрос достаточно подробно изучен в случае постоянной границы $g(n) \equiv x \geq 0$. В частности, хорошо известно, что если

$$\mathbf{P}(S_n \geq 0) \rightarrow \rho \in (0, 1), \quad n \rightarrow \infty, \quad (1)$$

то

$$\mathbf{P}(T_x > n) \sim h(x)n^{\rho-1}L(n), \quad n \rightarrow \infty, \quad (2)$$

^{*}Institut für Mathematik, Universität Augsburg, Augsburg,, Germany; e-mail: Vitali.Wachtel@math.uni-augsburg.de

^{**}School of Mathematics, The University of Manchester, Manchester, UK; e-mail: denis.denisov@manchester.ac.uk, denis79@imail.ru

где $L(n)$ — медленно меняющаяся функция. (Используя несколько вольные обозначения, мы будем писать T_x вместо T_g в случае $g(t) \equiv x$. Мы также будем писать $a(x) \sim b(x)$, если $a(x)/b(x) \rightarrow 1$, когда x стремится к бесконечности.) Функция $h(x)$ есть функция восстановления строго убывающего лестничного процесса.

Теперь мы введем класс случайных блужданий, который будет рассматриваться в настоящей статье. Пусть

$$\mathcal{A} := \{0 < \alpha < 1; |\beta| < 1\} \cup \{1 < \alpha < 2; |\beta| \leq 1\} \\ \cup \{\alpha = 1, \beta = 0\} \cup \{\alpha = 2, \beta = 0\}$$

— подмножество в $\mathbf{R}^2$. Для $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$ и случайной величины X мы будем писать $X \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$, если распределение X принадлежит области притяжения устойчивого закона с характеристической функцией

$$G_{\alpha, \beta}(t) := \exp \left\{ -c|t|^\alpha \left(1 - i\beta \frac{t}{|t|} \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} \right) \right\}, \quad c > 0, \quad (3)$$

и вдобавок $\mathbf{E} X = 0$, если первый момент существует. Пусть $c(x)$ есть неотрицательная функция, определенная соотношением

$$c(x) := \inf \{u \geq 0: \mu(u) \leq x^{-1}\}, \quad x \geq 1, \quad (4)$$

где

$$\mu(u) := \frac{1}{u^2} \int_{-u}^u x^2 \mathbf{P}(X \in dx).$$

Известно (см., например, [7, гл. XVII, § 5]), что для всех $X \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$ функция $\mu(u)$ правильно меняется с показателем $(-\alpha)$. Следовательно, $c(x)$ правильно меняется с показателем α^{-1} , т.е. существует медленно меняющаяся функция $l_1(x)$ такая, что

$$c(x) = x^{1/\alpha} l_1(x). \quad (5)$$

Кроме того, нормированная последовательность $\{S_n/c(n), n \geq 1\}$ сходится по распределению к устойчивому закону с характеристической функцией (3). В этом случае мы говорим, что S_n есть *асимптотически устойчивое случайное блуждание*. Для каждого $X \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$ имеется явная формула для ρ :

$$\rho = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \alpha = 1, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\alpha} \arctg \left(\beta \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} \right) & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (6)$$

Так как $h(0) = 1$, мы можем записать (2) в несколько ином виде:

$$\mathbf{P}(T_x > n) \sim h(x) \mathbf{P}(T_0 > n).$$

Это представление показывает, что асимптотики совпадают с точностью до константы для каждого фиксированного x . Данное утверждение остается верным для криволинейных границ, которые растут не очень быстро. Для броуновского движения и монотонно возрастающей функции g в [12] и [14] было показано, что

$$0 < \mathbf{E} \left| B(T_g^{(\text{bm})}) \right| < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \int_1^\infty g(t)t^{-3/2} dt < \infty \quad (7)$$

и, более того,

$$\mathbf{P}(T_g^{(\text{bm})} > t) \sim \mathbf{E} \left[B(T_g^{(\text{bm})}) \right] \mathbf{P}(T_1^{(\text{bm})} > t) \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Здесь $T_g^{(\text{bm})}$ обозначает соответствующее время выхода для броуновского движения.

Конечность интеграла в (7) также необходима: если $\int_1^\infty g(t)t^{-3/2} dt = \infty$, то

$$\mathbf{P}\{T_g^{(\text{bm})} > t\} \gg \mathbf{P}\{T_1^{(\text{bm})} > t\} \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Случай общих случайных блужданий и процессов Леви был проанализирован П. Гринвуд и А. А. Новиковым в [9] (см. также [12], [13]). Они доказали, что если $\mathbf{E} g(T_0) < \infty$, то существует $R_g \in (0, \infty)$ такое, что

$$\mathbf{P}(T_g > n) \sim R_g \mathbf{P}(T_0 > n) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Тем не менее недавние результаты Ф. Аурзады и Т. Крамм [2] дают весомый повод полагать, что условия в [9] не оптимальны. Точнее, в [2] показано, что если $g(t) = o(t^\gamma)$ с некоторым $\gamma < 1/\alpha$, то $\mathbf{P}(T_g > n)$ и $\mathbf{P}(T_0 > n)$ имеют одинаковые грубые асимптотики, т.е.

$$\mathbf{P}(T_g > n) = n^{\rho-1+o(1)} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Но, ввиду (2), $\mathbf{E} g(T_0)$ конечно только при $\gamma \leq 1 - \rho < 1/\alpha$.

В этой статье мы представляем альтернативные (и более мягкие, чем $\mathbf{E} g(T_0) < \infty$) условия для выполнения (9).

Теорема 1. Пусть g — возрастающая функция такая, что функция $h(g(x))$ субаддитивна. Если выполняется (1) и

$$\mathbf{E} h(g(T_0)) < \infty, \quad (10)$$

то существует константа $V(g) \in (0, \infty)$ такая, что

$$\mathbf{P}(T_g > n) \sim V(g) \mathbf{P}(T_0 > n) \sim V(g) n^{\rho-1} L(n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Этот результат обобщает теорему 1 из [9], где предполагалось, что g вогнута и $\mathbf{E}g(T_0)$ конечно. Так как h субаддитивна, мы заключаем, что (10) слабее, чем конечность $\mathbf{E}g(T_0)$. Более того, субаддитивность h влечет, что $h(g(x))$ субаддитивна для каждой вогнутой функции g . Предположение субаддитивности может быть ослаблено.

З а м е ч а н и е 1. Утверждение теоремы 1 остается верным, если мы заменим субаддитивность $h(g(x))$ требованием существования субаддитивной мажоранты, удовлетворяющей (10).

Далее мы переформулируем теорему 1 на случай асимптотически устойчивых случайных блужданий.

Следствие 1. *Предположим, что $X \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$. Если*

$$\int_1^\infty \frac{h(g(x))}{xh(c(x))} dx < \infty, \quad (12)$$

то (11) остается выполненным.

Если $\mathbf{E}(X^-)^2 < \infty$, то $h(x) \sim cx$ и, следовательно, наше условие (12) совпадает с интегральным тестом Новикова (см. [13, теорема 1]. Заметим также, что в [13] накладываются более сильные условия на функцию g , а именно предполагается ее вогнутость.

Так как h правильно меняется с показателем $\alpha(1-\rho)$, мы заключаем, что (11) выполняется для каждой функции g , ограниченной сверху функцией x^γ для некоторого $\gamma < \min\{1, 1/\alpha\}$.

З а м е ч а н и е 2. А. А. Могульский и Е. А. Печерский [11] вывели следующее факторизационное тождество для T_g : если g супераддитивна, т.е. $g(x+y) \geq g(x) + g(y)$, то существует последовательность событий E_n такая, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{P}(T_g > n) = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \mathbf{P}(E_n) \right\}. \quad (13)$$

Более того,

$$E_n \subseteq \{S_n \geq -g(n)\} \quad \text{для всех } n \geq 1. \quad (14)$$

К сожалению, структура E_n очень сложна и неясно, как определить предел $\mathbf{P}(E_n)$. Однако, используя (14), можно найти асимптотически точную верхнюю границу для $\mathbf{P}(T_g > n)$. В самом деле, из (14) немедленно следует, что

$$\mathbf{P}(T_g > n) \leq q_n,$$

где последовательность q_n определяется с помощью равенства

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n q_n = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \mathbf{P}(S_n \geq -g(n)) \right\}.$$

Предположим, что функция g удовлетворяет условию

$$\int_1^\infty \frac{g(x)}{xc(x)} dx < \infty. \quad (15)$$

Тогда, используя оценку $\mathbf{P}(S_n \in [x, x+1)) \leq C/c(n)$, мы приходим к выводу, что коэффициенты

$$R(z) := \exp \left\{ \sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n} \mathbf{P}(S_n \in [-g(n), 0]) \right\}$$

суммируемы, т.е. $R(1) < \infty$. Замечая, что

$$\sum_{n=0}^\infty z^n q_n = \left(\sum_{n=0}^\infty z^n \mathbf{P}(T_0 > n) \right) R(z),$$

мы получаем

$$q_n \sim R(1) \mathbf{P}(T_0 > n)$$

и, следовательно,

$$1 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(T_g > n)}{\mathbf{P}(T_0 > n)} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(T_g > n)}{\mathbf{P}(T_0 > n)} \leq R(1). \quad (16)$$

Заметим также, что для вывода соотношения $\mathbf{P}(T_g > n) \sim C \mathbf{P}(T_0 > n)$ из (13) достаточно показать, что

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} |\mathbf{P}(E_n) - \mathbf{P}(S_n > 0)| < \infty.$$

Вспоминая, что h правильно меняется с показателем $\alpha(1-\rho)$, мы заключаем, что условие (12) более ограничительно, чем (15), для всех случайных блужданий таких, что $\alpha(1-\rho) < 1$. Таким образом, оценки (16) влекут, что $\mathbf{P}(T_g > n)$ может быть того же порядка, что и $\mathbf{P}(T_0 > n)$, для функций g , не удовлетворяющих (12).

Отправной точкой доказательства теоремы 1 является следующее хорошо известное наблюдение: T_g совпадает с одним из отрицательных лестничных моментов S_n . Пусть (τ_k, χ_k) — независимые копии $(T_0, -S_{T_0})$. Тогда

$$T_g = \sum_{k=1}^{\nu} \tau_k, \quad (17)$$

где

$$\nu := \min\{k \geq 1: \chi_1 + \dots + \chi_k > g(\tau_1 + \dots + \tau_k)\}. \quad (18)$$

Так как хвост функции распределения момента τ , где τ имеет одинаковое распределение с τ_1 , правильно меняется с показателем $\rho - 1 \in (-1, 0)$, мы покажем, что для любой возрастающей функции g

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(T_g > n)}{\mathbf{P}(T_0 > n)} = \mathbf{E} \nu \in [1, \infty]. \quad (19)$$

Таким образом, для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что $E \nu$ конечно при условиях теоремы 1.

Предположение субаддитивности в теореме 1, по-видимому, является техническим условием. К сожалению, мы не знаем, как убрать это ограничение. Но для асимптотически однородных случайных блужданий мы можем заменить (12) на более сильный интегральный тест, позволяющий вывести (11) без предположения субаддитивности.

Теорема 2. *Предположим, что $X \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$. Если функция g возрастает и*

$$\int_1^\infty \frac{h(g(x))}{xh(c(x/\ln x))} dx < \infty, \quad (20)$$

то (11) остается верным.

Интегральный тест (20) выполнен для любой возрастающей функции g , правильно меняющейся с показателем $\gamma < 1/\alpha$; следовательно, предположение субаддитивности для таких функций может быть отброшено. С другой стороны, несложно построить правильно меняющуюся с показателем $1/\alpha$ функцию g , которая удовлетворяет условию (12), но для которой интеграл в (20) бесконечен.

Наше доказательство теоремы 2 основано на адаптации метода из [4], где изучалось асимптотическое поведение моментов выхода из конусов многомерных случайных блужданий. Основная идея в [4] — использование классической универсальности случайных блужданий: если определенные моменты случайного блуждания конечны (что означает близость случайного блуждания к броуновскому движению), то асимптотики моментов выхода совпадают, с точностью до постоянного множителя, с соответствующими асимптотиками броуновского движения. В доказательстве теоремы 2 мы используем абсолютно другой тип универсальности: мы фиксируем распределение случайного блуждания и изучаем границы g такие, что T_g и T_0 имеют одинаковую скорость убывания.

Теперь мы перейдем к уменьшающимся областям. Положим

$$\hat{T}_g := \min\{n \geq 1: S_n < g(n)\}.$$

Для момента $\hat{T}_g$ не существует представления, подобного (17). По этой причине нет аналога теоремы 1 для $\hat{T}_g$. Но можно рассмотреть отношение $\mathbf{P}(\hat{T}_g > n)/\mathbf{P}(T_0 > n)$ следующим образом: если g положительна, то

$$\frac{\mathbf{P}(\hat{T}_g > n)}{\mathbf{P}(T_0 > n)} = \mathbf{P}(\hat{T}_g > n \mid T_0 > n),$$

и можно попытаться представить предел этой условной вероятности как функционал от $\{S_n\}$, при условии, что траектория S_n не покидает $[0, \infty)$.

Чтобы сформулировать соответствующий результат, нам понадобятся новые понятия. Хорошо известно, что $h(x)$ есть положительная гармоническая функция для $\{S_n\}$, убитого при выходе из $[0, \infty)$, т.е.

$$\mathbf{E}[h(x+X); x+X > 0] = h(x), \quad x \geq 0.$$

Обозначим через $\mathbf{P}^h$ преобразование Дуба меры $\mathbf{P}$ с функцией h . Точнее, $\mathbf{P}^h$ есть распределение цепи Маркова на $[0, \infty)$ с переходной функцией

$$p^h(x, dy) = \frac{h(y)}{h(x)} \mathbf{P}(x+X \in dy), \quad x, y \geq 0.$$

Следующее утверждение является простым следствием леммы 2.5 работы [1].

Предложение 1. Если выполняется (1), то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(\hat{T}_g > n)}{\mathbf{P}(T_0 > n)} = \mathbf{P}^h(\hat{T}_g = \infty). \quad (21)$$

П. Гринвуд и А. А. Новиков [9, теорема 2] показали, что предел в левой части (21) существует для случайных блужданий таких, что $\mathbf{E}X = 0$ и $\mathbf{E}e^{-\lambda X} < \infty$ для некоторого $\lambda > 0$. Они также показали, что этот предел положителен тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}g(T_0) < \infty$. Информация о положительности предела очень важна, так как если предел равен 0, то асимптотическое поведение $\mathbf{P}(\hat{T}_g > n)$ остается неизвестным. Таким образом, для применения предложения 1 мы должны найти разумные условия положительности $\mathbf{P}^h(\hat{T}_g = \infty)$. Так как $\mathbf{P}^h(\hat{T}_g = \infty) = \mathbf{P}^h(S_k \geq g(k) \text{ для всех } k \geq 1)$, то мы получаем, что $\mathbf{P}^h(\hat{T}_g = \infty) = 1$ для всех функций g таких, что $\mathbf{P}^h(S_k < g(k) \text{ б.ч.}) = 0$. Верно и обратное: если $\mathbf{P}^h(S_k < g(k) \text{ б.ч.}) = 1$, то $\mathbf{P}^h(\hat{T}_g = \infty) = 0$.

Согласно [10, теорема 1], если $\mathbf{E}X^2 < \infty$ и $\mathbf{E}X = 0$, то

$$\mathbf{P}^h(S_k < g(k) \text{ б.ч.}) = 0 \text{ или } 1 \quad (22)$$

в зависимости от того, является интеграл

$$\int_1^\infty \frac{g(x)}{x^{3/2}} dx \text{ конечным или бесконечным.}$$

Следовательно, для любого осциллирующего случайного блуждания с конечной дисперсией имеем:

$$\mathbf{P}^h(\hat{T}_g = \infty) > 0 \iff \int_1^\infty \frac{g(x)}{x^{3/2}} dx < \infty.$$

К сожалению, мы не нашли результатов, подобных (22), для случайных блужданий с бесконечной дисперсией. Таким образом, у нас нет критерия положительности $\mathbf{P}^h(\hat{T}_g = \infty)$ для осциллирующих блужданий с бесконечной дисперсией.

Как оказалось, подход, используемый в теореме 2, может быть также применен к $\hat{T}_g$.

Теорема 3. *Предположим, что $X \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$ и выполняется (20). Тогда существует $\hat{V}(g) \in (0, \infty)$ такое, что при $n \rightarrow \infty$*

$$\mathbf{P}(\hat{T}_g > n) \sim \hat{V}(g)\mathbf{P}(T_0 > n). \quad (23)$$

2. Доказательство теоремы 1. Сначала мы выведем (19). Если $\mathbf{E} \nu$ конечно, то это соотношение немедленно следует из теоремы 2 работы [8]. Предположим, что $\mathbf{E} \nu = \infty$. Так как τ положительна, то

$$\mathbf{P}(T_g > n) \geq \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{\nu \wedge m} \tau_k > n\right)$$

для любого $m \geq 1$. Применяя теорему 2 из [8] к моменту остановки $\nu \wedge m$, мы получаем

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(T_g > n)}{\mathbf{P}(T_0 > n)} \geq \mathbf{E}[\nu \wedge m].$$

Устремляя m к бесконечности, мы завершаем вывод (19).

Как уже было сказано во введении, теорема 1 вытекает из (19) и следующего утверждения.

Предложение 2. *В условиях теоремы 1*

$$\mathbf{E} \nu < \infty. \quad (24)$$

2.1. Доказательство предложения 2 для случайных блужданий с $\mathbf{E} \chi = \infty$. Из субаддитивности $h(g(x))$ следует, что

$$\nu \leq \mu := \min \{k \geq 1: h(\chi_1 + \dots + \chi_k) > h(g(\tau_1)) + \dots + h(g(\tau_k))\}.$$

Значит, достаточно показать, что математическое ожидание μ конечно. Но последнее следует из положительной возвратности в 0 последовательности

$$Z_n := \left(Z_0 + \sum_{k=1}^n h(g(\tau_k)) - h\left(\sum_{k=1}^n \chi_k\right) \right)^+, \quad n \geq 1.$$

Согласно лемме 1 и предложению в [6], наше предположение $\mathbf{E} \chi = \infty$ эквивалентно предположению $\mathbf{E} h(\chi) = \infty$. Следовательно,

$$\mathbf{E} [h(y + \chi) - h(y)] = \infty$$

для всех $y \geq 0$. Комбинируя это с (10), мы в итоге получаем

$$\mathbf{E} [h(y + \chi) - h(y) - h(g(\tau))] = \infty \quad (25)$$

для всех $y \geq 0$.

Зафиксируем некоторые положительные x и y такие, что $x > h(y)$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[Z_{n+1} - Z_n \mid \sum_{k=1}^n h(g(\tau_k)) = x, \sum_{k=1}^n \chi_k = y \right] \\ \leq \mathbf{E} [h(y) - h(y + \chi) + h(g(\tau)); x + h(g(\tau)) - h(y + \chi) > 0] \\ = -\mathbf{E} [h(y + \chi) - h(y) - h(g(\tau)); h(y + \chi) - h(y) - h(g(\tau)) < x - h(y)]. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (25), мы заключаем, что существует $A > 0$ такое, что

$$\mathbf{E} \left[Z_{n+1} - Z_n \mid \sum_{k=1}^n h(g(\tau_k)) = x, \sum_{k=1}^n \chi_k = y \right] \leq -1$$

для всех x, y , удовлетворяющих неравенству $x - h(y) > A$. Отсюда следует, что время достижения отрезка $[0, A]$ последовательностью Z_n имеет конечное среднее. Так как 0 может быть достигнут из любой точки $[0, A]$ за конечное в среднем время, мы заключаем, что $\mathbf{E}\mu < \infty$.

2.2. Доказательство предложения 2 для случайных блужданий с $\mathbf{E}\chi < \infty$. Если случайное блуждание S_n таково, что $\mathbf{E}\chi < \infty$, то $h(x) \sim Cx$ при $x \rightarrow \infty$ и, в частности, $\mathbf{E}h(\chi) < \infty$. Поэтому мы не можем использовать последовательность Z_n из предыдущего пункта. Зафиксируем $k \geq 1$ и рассмотрим

$$Z^{(k)} := \chi_1 + \chi_2 + \dots + \chi_k - g(\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_k);$$

пусть $Z_i^{(k)}$ — независимые копии Z . Используя снова субаддитивность g , легко показать, что

$$\nu \leq k\mu^{(k)},$$

где

$$\mu^{(k)} := \min\{n \geq 1: Z_1^{(k)} + Z_2^{(k)} + \dots + Z_n^{(k)} > 0\}.$$

Отсюда мы заключаем, что предложение 2 будет следовать из существования k такого, что $\mathbf{E}Z^{(k)} > 0$. Следовательно, достаточно показать, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \mathbf{E}g(\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_k) = 0. \quad (26)$$

Положим $U_k = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_k$ и заметим, что $\tau_i \in \mathcal{D}(1 - \rho, 1)$. Пусть $a(k)$ — соответствующая нормирующая последовательность, т.е. $U_k/a(k)$ слабо сходится к устойчивому закону с показателем $1 - \rho$.

Поскольку g возрастает и сублинейна, то

$$\begin{aligned} \mathbf{E}g(U_k) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{E} [g(U_k); U_k \in [ja(k), (j+1)a(k)]] \\ &\leq g(a(k)) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} g(ja(k)) \mathbf{P}(U_k > ja(k)). \end{aligned}$$

Так как хвост τ правильно меняется с показателем $\rho - 1 > -1$, то

$$\mathbf{P}(U_k > x) \leq Ck\mathbf{P}(\tau > x), \quad x \geq 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}g(U_k) &\leq g(a(k)) + C \sum_{j=1}^{\infty} g(ja(k))k\mathbf{P}(\tau > ja(k)) \\ &\leq g(a(k)) + Ck\mathbf{E}[g(\tau); \tau > a(k)]. \end{aligned} \quad (27)$$

Из предположения $\mathbf{E}g(\tau) < \infty$ вытекает, что

$$\frac{g(a(k))}{k} \leq Cg(a(k))\mathbf{P}(\tau > a(k)) \leq C\mathbf{E}[g(\tau); \tau > a(k)].$$

Более того,

$$\mathbf{E}[g(\tau); \tau > a(k)] \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Применяя эти соотношения к (27), мы получаем (26). Доказательство предложения 2 завершено.

2.3. Доказательство следствия 1. Достаточно доказать эквивалентность (10) и (12). Заметим, что если $X \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$, то

$$\mathbf{P}(\tau_1 > x) \sim C \frac{1}{h(c(x))} \quad \text{при } x \rightarrow \infty$$

и, следовательно, (12) эквивалентно

$$\int_1^{\infty} \frac{h(g(x))}{x} \mathbf{P}(\tau_1 > x) dx < \infty.$$

Таким образом,

$$(12) \text{ эквивалентно } \mathbf{E}h(g(\tau_1)) < \infty.$$

3. Доказательство теоремы 2.

3.1. Конечность $V(g)$. Пусть h будет функцией восстановления убывающих лестничных высот. Известно, что она гармонична для случайного блуждания S_n , убитого при выходе из $\mathbf{R}_+$, т.е.

$$\mathbf{E}[h(x + X_1); x + X_1 > 0] = h(x), \quad x > 0.$$

Положив $h(x) = 0$ на отрицательной полуоси, мы можем записать это равенство в виде $\mathbf{E}h(x + X_1) = h(x)$, $x > 0$.

Лемма 1. Последовательность $Y_n = h(S_n + g(n))1\{T_g > n\}$ является субмартингалом.

Доказательство. Ясно, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Y_{n+1} - Y_n | \mathcal{F}_n] &= \mathbf{E}[(h(S_{n+1} + g(n+1)) - h(S_n + g(n))) 1\{T_g > n\} | \mathcal{F}_n] \\ &\quad - \mathbf{E}[h(S_{n+1} + g(n+1)) 1\{T_g = n+1\} | \mathcal{F}_n]. \end{aligned}$$

Заметим, что $h(S_{n+1} + g(n+1)) 1\{T_g = n+1\} = 0$, так как $h(x) = 0$ для $x \leq 0$. Далее, из гармоничности h получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Y_{n+1} - Y_n | \mathcal{F}_n] &= \mathbf{E}[(h(S_{n+1} + g(n+1))) 1\{T_g > n\} | \mathcal{F}_n] - h(S_n + g(n)) 1\{T_g > n\} \\ &= h(S_n + g(n+1)) 1\{T_g > n\} - h(S_n + g(n)) 1\{T_g > n\} \geq 0, \end{aligned}$$

так как h и g монотонно возрастают. Лемма 1 доказана.

Зафиксируем произвольную положительную последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$ и обозначим

$$\nu_n := \min\{k \geq 1: |S_k| \geq c(\varepsilon_n n)\}.$$

Лемма 2. Существует положительная константа C такая, что

$$\mathbf{P}(\nu_n > \delta_n n) \leq e^{-C\delta/\varepsilon_n}$$

для любых последовательностей δ_n, ε_n таких, что $\delta_n > 2\varepsilon_n$.

Доказательство достаточно стандартно и приводится лишь для полноты изложения. Положим $r_n := [\varepsilon_n n]$ и $R_n := [\delta n / r_n]$, где $[x]$ обозначает целую часть x . Очевидно, что

$$R_n \geq \frac{\delta}{\varepsilon_n} - 1. \quad (28)$$

Для $\mathbf{P}(\nu_n > \delta n)$ мы имеем следующую оценку сверху:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\nu_n > \delta n) &\leq \mathbf{P}(|S_{j r_n}| < c(\varepsilon_n n) \text{ для всех } j \leq R_n) \\ &\leq \mathbf{P}(|S_{j r_n} - S_{(j-1)n}| < 2c(\varepsilon_n n) \text{ для всех } j \leq R_n) \\ &= (\mathbf{P}(|S_{r_n}| < 2c(\varepsilon_n n)))^{R_n}. \end{aligned}$$

Так как $\{S_n\}$ асимптотически устойчиво, то существует положительная константа C такая, что

$$\mathbf{P}(|S_{r_n}| < 2c(\varepsilon_n n)) \leq e^{-C}.$$

Объединяя это с (28), мы завершаем доказательство леммы 2.

Предложение 3. Пусть g такова, что $g(0) > 0$ и выполняется условие (12). Тогда существует конечный строго положительный предел

$$V(g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[h(S(n) + g(n)); T_g > n] < \infty.$$

Доказательство. Так как $h(S(n) + g(n))1\{T_g > n\}$ — субмартингал, достаточно показать, что

$$\sup_n \mathbf{E}[h(S(n) + g(n)); T_g > n] < \infty,$$

и затем применить хорошо известную теорему о сходимости субмартингалов.

Зафиксируем $n_0 > 1$ и положим

$$n_m = n_0 \left[\left(\frac{1}{\delta} \right)^m \right], \quad m \geq 1,$$

где $[r]$ обозначает целую часть r . Так как $h(S_n + g(n))1\{T_g > n\}$ есть положительный субмартингал, то достаточно показать, что подпоследовательность $\mathbf{E}[h(S_{n_m} + g(n_m)); T_g > n_m]$ ограничена. Сначала разобьем это математическое ожидание на две части:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[h(S_{n_m} + g(n_m)); T_g > n_m] \\ = E_1 + E_2 := \mathbf{E}[h(S_{n_m} + g(n_m)); T_g > n_m, \nu_{n_m} \leq n_{m-1}] \\ + \mathbf{E}[h(S_{n_m} + g(n_m)); T_g > n_m, \nu_{n_m} > n_{m-1}]. \end{aligned}$$

Для фиксированного n положим

$$\tilde{\tau}(g(n)) := \min\{k \geq 1: S_k + g(n) \leq 0\}.$$

Рассмотрим второе математическое ожидание. Заметим, что

$$E_2 = \mathbf{E}[\mathbf{E}[h(S_{n_m} + g(n_m))1\{T_g > n_m\} | \mathcal{F}_{n_{m-1}}] 1\{\nu_{n_m} > n_{m-1}\}].$$

Пользуясь гармоничностью h , находим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[h(S_{n_m} + g(n_m))1\{T_g > n_m\} | \mathcal{F}_{n_{m-1}}] \\ \leq \mathbf{E}_{S_{n_m-1}}[h(S_{n_m-n_{m-1}} + g(n_m))1\{\tilde{\tau}(g(n_m)) > n_m - n_{m-1}\}] \\ \times 1\{T_g > n_{m-1}\} \\ \leq h(S_{n_{m-1}} + g(n_m)) \leq h(S_{n_{m-1}} + g(n_{m-1})) + h(g(n_m)) \end{aligned}$$

(последнее неравенство справедливо в силу субаддитивности функции восстановления). Поэтому

$$\begin{aligned} E_2 &\leq \mathbf{E}[h(S_{n_{m-1}} + g(n_{m-1})) + h(g(n_m)); \nu_{n_m} > n_{m-1}] \\ &\leq \mathbf{E}[h(c(\varepsilon_{n_m} n_m) + g(n_m)) + h(g(n_m)); \nu_{n_m} > n_{m-1}] \\ &\leq (h(c(\varepsilon_{n_m} n_m)) + 2h(g(n_m))) \mathbf{P}(\nu_{n_m} > n_{m-1}). \end{aligned}$$

Применяя лемму 10 с $\varepsilon_n := (3\delta C \ln n)^{-1}$, мы получаем

$$E_2 \leq (h(c(\varepsilon_{n_m} n_m)) + 2h(g(n_m))) n_m^{-3}.$$

Первое математическое ожидание оценивается похожим образом. Сначала заметим, что

$$E_1 = \mathbf{E} \left[\mathbf{E} \left[h(S_{n_m} + g(n_m)) 1\{T_g > n_m\} \mid \mathcal{F}_{\nu_{n_m}} \right], \nu_{n_m} \leq n_{m-1} \right].$$

Снова используя гармоничность h , получаем

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} [h(S_{n_m} + g(n_m)) 1\{T_g > n_m\} \mid \mathcal{F}_{\nu_{n_m}}] \\ & \leq \mathbf{E}_{S_{\nu_{n_m}}} [h(S_{n_m - \nu_{n_m}} + g(n_m)) 1\{\tilde{\tau}(g(n_m)) > n_m - \nu_{n_m}\}] 1\{T_g > \nu_{n_m}\} \\ & \leq h(S_{\nu_{n_m}} + g(n_m)) 1\{T_g > \nu_{n_m}\} \\ & \leq (h(S_{\nu_{n_m}} + g(\nu_{n_m})) + h(g(n_m))) 1\{T_g > \nu_{n_m}\}. \end{aligned}$$

Так как $S_{\nu_n} \geq c(\varepsilon_n n)$, мы имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} [h(S_{n_m} + g(n_m)) 1\{T_g > n_m\} \mid \mathcal{F}_{\nu_{n_m}}] \\ & \leq h(S_{\nu_{n_m}} + g(\nu_{n_m})) \left(1 + \frac{h(g(n_m))}{h(c(\varepsilon_{n_m} n_m))} \right) 1\{T_g > \nu_{n_m}\}. \end{aligned}$$

Следовательно, используя последнее неравенство и субмартингалное свойство, находим, что

$$\begin{aligned} E_1 & \leq \left(1 + \frac{h(g(n_m))}{h(c(\varepsilon_{n_m} n_m))} \right) \mathbf{E} [h(S_{\nu_{n_m}} + g(\nu_{n_m})); T_g > \nu_{n_m}, \nu_{n_m} \leq n_{m-1}] \\ & \leq \left(1 + \frac{h(g(n_m))}{h(c(\varepsilon_{n_m} n_m))} \right) \mathbf{E} [h(S_{n_{m-1}} + g(n_{m-1})); T_g > n_{m-1}]. \end{aligned}$$

В результате приходим к оценке

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} [h(S_{n_m} + g(n_m)); T_g > n_m] \\ & \leq \left(1 + \frac{h(g(n_m))}{h(c(\varepsilon_{n_m} n_m))} \right) \mathbf{E} [h(S_{n_{m-1}} + g(n_{m-1})); T_g > n_{m-1}] \\ & \quad + \frac{h(c(\varepsilon_{n_m} n_m)) + 2h(g(n_m))}{n_m^3}. \end{aligned}$$

Повторяя эту процедуру m раз, мы получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} [h(S_{n_m} + g(n_m)); T_g > n_m] & \leq \prod_{j=1}^m \left(1 + \frac{h(g(n_j))}{h(c(\varepsilon_{n_j} n_j))} \right) \\ & \quad \times \left(\mathbf{E} [h(S_{n_0} + g(n_0)); T_g > n_0] + \sum_{j=1}^m \frac{h(c(\varepsilon_{n_j} n_j)) + 2h(g(n_j))}{n_j^3} \right). \end{aligned}$$

Теперь заметим, что из (20) следует, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{h(g(n_j))}{h(c(\varepsilon_{n_j} n_j))} < \infty.$$

Таким образом, произведение

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{h(g(n_j))}{h(c(\varepsilon_{n_j} n_j))} \right)$$

конечно. Далее, так как показатель правильного изменения функции h равен $\alpha(1 - \rho)$, мы заключаем, что

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{h(c(\varepsilon_{n_j} n_j)) + 2h(g(n_j))}{n_j^3} < \infty,$$

откуда немедленно следует утверждение предложения 3.

3.2. Вывод асимптотик. Для доказательства (11) нам понадобится следующий результат.

Лемма 3. Если $X \in \mathcal{D}(\alpha, \rho)$, то

$$\mathbf{P}(T_x > n) \sim h(x)n^{\rho-1}L(n) \quad (29)$$

равномерно по x таким, что $x/c(n) \rightarrow 0$. Кроме того, следующая оценка верна для всех $x \geq 0$:

$$\mathbf{P}(T_x > n) \leq Ch(x)n^{\rho-1}L(n). \quad (30)$$

Доказательство. Утверждение (29) есть следствие 3 из [5].

Обозначим

$$\sigma(x) := \min \left\{ k \geq 1: \sum_{i=1}^k \chi_i > x \right\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T_x > n) &\leq \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{\sigma(x)} \tau_k > n\right) \leq \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{\sigma(x)} (\tau_k \wedge n) > n\right) \\ &\leq \frac{1}{n} \mathbf{E} \sum_{k=1}^{\sigma(x)} (\tau_k \wedge n) = \frac{1}{n} \mathbf{E} \sigma(x) \mathbf{E}(T_0 \wedge n), \end{aligned}$$

где последнее равенство справедливо в силу тождества Вальда. Так как хвост T_0 правильно меняется с показателем $\rho - 1 \in (0, 1)$, то по тауберовой теореме $\mathbf{E}(T_0 \wedge n) \sim \rho^{-1}n\mathbf{P}(\tau > n)$. Также заметим, что $h(x) = \mathbf{E} \sigma(x)$. Следовательно, при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(T_x > n) \leq (1 + o(1))h(x)\rho^{-1}\mathbf{P}(T_0 > n)$$

равномерно по x .

Согласно (20),

$$\int_x^{2x} \frac{h(g(y))}{yh(c(y/\ln y))} dy \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Так как функции $c(x)$, $h(x)$, $g(x)$ возрастают, а $h(x)$, $c(x)$ вдобавок правильно меняются, мы заключаем, что

$$\frac{h(g(x))}{h(c(x/\ln x))} \rightarrow 0.$$

Другими словами, $g(x) = o(c(x/\ln x))$. Следовательно, существует последовательность $\delta_n \rightarrow 0$ такая, что $g(n) = o(c(\delta_n n/\ln n))$. Более того, мы можем предполагать, что δ_n такова, что для медленно меняющихся функций L и l из $\mathbf{P}(\tau > n) \sim n^{\rho-1}L(n)$ и $h(x) = x^{\alpha(1-\rho)}l(x)$ верны соотношения $l(\delta_n n) \sim l(n)$ и $L(\delta_n n) \sim L(n)$.

Применяя лемму 2 с $\delta = \delta_n$ и $\varepsilon_n = C\delta_n/(2\ln n)$, мы получаем

$$\mathbf{P}(T_g > n) = \mathbf{P}(T_g > n, \nu_n \leq n\delta_n) + O(n^{-2}). \quad (31)$$

Это немедленно дает нам оценку сверху. В самом деле,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(T_g > n, \nu_n \leq n\delta_n) \\ & \leq \int_{c_n\delta_n}^{\infty} \mathbf{P}(T_g > \nu_n, S_{\nu_n} \in dy, \nu_n \leq n\delta_n) \mathbf{P}(\tilde{\tau}_{y+g(n)} > n - n\delta_n) \\ & \leq C \int_{c_n\delta_n}^{\infty} \mathbf{P}(T_g > \nu_n, S_{\nu_n} \in dy, \nu_n \leq n\delta_n) \\ & \quad \times h(y + g(n))(n - n\delta_n)^{\rho-1} L(n - n\delta_n), \end{aligned}$$

где мы применили (30) для вывода последнего неравенства. Теперь заметим, что

$$h(y + g(n)) \sim h(y) \quad \text{и} \quad (n - n\delta_n)^{\rho-1} L(n - n\delta_n) \sim n^{\rho-1} L(n)$$

равномерно по $y > c(\delta_n n/\ln n)$. Следовательно, для больших n мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T_g > n, \nu_n \leq n\delta_n) & \leq C \int_{\varepsilon c_n\delta_n}^{\infty} \mathbf{P}(T_g > \nu_n, S_{\nu_n} \in dy, \nu_n \leq n\delta_n) \\ & \quad \times h(y) \mathbf{P}(T_0 > n) \\ & \leq C \mathbf{E}[h(S_{\nu_n}); T_g > \nu_n, \nu_n \leq n\delta_n] \mathbf{P}(T_0 > n). \end{aligned}$$

По субмартингалльному свойству и предложению 3,

$$\mathbf{E}[h(S_{\nu_n}); T_g > \nu_n, \nu_n \leq n\delta_n] \leq \mathbf{E}[h(S_{n\delta_n}); T_g > n\delta_n] \leq V(g). \quad (32)$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(T_g > n, \nu_n \leq n\delta_n) \leq CV(g) \mathbf{P}(T_0 > n).$$

Комбинируя это с (31), мы получаем

$$\mathbf{P}(T_g > n) \leq CV(g) \mathbf{P}(T_0 > n). \quad (33)$$

Далее мы улучшим оценку (33) до точной асимптотики. Пусть последовательность $A_n \uparrow \infty$ такова, что $A_n c(\delta_n n / \ln n) = o(c(n))$. Положим для краткости $r_n := c(\delta_n n / \ln n)$. Разобьем вероятность $\mathbf{P}(T_g > n, \nu_n \leq \delta_n n)$ на две части:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T_g > n, \nu_n \leq \delta_n n) &= \mathbf{P}(T_g > n, \nu_n \leq \delta_n n, S_{\nu_n} \in (r_n, A_n r_n)) \\ &\quad + \mathbf{P}(T_g > n, \nu_n \leq \delta_n n, S_{\nu_n} > A_n r_n). \end{aligned} \quad (34)$$

К первому слагаемому мы применим (29). Имеем

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(T_g > n, \nu_n \leq \delta_n n, S_{\nu_n} \in (r_n, A_n r_n)) \\ &\leq \int_{r_n}^{A_n r_n} \mathbf{P}(T_g > \nu_n, S_{\nu_n} \in dy, \nu_n \leq n\delta_n) \mathbf{P}(\tilde{\tau}_{y+g(n)} > n - n\delta_n) \\ &\sim \int_{r_n}^{A_n r_n} \mathbf{P}(T_g > \nu_n, S_{\nu_n} \in dy, \nu_n \leq n\delta_n) h(y) \mathbf{P}(T_0 > n) \\ &\leq \mathbf{E}[h(S_{\nu_n}); T_g > \nu_n, \nu_n \leq n\delta_n] \mathbf{P}(T_0 > n) \\ &\leq V(g) \mathbf{P}(T_0 > n), \end{aligned} \quad (35)$$

где последнее неравенство справедливо в силу (32). Оценка снизу получается при помощи схожих рассуждений:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(T_g > n, \nu_n \leq \delta_n n, S_{\nu_n} \in (r_n, A_n r_n)) \\ &\geq \int_{r_n}^{A_n r_n} \mathbf{P}(T_g > \nu_n, S_{\nu_n} \in dy, \nu_n \leq n\delta_n) \mathbf{P}(\tilde{\tau}_y > n - n\delta_n) \\ &\sim \int_{r_n}^{A_n r_n} \mathbf{P}(T_g > \nu_n, S_{\nu_n} \in dy, \nu_n \leq n\delta_n) h(y) \mathbf{P}(T_0 > n) \\ &= \mathbf{E}[h(S_{\nu_n}); T_g > \nu_n, S_{\nu_n} < A_n r_n, \nu_n \leq n\delta_n] \mathbf{P}(T_0 > n). \end{aligned} \quad (36)$$

Теперь мы перейдем ко второму слагаемому в (34). Используя марковское свойство и (29), получаем

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(T_g > n, \nu_n \leq \delta_n n, S_{\nu_n} > A_n r_n, T_g > \nu_n) \\ &\leq C \mathbf{E}[h(S_{\nu_n}); S_{\nu_n} > A_n r_n, \nu_n \leq \delta_n n, T_g > \nu_n] \mathbf{P}(T_0 > n). \end{aligned}$$

Итак, нам осталось доказать, что

$$\mathbf{E}[h(S_{\nu_n}); S_{\nu_n} > A_n r_n, \nu_n \leq \delta_n n, T_g > \nu_n] \rightarrow 0. \quad (37)$$

Заметим, что $S_{\nu_n-1} \leq r_n$. Тогда на событии $\{S_{\nu_n} > A_n r_n\}$ имеем

$$X_{\nu_n} > (A_n - 1)r_n > \frac{A_n}{2} r_n > S_{\nu_n-1}.$$

Следовательно, $S_{\nu_n} = X_{\nu_n} + S_{\nu_n-1} \leq 2X_{\nu_n}$. Используя субаддитивность и монотонное возрастание h , мы получаем

$$h(S_{\nu_n}) \leq h(2X_{\nu_n}) \leq 2h(X_{\nu_n}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} E &:= \mathbf{E} [h(S_{\nu_n}); S_{\nu_n} > A_n r_n, \nu_n \leq \delta_n n, T_g > \nu_n] \\ &\leq 2 \mathbf{E} \left[h(X_{\nu_n}); X_{\nu_n} > \frac{A_n}{2} r_n, \nu_n \leq \delta_n n, T_g > \nu_n \right] \\ &\leq \sum_{k=1}^{\delta_n n} \mathbf{E} \left[h(X_k); X_k > \frac{A_n}{2} r_n, \nu_n = k, T_g > k \right] \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^{\delta_n n} \mathbf{P}(T_g \geq k) \mathbf{E} \left[h(X); X > \frac{A_n}{2} c_n \delta_n \right]. \end{aligned}$$

Применяя (33), мы получаем

$$\begin{aligned} E &\leq C \sum_{k=1}^{\delta_n n} \mathbf{P}(T_0 \geq k) \mathbf{E} \left[h(X); X > \frac{A_n}{2} r_n \right] \\ &\leq C \delta_n n \mathbf{P}(T_0 > \delta_n n) \mathbf{E} \left[h(X); X > \frac{A_n}{2} r_n \right]. \end{aligned}$$

Если $X \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$, то функция распределения $\theta(du) := u^2 \mathbf{P}(|X| \in du)$ правильно меняется с показателем $2 - \alpha$, т.е.

$$\Theta(x) := \theta((0, x)) = x^{2-\alpha} \ell(x).$$

Поэтому

$$\mathbf{E} \left[h(X); X > \frac{A_n}{2} r_n \right] \leq \int_{(A_n/2)r_n}^{\infty} \frac{h(x)}{x^2} \theta(dx) \leq C \frac{h(A_n r_n)}{(A_n r_n)^2} \Theta(A_n r_n).$$

Мы можем выбрать последовательность A_n такую, что

$$\frac{h(A_n r_n)}{(A_n r_n)^2} \Theta(A_n r_n) \sim \left(\frac{c(n)}{A_n r_n} \right)^{\alpha\rho} \frac{h(c(n))}{c^2(n)} \Theta(c(n)).$$

Тогда

$$E \leq C \delta_n^\rho n \mathbf{P}(T_0 > n) \left(\frac{c(n)}{A_n r_n} \right)^{\alpha\rho} \frac{h(c(n))}{c^2(n)} \Theta(c(n)).$$

Вспомним теперь, что

$$h(c_n) \mathbf{P}(T_0 > n) \rightarrow C_0, \quad n \frac{\Theta(c(n))}{c^2(n)} \rightarrow 1$$

для некоторой константы C_0 . Следовательно, при подходящем выборе последовательности A_n

$$E \leq C \delta_n^\rho \left(\frac{c(n)}{A_n r_n} \right)^{\alpha\rho} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Это завершает доказательство (37).

Замечая, что (37) влечет за собой соотношение

$$\mathbf{P}(T_g > n, \nu_n \leq \delta_n n, S_{\nu_n} > A_n r_n, T_g > \nu_n) = o(\mathbf{P}(T_0 > n)),$$

и принимая во внимание (35), мы получаем

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(T_g > n)}{\mathbf{P}(T_0 > n)} \leq V(g). \quad (38)$$

Комбинируя (36) и (37), находим, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(T_g > n)}{\mathbf{P}(T_0 > n)} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[h(S_{\nu_n}); T_g > \nu_n, \nu_n \leq n\delta_n]. \quad (39)$$

Из леммы 2 с $\delta = \delta_n$ и $\varepsilon_n = C\delta_n/(2 \ln n)$ вытекает, что

$$\mathbf{E}[h(S_{\delta_n n} + g(\delta_n n)); T_g > \delta_n n, \nu_n > n\delta_n] \leq h(c(n))\mathbf{P}(\nu_n > n\delta_n) \rightarrow 0.$$

Следовательно,

$$\mathbf{E}[h(S_{\nu_n}); T_g > \nu_n, \nu_n \leq n\delta_n] = \mathbf{E}[h(S_{\theta_n} + g(\theta_n)); T_g > \theta_n] + o(1),$$

где $\theta_n := \nu_n \wedge \delta_n n$. Применяя теорему об остановке субмартингала $h(S_n + g(n))1\{T_g > n\}$, мы получаем, что для каждого фиксированного N

$$\mathbf{E}[h(S_{\theta_n} + g(\theta_n)); T_g > \theta_n] \geq \mathbf{E}[h(S_{\theta_n \wedge N} + g(\theta_n \wedge N)); T_g > \theta_n \wedge N].$$

Заметим также, что

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{E}[h(S_{\theta_n \wedge N} + g(\theta_n \wedge N)); T_g > \theta_n \wedge N, \nu_n < N] \right. \\ & \quad \left. - \mathbf{E}[h(S_N + g(N)); T_g > N, \nu_n < N] \right| \\ & \leq \mathbf{E} \left[h \left(\max_{k < N} |S_k| + g(N) \right); \max_{k < N} |S_k| > c \left(\frac{\delta_n n}{\ln n} \right) \right] \rightarrow 0. \end{aligned}$$

В результате имеем

$$\mathbf{E}[h(S_{\theta_n} + g(\theta_n)); T_g > \theta_n] \geq \mathbf{E}[h(S_N + g(N)); T_g > N] + o(1)$$

и, следовательно,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[h(S_{\nu_n}); T_g > \nu_n, \nu_n \leq n\delta_n] \geq \mathbf{E}[h(S_N + g(N)); T_g > N].$$

Устремляя N к бесконечности, получаем

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[h(S_{\nu_n}); T_g > \nu_n, \nu_n \leq n\delta_n] \geq V(g).$$

Объединяя это с (38), мы завершаем доказательство теоремы 2.

4. Доказательство теоремы 3. Доказательство следует схеме доказательства теоремы 2.

4.1. Положительность $\hat{V}(g)$.

Лемма 4. Последовательность $Y_n = h(S_n - g(n))1\{\hat{T}_g > n\}$ является супермартингалом.

Доказательство. Ясно, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Y_{n+1} - Y_n | \mathcal{F}_n] &= \mathbf{E} \left[(h(S_{n+1} - g(n+1)) - h(S_n - g(n))) \right. \\ &\quad \left. \times 1\{\hat{T}_g > n\} | \mathcal{F}_n \right] \\ &\quad - \mathbf{E} \left[h(S_{n+1} - g(n+1))1\{\hat{T}_g = n+1\} | \mathcal{F}_n \right]. \end{aligned}$$

Заметим, что $h(S_{n+1} - g(n+1))1\{\hat{T}_g = n+1\} = 0$, так как $h(x) = 0$ для $x \leq 0$. Далее, в силу гармоничности h

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Y_{n+1} - Y_n | \mathcal{F}_n] &= \mathbf{E} \left[(h(S_{n+1} - g(n+1)))1\{\hat{T}_g > n\} | \mathcal{F}_n \right] - h(S_n - g(n))1\{\hat{T}_g > n\} \\ &= h(S_n - g(n+1))1\{\hat{T}_g > n\} - h(S_n - g(n))1\{\hat{T}_g > n\} \leq 0, \end{aligned}$$

так как h и g монотонно возрастают. Лемма 4 доказана.

По супермартингальному свойству предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[h(S_n - g(n)); \hat{T}_g > n]$ существует и конечен. Значит, достаточно показать, что этот предел положителен.

Предложение 4. Предположим, что g такова, что $g(0) > 0$ и выполняется условие (12). Тогда существует строго положительный конечный предел

$$\hat{V}(g) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[h(S(n) - g(n)); \hat{T}_g > n \right].$$

Доказательство. Так как $h(S(n) - g(n))1\{\hat{T}_g > n\}$ есть супермартингал, достаточно показать, что

$$\inf_n \mathbf{E} \left[h(S(n) - g(n)); \hat{T}_g > n \right] > 0.$$

Зафиксируем $n_0 > 1$ и положим

$$n_m = n_0 \left[\left(\frac{1}{\delta} \right)^m \right], \quad m \geq 1$$

(здесь $[r]$ обозначает целую часть r). Так как $\mathbf{E}[h(S_n - g(n)); \hat{T}_g > n]$ убывает, достаточно показать, что $\inf_m \mathbf{E}[h(S_{n_m} - g(n_m)); \hat{T}_g > n_m] > 0$.

Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[h(S_{n_m} - g(n_m)); \hat{T}_g > n_m \right] &\geq E_1 \\ &:= \mathbf{E} \left[h(S_{n_m} - g(n_m)); \hat{T}_g > n_m, \nu_{n_m} \leq n_{m-1} \right]. \end{aligned}$$

Для фиксированного n положим

$$\tilde{\tau}(g(n)) := \min\{k \geq 1: S_k - g(n) \leq 0\}.$$

Тогда

$$E_1 = \mathbf{E} \left[\mathbf{E} \left[h(S_{n_m} - g(n_m)) 1\{\hat{T}_g > n_m\} \mid \mathcal{F}_{\nu_{n_m}} \right], \nu_{n_m} \leq n_{m-1} \right].$$

Используя гармоничность h , получаем

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[h(S_{n_m} - g(n_m)) 1\{\hat{T}_g > n_m\} \mid \mathcal{F}_{\nu_{n_m}} \right] \\ & \geq \mathbf{E}_{S_{\nu_{n_m}}} \left[h(S_{n_m - \nu_{n_m}} - g(n_m)) 1\{\tilde{\tau}(g(n_m)) > n_m - \nu_{n_m}\} \right] 1\{\hat{T}_g > \nu_{n_m}\} \\ & \geq h(S_{\nu_{n_m}} - g(n_m)) 1\{\hat{T}_g > \nu_{n_m}\} \\ & \geq (h(S_{\nu_{n_m}} - g(\nu_{n_m})) - h(g(n_m))) 1\{\hat{T}_g > \nu_{n_m}\} \end{aligned}$$

(в последнем неравенстве мы воспользовались субаддитивностью h). Теперь, так как $S_{\nu_n} \geq c(\varepsilon_n n)$, мы имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[h(S_{n_m} - g(n_m)) 1\{\hat{T}_g > n_m\} \mid \mathcal{F}_{\nu_{n_m}} \right] \\ & \geq h(S_{\nu_{n_m}} - g(\nu_{n_m})) \left(1 - \frac{h(g(n_m))}{h(c(\varepsilon_{n_m} n_m))} \right) 1\{\hat{T}_g > \nu_{n_m}\}. \end{aligned}$$

Следовательно, используя последнее неравенство и субмартингальное свойство, получаем

$$\begin{aligned} E_1 & \geq \left(1 - \frac{h(g(n_m))}{h(c(\varepsilon_{n_m} n_m))} \right) \mathbf{E} \left[h(S_{\nu_{n_m}} - g(\nu_{n_m})); \hat{T}_g > \nu_{n_m}, \nu_{n_m} \leq n_{m-1} \right] \\ & \geq \left(1 - \frac{h(g(n_m))}{h(c(\varepsilon_{n_m} n_m))} \right) \mathbf{E} \left[h(S_{n_{m-1}} - g(n_{m-1})); \hat{T}_g > n_{m-1}, \nu_{n_m} \leq n_{m-1} \right] \\ & \geq \left(1 - \frac{h(g(n_m))}{h(c(\varepsilon_{n_m} n_m))} \right) \mathbf{E} \left[h(S_{n_{m-1}} - g(n_{m-1})); \hat{T}_g > n_{m-1} \right] \\ & \quad - \mathbf{E} \left[h(S_{n_{m-1}} - g(n_{m-1})); \hat{T}_g > n_{m-1}, \nu_{n_m} > n_{m-1} \right]. \end{aligned}$$

Теперь заметим, что

$$\begin{aligned} E_2 & := \mathbf{E} \left[h(S_{n_{m-1}} - g(n_{m-1})); \hat{T}_g > n_{m-1}, \nu_{n_m} > n_{m-1} \right] \\ & \leq \mathbf{E} \left[h(c(\varepsilon_{n_m} n_m)); \nu_{n_m} > n_{m-1} \right] \\ & \leq h(c(\varepsilon_{n_m} n_m)) \mathbf{P}(\nu_{n_m} > n_{m-1}). \end{aligned}$$

Применяя лемму 10 с $\varepsilon_n := (3\delta C \ln n)^{-1}$, получаем

$$E_2 \leq h(c(\varepsilon_{n_m} n_m)) n_m^{-3}.$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[h(S_{n_m} - g(n_m)); \hat{T}_g > n_m \right] \\ \geq \left(1 - \frac{h(g(n_m))}{h(c(\varepsilon_{n_m} n_m))} \right) \mathbf{E} \left[h(S_{n_{m-1}} - g(n_{m-1})); \hat{T}_g > n_{m-1} \right] \\ - \frac{h(c(\varepsilon_{n_m} n_m))}{n_m^3}. \end{aligned}$$

Повторяя эту процедуру m раз, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[h(S_{n_m} - g(n_m)); \hat{T}_g > n_m \right] \geq \prod_{j=1}^m \left(1 - \frac{h(g(n_j))}{h(c(\varepsilon_{n_j} n_j))} \right) \\ \times \left(\mathbf{E} \left[h(S_{n_0} + g(n_0)); \hat{T}_g > n_0 \right] - \sum_{j=1}^m \frac{h(c(\varepsilon_{n_j} n_j))}{n_j^3} \right). \end{aligned}$$

Заметим, что (20) влечет за собой соотношение

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{h(g(n_j))}{h(c(\varepsilon_{n_j} n_j))} < \infty.$$

Поэтому произведение

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{h(g(n_j))}{h(c(\varepsilon_{n_j} n_j))} \right)$$

конечно. Далее, вспоминая, что показатель правильного изменения h равен $\alpha(1 - \rho)$, мы заключаем, что

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{h(c(\varepsilon_{n_j} n_j))}{n_j^3} < \infty.$$

Предложение 4 доказано.

4.2. Вывод асимптотик. Для $\hat{T}_g$ верхняя оценка очевидна:

$$\mathbf{P}(\hat{T}_g > n) \leq \mathbf{P}(T_0 > n). \quad (40)$$

Пусть δ_n и A_n — такие, как в доказательстве теоремы 2. Аналогично (31) и (34) имеем

$$\mathbf{P}(\hat{T}_g > n) = \mathbf{P}(\hat{T}_g > n, \nu_n \leq n\delta_n) + O(n^{-2}), \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\hat{T}_g > n, \nu_n \leq \delta_n n) &= \mathbf{P}(\hat{T}_g > n, \nu_n \leq \delta_n n, S_{\nu_n} \in (r_n, A_n r_n)) \\ &+ \mathbf{P}(\hat{T}_g > n, \nu_n \leq \delta_n n, S_{\nu_n} > A_n r_n). \end{aligned} \quad (42)$$

К первому слагаемому мы применим (29). Имеем

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}(\widehat{T}_g > n, \nu_n \leq \delta_n n, S_{\nu_n} \in (r_n, A_n r_n)) \\
 & \leq \int_{r_n}^{A_n r_n} \mathbf{P}(\widehat{T}_g > \nu_n, S_{\nu_n} \in dy, \nu_n \leq n\delta_n) \mathbf{P}(\tilde{\tau}_y > n - n\delta_n) \\
 & \sim \int_{r_n}^{A_n r_n} \mathbf{P}(\widehat{T}_g > \nu_n, S_{\nu_n} \in dy, \nu_n \leq n\delta_n) h(y) \mathbf{P}\{T_0 > n\} \\
 & \leq \mathbf{E}[h(S_{\nu_n}); \widehat{T}_g > \nu_n] \mathbf{P}(T_0 > n) \\
 & \sim \widehat{V}(g) \mathbf{P}(T_0 > n).
 \end{aligned} \tag{43}$$

Оценка снизу выводится с помощью схожих рассуждений:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}(\widehat{T}_g > n, \nu_n \leq \delta_n n, S_{\nu_n} \in (r_n, A_n r_n)) \\
 & \geq \int_{r_n}^{A_n r_n} \mathbf{P}(\widehat{T}_g > \nu_n, S_{\nu_n} \in dy, \nu_n \leq n\delta_n) \mathbf{P}(\tilde{\tau}_{y-g(n)} > n - n\delta_n) \\
 & \sim \int_{r_n}^{A_n r_n} \mathbf{P}(\widehat{T}_g > \nu_n, S_{\nu_n} \in dy, \nu_n \leq n\delta_n) h(y) \mathbf{P}(T_0 > n) \\
 & = \mathbf{E}[h(S_{\nu_n}); \widehat{T}_g > \nu_n, S_{\nu_n} < A_n r_n, \nu_n \leq n\delta_n] \mathbf{P}(T_0 > n).
 \end{aligned} \tag{44}$$

Перейдем теперь ко второму слагаемому в (42). Используя марковское свойство и (29), получаем

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}(\widehat{T}_g > n, \nu_n \leq \delta_n n, S_{\nu_n} > A_n r_n, \widehat{T}_g > \nu_n) \\
 & \leq C \mathbf{E}[h(S_{\nu_n}); S_{\nu_n} > A_n r_n, \nu_n \leq \delta_n n, \widehat{T}_g > \nu_n] \mathbf{P}(T_0 > n).
 \end{aligned}$$

Нам осталось доказать, что

$$\mathbf{E}[h(S_{\nu_n}); S_{\nu_n} > A_n r_n, \nu_n \leq \delta_n n, \widehat{T}_g > \nu_n] \rightarrow 0. \tag{45}$$

Но это немедленно следует из (37), поскольку $\widehat{T}_g \leq T_g$.

Заметив, что (45) влечет за собой соотношение

$$\mathbf{P}(\widehat{T}_g > n, \nu_n \leq \delta_n n, S_{\nu_n} > A_n r_n, \widehat{T}_g > \nu_n) = o(\mathbf{P}(T_0 > n)).$$

и принимая во внимание (43), приходим к неравенству

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(\widehat{T}_g > n)}{\mathbf{P}(T_0 > n)} \leq \widehat{V}(g). \tag{46}$$

Комбинируя (44) и (45), получаем

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(\widehat{T}_g > n)}{\mathbf{P}(T_0 > n)} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[h(S_{\nu_n}); \widehat{T}_g > \nu_n, \nu_n \leq n\delta_n]. \tag{47}$$

Из леммы 2 с $\delta = \delta_n$ и $\varepsilon_n = C\delta_n/(2 \ln n)$ вытекает, что

$$\mathbf{E} \left[h(S_{\delta_n n} - g(\delta_n n)); \hat{T}_g > \delta_n n, \nu_n > n\delta_n \right] \leq h(c(n)) \mathbf{P}(\nu_n > n\delta_n) \rightarrow 0.$$

Следовательно,

$$\mathbf{E} [h(S_{\nu_n}); \hat{T}_g > \nu_n, \nu_n \leq n\delta_n] = \mathbf{E} [h(S_{\theta_n} - g(\theta_n)); \hat{T}_g > \theta_n] + o(1),$$

где $\theta_n := \nu_n \wedge \delta_n n$. Применяя теорему об остановке супермартингала $h(S_n - g(n))1_{\{\hat{T}_g > n\}}$, получаем

$$\mathbf{E} [h(S_{\theta_n} - g(\theta_n)); \hat{T}_g > \theta_n] \geq \hat{V}(g).$$

Комбинируя это с (46), мы завершаем доказательство теоремы 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Afanasyev V. I., Geiger J., Kersting G., Vatutin V. A. Criticality for branching processes in random environment. — Ann. Probab., 2005, v. 33, № 2, p. 645–673.
2. Aurzada F., Kramm T. The first passage time problem over a moving boundary for asymptotically stable Lévy processes, arXiv:1305.1203.
3. Aurzada F., Kramm T., Savov M. First passage times of Lévy processes over a one-sided moving boundary, arXiv:1201.1118.
4. Denisov D., Wachtel V. Random walks in cones. — Ann. Probab., 2015, v. 43, № 3, p. 992–1044; arXiv:1110.1254.
5. Doney R. A. Local behaviour of first passage probabilities. — Probab. Theory Relat. Fields, 2012, v. 152, № 3–4, p. 559–588.
6. Erickson K. B. The strong law of large numbers when the mean is undefined. — Trans. Amer. Math. Soc., 1973, v. 185, p. 371–381.
7. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
8. Greenwood P. E., Monroe I. Random stopping preserves regular variation of process distributions. — Ann. Probab., 1977, v. 5, № 1, p. 42–51.
9. Greenwood P. E., Novikov A. A. One-sided boundary crossing for processes with independent increments. — Теория вероятн. и ее примен., 1986, т. 31, в. 2, с. 221–232.
10. Hambly B. M., Kersting G., Kyprianou A. E. Law of the iterated logarithm for oscillating random walks conditioned to stay non-negative. — Stochastic Process. Appl., 2003, v. 108, № 2, p. 327–343.
11. Мозульский А. А. Печерский Е. А. О времени первого попадания в область с криволинейной границей. — Сиб. матем. журн., 1978, т. 19, № 4, с. 824–841.
12. Новиков А. А. Мартингальный подход в задачах о времени первого пересечения нелинейных границ. — Тр. МИАН, 1981, т. 158, с. 130–152.
13. Новиков А. А. О времени пересечения односторонней нелинейной границы суммами независимых величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1982, т. 27, в. 4, с. 643–656.
14. Uchiyama K. Brownian first exit from and sojourn over one-sided moving boundary and application. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1980, v. 54, p. 75–116.

Поступила в редакцию
03.VI.2014