Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Назаров, Ю. П. Петрова, Асимптотика малых уклонений в гильбертовой норме для процессов Каца–Кифера–Вольфовица, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2015, том 60, выпуск 3, 482–505

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4634>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 16:27:13

© 2015 г.

НАЗАРОВ А. И.*, ПЕТРОВА Ю. П.**

АСИМПТОТИКА МАЛЫХ УКЛОНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОЙ НОРМЕ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ КАЦА–КИФЕРА–ВОЛЬФОВИЦА¹⁾

Изучается задача о малых уклонениях в норме L_2 для некоторых гауссовских процессов, возникающих в математической статистике. Задача сводится к нахождению спектральных асимптотик интегро-дифференциальных операторов специального вида. Для этого строятся полные асимптотические разложения некоторых осциллирующих интегралов с медленно меняющейся амплитудой.

Ключевые слова и фразы: малые уклонения, гауссовские процессы, спектральные асимптотики, медленно меняющиеся функции.

1. Введение. Теория малых уклонений для норм гауссовских процессов интенсивно развивается в последние десятилетия (см., например, обзоры [1], [2]; более поздние ссылки можно найти на сайте [3]). Наиболее разработанным здесь является случай L_2 -нормы. Пусть $X(t)$, $0 \leq t \leq 1$, — гауссовский процесс с нулевым средним и ковариацией $\mathcal{G}(t, s) = \mathbf{E} X(t)X(s)$, $t, s \in [0, 1]$. Положим

$$\|X\| = \left(\int_0^1 X^2(t) dt \right)^{1/2}.$$

Нас интересует точная асимптотика при $\varepsilon \rightarrow 0$ величины $\mathbf{P}\{\|X\| < \varepsilon\}$. Неявное решение задачи было получено в [4]. Затем многие авторы, начиная с [5], [6], [7], занимались упрощением выражения для вероятности малых уклонений при различных предположениях.

В силу разложения Кархунена–Лозва имеет место равенство по распределению

$$\|X\|^2 \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k^2,$$

*ПОМИ РАН и Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия; e-mail: al.il.nazarov@gmail.com

¹⁾ Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-01-00172) и СПбГУ (грант № 6.38.670.2013). Работа второго автора выполнена при поддержке СПбГУ (грант № 6.38.670.2013).

где ξ_k , $k \in \mathbf{N}$, — независимые стандартные гауссовские случайные величины (с.в.), а $\lambda_k > 0$ ($k \in \mathbf{N}$, $\sum \lambda_k < \infty$) являются собственными значениями интегрального оператора с ядром $\mathcal{G}(s, t)$. Таким образом, исходная задача сводится к описанию поведения при $\varepsilon \rightarrow 0$ вероятности $\mathbf{P}\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k^2 \leq \varepsilon^2\}$. Основная трудность заключается в том, что явные формулы для собственных значений известны лишь для немногих процессов (см. [8], [9]). Если же известна достаточно точная асимптотика λ_k , то асимптотика вероятности малых уклонений с точностью до константы может быть получена с помощью принципа сравнения Венбо Ли.

Предложение 1 (см. [8], [10]). Пусть ξ_k — последовательность независимых стандартных гауссовских с.в., а λ_k и $\tilde{\lambda}_k$ — две положительные невозрастающие суммируемые последовательности такие, что $\prod \tilde{\lambda}_k / \lambda_k < \infty$. Тогда

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k^2 < \varepsilon^2\right\} \sim \mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\lambda}_k \xi_k^2 < \varepsilon^2\right\} \cdot \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\lambda}_k}{\lambda_k}\right)^{1/2}, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1)$$

В работах [11], [12] был выделен класс *гриновских* гауссовских процессов, для которых $\mathcal{G}(s, t)$ есть функция Грина обыкновенного дифференциального оператора (ОДО). Это позволяет применить для нахождения асимптотики λ_k методы спектральной теории ОДО, восходящие к классическим работам Дж. Биркгофа [13], [14] и Я. Д. Тамаркина [15], [16] (дальнейшее развитие этой теории можно найти в [17]).

Подход, развитый в [11], [12], позволил получить в [18], [19] и [20] точные асимптотики малых уклонений для большого количества конкретных процессов в L_2 -норме с различными весами (см. также [21], [22], [23]).

В работе [24] рассматривалась задача о возмущении спектра ковариационного оператора при конечномерном возмущении гауссовского процесса. Было показано, что если возмущение не является «критическим», то собственные числа $\tilde{\lambda}_k$ возмущенного оператора асимптотически прижимаются к невозмущенным собственным числам, причем $\prod \tilde{\lambda}_k / \lambda_k < \infty$. Для более узкого класса операторов аналогичный результат был получен в [25].

Мы будем рассматривать задачу о малых уклонениях в $L_2[0, 1]$ для гауссовских процессов $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}$ с нулевым средним, ковариационные функции которых имеют вид

$$G_1(s, t) = G(s, t) - h_1(s)h_1(t), \quad (2)$$

$$G_2(s, t) = G(s, t) - h_2(s)h_2(t), \quad (3)$$

$$G_3(s, t) = G(s, t) - h_1(s)h_1(t) - h_2(s)h_2(t). \quad (4)$$

Здесь $G(s, t) = \min(s, t) - st$ есть функция Грина краевой задачи

$$\mathcal{L}u := -u'' = \lambda u, \quad u(0) = u(1) = 0,$$

и

$$h_1(t) = \varphi(\Phi^{-1}(t)), \quad h_2(t) = \varphi(\Phi^{-1}(t)) \frac{\Phi^{-1}(t)}{\sqrt{2}},$$

где

$$\varphi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right), \quad \Phi(t) = \int_{-\infty}^t \varphi(s) ds$$

— плотность и функция распределения стандартного нормального закона соответственно.

Процессы $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}$ возникают как предельные в задаче о построении критериев согласия типа ω^2 для проверки выборки на нормальность в случае, когда математическое ожидание и/или дисперсия оцениваются по выборке. В работе М. Каца, Дж. Кифера и Дж. Вольфовица [26] доказана сходимость эмпирических процессов с оцененными параметрами к предельным в смысле конечномерных распределений. Аналогичные результаты были независимо получены И. И. Гихманом [27], [28]. Впоследствии в статье Дж. Дурбина [29] была строго доказана слабая сходимость к предельному процессу, а также описаны предельные процессы для значительно более широкого класса эмпирических процессов.

Как известно, собственные функции и собственные числа интегрального оператора с ядром $G(s, t)$ имеют вид

$$y_k(t) = \sin(\pi kt), \quad \lambda_k = (\pi k)^{-2}.$$

Пусть $\lambda_k^{(i)}$ — собственные числа интегральных операторов с ядрами $G_i(s, t)$, $i = 1, 2, 3$; $k \in \mathbf{N}$. В случаях (2) и (3) имеется одномерное возмущение оператора с ядром $G(s, t)$, поэтому согласно минимаксимальному принципу [30, § 9.2] собственные числа возмущенного и невозмущенного операторов перемежаются. Заметим, что оба возмущения h_1 и h_2 являются «критическими» (в терминах нашей задачи это означает, что $\int h_i(t)(\mathcal{L}h_i)(t) dt = 1$, $i = 1, 2$). Поэтому соотношение $\prod \lambda_k^{(i)} / \lambda_k < \infty$ не имеет места. Более того, поскольку $\mathcal{L}h_i \notin L_2[0, 1]$, результат теоремы 2 из статьи [24] также не применим. Мы построим асимптотику собственных чисел возмущенных операторов (2)–(4), используя явные формулы для определителей Фредгольма, полученные в [26] и [24]. Таким образом можно построить разложение $\lambda_k^{(i)}$ в асимптотический ряд, но мы ограничимся построением такого приближения $\tilde{\lambda}_k^{(i)}$, для которого $\prod \tilde{\lambda}_k^{(i)} / \lambda_k^{(i)} < \infty$.

Заметим, что функция $h_1(t)$ четна относительно точки $t = 1/2$. Поэтому при возмущении (2) нечетные относительно точки $t = 1/2$ собственные функции и соответствующие им собственные числа не меняются. Для простоты мы будем обозначать их $\lambda_{2k}^{(1)} = \lambda_{2k}$, $k \in \mathbf{N}$, не смотря на то, что при этом нумерация в порядке убывания может быть

нарушена. Аналогично в силу нечетности функции $h_2(t)$ относительно точки $t = 1/2$ при возмущении (3) четные относительно точки $t = 1/2$ собственные функции и соответствующие им собственные числа не меняются, будем обозначать их $\lambda_{2k-1}^{(2)} = \lambda_{2k-1}$, $k \in \mathbf{N}$. Кроме того, легко видеть, что $\lambda_{2k}^{(3)} = \lambda_{2k}^{(1)}$ и $\lambda_{2k-1}^{(3)} = \lambda_{2k-1}^{(2)}$. Отметим еще, что квадратичная форма возмущенных операторов (2)–(4) не превосходит квадратичной формы исходного оператора. Поэтому в силу минимаксимального принципа $\lambda_{2k-1}^{(1)} \leq \lambda_{2k-1}$ и $\lambda_{2k}^{(2)} \leq \lambda_{2k}$.

В статье [26] выписаны уравнения для собственных чисел интегрального оператора с ядром $G_3(s, t)$ (см. также [24, пример 5]). После некоторых преобразований этих уравнений получаем, что

$$\omega_{2k-1}^{(1)} := \left(\lambda_{2k-1}^{(1)} \right)^{-1/2}, \quad \omega_{2k}^{(2)} := \left(\lambda_{2k}^{(2)} \right)^{-1/2}$$

являются корнями уравнений

$$D_1(\omega) := \frac{2 \sin(\omega/2)}{\omega} \mathcal{C}_1^2(\omega) + \frac{\cos(\omega/2)}{\omega^2} - \frac{4 \cos(\omega/2)}{\omega} \mathcal{J}_1(\omega) = 0, \quad (5)$$

$$D_2(\omega) := -\frac{\cos(\omega/2)}{\omega} \mathcal{C}_2^2(\omega) + \frac{3 \sin(\omega/2)}{2\omega^2} - \frac{2 \sin(\omega/2)}{\omega} \mathcal{J}_2(\omega) = 0, \quad (6)$$

соответственно, где

$$\mathcal{C}_1(\omega) = \int_0^{1/2} \Phi^{-1}(t) \cos(\omega t) dt, \quad \mathcal{C}_2(\omega) = \int_0^{1/2} (\Phi^{-1}(t))^2 \cos(\omega t) dt,$$

$$\mathcal{J}_1(\omega) = \int_0^{1/2} \int_0^t \Phi^{-1}(t) \Phi^{-1}(s) \sin(\omega t) \cos(\omega s) ds dt,$$

$$\mathcal{J}_2(\omega) = \int_0^{1/2} \int_0^t (\Phi^{-1}(t))^2 (\Phi^{-1}(s))^2 \sin(\omega t) \cos(\omega s) ds dt.$$

Статья организована следующим образом. В § 2 вычисляются асимптотики интегралов с медленно меняющимися функциями (см. определение в Приложении), частным случаем которых являются интегралы $\mathcal{C}_1(\omega)$, $\mathcal{C}_2(\omega)$, $\mathcal{J}_1(\omega)$ и $\mathcal{J}_2(\omega)$. Для этих интегралов строится полное асимптотическое разложение с оценкой остатка. В § 3 получены асимптотические уравнения для корней $\omega_{2k-1}^{(1)}$ и $\omega_{2k}^{(2)}$ и найдена их асимптотика (формулы (24) и (25)). В §§ 4 и 5 полученные результаты применяются к задаче о малых уклонениях для процессов $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $X^{(3)}$ (формулы (29), (35) и (36)). В Приложение вынесено доказательство вспомогательной леммы об определителях Фредгольма, а также некоторых свойств $\Phi^{-1}(t)$.

Все положительные константы, значения которых нам не важны, обозначаются буквой C , а величины, от которых эти константы зависят, указываются в скобках.

2. Асимптотика интегралов с медленно меняющейся амплитудой. Пусть функция $F(t)$ задана на полуинтервале $(0, 1/2]$, $F(1/2) = 0$, и функции $F_0(t) = F(t)$, $F_{n+1}(t) = tF'_n(t)$, $n \geq 0$, являются медленно меняющимися в нуле. Введем обозначение:

$$\int_{S_N(x_1)} F_M d\mu_N := \int_1^{x_1} \cdots \int_1^{x_N} F_M \left(\frac{x_{N+1}}{\omega} \right) \frac{dx_{N+1}}{x_{N+1}} \cdots \frac{dx_2}{x_2},$$

$$N \geq 1, M \geq 0.$$

Теорема 1. При $\omega \rightarrow \infty$ имеет место формула

$$\mathcal{C}(\omega) := \int_0^{1/2} F(t) \cos(\omega t) dt = \sum_{k=1}^N c_k^{\cos} \frac{F_k(1/\omega)}{\omega} + R_N^{\cos}, \quad (7)$$

где

$$c_k^{\cos} = - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \frac{\ln^{k-1} x}{(k-1)!} dx, \quad k \geq 1,$$

$$R_N^{\cos} = - \int_0^{\omega/2} \frac{\sin x_1}{x_1} \int_{S_N(x_1)} F_{N+1} d\mu_N \frac{dx_1}{\omega} + O\left(\frac{L_N(\omega)}{\omega^2}\right), \quad (8)$$

а $L_N(\omega)$ — некоторая медленно меняющаяся функция при $\omega \rightarrow \infty$. Более того, верна оценка:

$$|R_N^{\cos}| \leq C(F, N) \frac{|F_{N+1}(1/\omega)|}{\omega}. \quad (9)$$

Доказательство. Интегрируя по частям, получим

$$\int_0^{1/2} F(t) \cos(\omega t) dt = - \int_0^{\omega/2} F_1\left(\frac{x}{\omega}\right) \frac{\sin x}{x} \frac{dx}{\omega}.$$

В дальнейшем нам понадобится следующая формула представления функции F_M :

$$F_M\left(\frac{x}{\omega}\right) = F_M\left(\frac{1}{\omega}\right) + \int_1^x F_{M+1}\left(\frac{y}{\omega}\right) \frac{dy}{y} \quad \forall M \geq 0. \quad (10)$$

Воспользуемся формулой (10) при $M = 1$, получим

$$\mathcal{C}(\omega) = - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx \cdot \frac{F_1(1/\omega)}{\omega} - \frac{1}{\omega} \underbrace{\int_0^{\omega/2} \int_1^x F_2\left(\frac{y}{\omega}\right) \frac{dy}{y} \frac{\sin x}{x} dx}_{=R_1} + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right),$$

что дает (7) для $N = 1$. Интегрируя по частям R_1 , получим

$$R_1 = \frac{1 - \cos x}{x} \int_1^x F_2\left(\frac{y}{\omega}\right) \frac{dy}{y} \Big|_{x=0}^{x=\omega/2} - \int_0^{\omega/2} \frac{1 - \cos x}{x^2} F_2\left(\frac{x}{\omega}\right) dx \quad (11)$$

$$+ \int_0^{\omega/2} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \int_1^x F_2\left(\frac{y}{\omega}\right) \frac{dy}{y} dx.$$

Для оценки возникающих интегралов нам понадобится следующее утверждение.

Предложение 2 (см. [31, гл. 1, с. 18]). Пусть $\mathbf{F}(t) > 0$ — медленно меняющаяся функция в нуле, тогда для любого $\alpha > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\mathbf{F}(t)t^\alpha$ — возрастающая функция, а $\mathbf{F}(t)t^{-\alpha}$ — убывающая функция в ε -окрестности нуля.

Пусть $\alpha > 0$, и ε таково, что верно предложение 2. Тогда при больших ω ($1/\omega < \varepsilon$) имеем оценки

$$\left| \mathbf{F}\left(\frac{y}{\omega}\right) \right| \left(\frac{y}{\omega} \right)^\alpha \leq \left| \mathbf{F}\left(\frac{1}{\omega}\right) \right| \omega^{-\alpha} \quad \text{при } y \in (0, 1], \quad (12)$$

$$\left| \mathbf{F}\left(\frac{y}{\omega}\right) \right| \left(\frac{\omega}{y} \right)^\alpha \leq \left| \mathbf{F}\left(\frac{1}{\omega}\right) \right| \omega^\alpha \quad \text{при } y \in (1, \varepsilon\omega]. \quad (13)$$

Наконец, учитывая (13) и непрерывность $\mathbf{F}$, получаем

$$\left| \mathbf{F}\left(\frac{y}{\omega}\right) \right| \left(\frac{\omega}{y} \right)^\alpha \leq C(\alpha, F) \left| \mathbf{F}\left(\frac{\varepsilon\omega}{\omega}\right) \right| \left(\frac{\omega}{\varepsilon\omega} \right)^\alpha$$

$$\leq C(\alpha, F) \left| \mathbf{F}\left(\frac{1}{\omega}\right) \right| \omega^\alpha \quad \text{при } y \in \left[\varepsilon\omega, \frac{\omega}{2} \right]. \quad (14)$$

Оценим $\int_1^x F_2(y/\omega) y^{-1} dy$. При $x \in (0, 1]$, используя оценку (12) для $\mathbf{F} = F_2$, получаем

$$\left| \int_1^x F_2\left(\frac{y}{\omega}\right) \frac{dy}{y} \right| \leq \omega^\alpha \int_1^x \left| F_2\left(\frac{y}{\omega}\right) \right| \left(\frac{y}{\omega} \right)^\alpha \frac{dy}{y^{1+\alpha}} \leq \left| F_2\left(\frac{1}{\omega}\right) \right| \frac{|x^{-\alpha} - 1|}{\alpha}. \quad (15)$$

При $x \in [1, \omega/2]$, используя оценки (13) и (14), имеем

$$\left| \int_1^x F_2\left(\frac{y}{\omega}\right) \frac{dy}{y} \right| \leq \omega^{-\alpha} \int_1^x \left| F_2\left(\frac{y}{\omega}\right) \right| \left(\frac{\omega}{y} \right)^\alpha \frac{dy}{y^{1-\alpha}}$$

$$\leq C(\alpha, F) \left| F_2\left(\frac{1}{\omega}\right) \right| \frac{|x^\alpha - 1|}{\alpha}. \quad (16)$$

Подставляя оценки (15) и (16) при $\alpha = 1/2$ в выражение (11) для R_1 , получим оценку (9) при $N = 1$. При $N > 1$ действуем по индукции: подставляем (10) с $M = N$ в (8) и оцениваем остаток с помощью предложения 2. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. При $\omega \rightarrow \infty$ имеет место формула

$$\mathcal{S}(\omega) := \int_0^{1/2} F(t) \sin(\omega t) dt = \frac{F(1/\omega)}{\omega} + \sum_{k=1}^N c_k^{\sin} \frac{F_k(1/\omega)}{\omega} + R_N^{\sin},$$

где

$$\begin{aligned} c_k^{\sin} &= - \int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x} \frac{\ln^{k-1} x}{(k-1)!} dx + \int_1^\infty \frac{\cos x}{x} \frac{\ln^{k-1} x}{(k-1)!} dx, \quad k \geq 1, \\ R_N^{\sin} &= - \int_0^1 \frac{1 - \cos(x_1)}{x_1} \int_{S_N(x_1)} F_{N+1} d\mu_N \frac{dx_1}{\omega} \\ &\quad + \int_1^{\omega/2} \frac{\cos x_1}{x_1} \int_{S_N(x_1)} F_{N+1} d\mu_N \frac{dx_1}{\omega} + O\left(\frac{L_N(\omega)}{\omega^2}\right), \end{aligned}$$

а $L_N(\omega)$ — некоторая медленно меняющаяся функция при $\omega \rightarrow \infty$.

Более того, справедлива оценка

$$|R_N^{\sin}| \leq C(F, N) \frac{|F_{N+1}(1/\omega)|}{\omega}.$$

Доказательство аналогично теореме 1.

З а м е ч а н и е 1. К интегралам $\mathcal{C}(\omega)$ и $\mathcal{S}(\omega)$ сводятся также интегралы

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \int_0^\tau F(t) F(\tau) \sin(\omega t) \sin(\omega \tau) dt d\tau &= \frac{\mathcal{S}^2(\omega)}{2}, \\ \int_0^{1/2} \int_0^\tau F(t) F(\tau) \cos(\omega t) \cos(\omega \tau) dt d\tau &= \frac{\mathcal{C}^2(\omega)}{2}. \end{aligned}$$

Теорема 3. При $\omega \rightarrow \infty$ имеет место формула:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\omega) &:= \int_0^{1/2} \int_0^\tau F(t) F(\tau) \sin(\omega \tau) \cos(\omega t) dt d\tau \\ &= \frac{1}{2\omega} \int_0^{1/2} F^2(t) dt + \sum_{n=2}^N \sum_{\substack{k+m=n, \\ k, m \geq 1}} a_{k,m} \frac{F_k(1/\omega) F_m(1/\omega)}{\omega^2} + R_N^{sc}, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$a_{k,m} = - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \frac{\ln^{k-1} x}{(k-1)!} \int_x^\infty \frac{\cos y}{y} \frac{\ln^{m-1} y}{(m-1)!} dy dx$$

и справедлива оценка

$$|R_N^{sc}| \leq C(F, N) \sum_{\substack{i+j=N+1, \\ i, j \geq 1}} \frac{|F_i(1/\omega) F_j(1/\omega)|}{\omega^2}. \quad (18)$$

Доказательство. Меняя порядок интегрирования и интегрируя по частям, получаем

$$\mathcal{J}(\omega) = \frac{1}{2\omega} \int_0^{1/2} F^2(t) dt - \frac{1}{\omega^2} \int_0^{\omega/2} F_1\left(\frac{x}{\omega}\right) \frac{\sin x}{x} \int_x^{\omega/2} F_1\left(\frac{y}{\omega}\right) \frac{\cos y}{y} dy dx.$$

Воспользуемся представлением (10) при $M = 1$, имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{\omega/2} F_1\left(\frac{x}{\omega}\right) \frac{\sin x}{x} \int_x^{\omega/2} F_1\left(\frac{y}{\omega}\right) \frac{\cos y}{y} dy dx \\ &= F_1^2\left(\frac{1}{\omega}\right) \int_0^{\omega/2} \frac{\sin x}{x} \int_x^{\omega/2} \frac{\cos y}{y} dy dx \\ &+ F_1\left(\frac{1}{\omega}\right) \underbrace{\int_0^{\omega/2} \frac{\sin x}{x} \int_x^{\omega/2} \frac{\cos y}{y} \int_1^y F_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z} dy dx}_{=R_{11}} \\ &+ \underbrace{\int_0^{\omega/2} \frac{\sin x}{x} \int_1^x F_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z} \int_x^{\omega/2} F_1\left(\frac{y}{\omega}\right) \frac{\cos y}{y} dy dx}_{=R_{12}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Несложно понять, что

$$\int_0^{\omega/2} \frac{\sin x}{x} \int_x^{\omega/2} \frac{\cos y}{y} dy dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \int_x^\infty \frac{\cos y}{y} dy dx + O\left(\frac{1}{\omega}\right).$$

Таким образом получена формула (17) при $N = 2$.

Для оценки интеграла R_{11} разобьем его на три слагаемых:

$$\begin{aligned} R_{11} &= \int_0^1 \frac{\sin x}{x} \int_x^1 \frac{\cos y}{y} \int_1^y F_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z} dy dx \\ &+ \int_0^1 \frac{\sin x}{x} \int_1^{\omega/2} \frac{\cos y}{y} \int_1^y F_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z} dy dx \\ &+ \int_1^{\omega/2} \frac{\sin x}{x} \int_x^{\omega/2} \frac{\cos y}{y} \int_1^y F_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z} dy dx =: R_{111} + R_{112} + R_{113}. \end{aligned}$$

Заметим, что подынтегральное выражение в R_{111} знакопостоянно. Воспользуемся соотношением (15), а также неравенствами

$$\frac{\sin x}{x} \leq 1, \quad \cos y \leq 1,$$

получим оценку

$$|R_{111}| \leq \left| F_2\left(\frac{1}{\omega}\right) \right| \int_0^1 \int_x^1 \frac{y^{-\alpha} - 1}{\alpha y} dy dx = C(\alpha) \left| F_2\left(\frac{1}{\omega}\right) \right|.$$

Далее,

$$|R_{112}| \leq \left| \int_1^{\omega/2} \frac{\cos y}{y} \int_1^y F_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z} dy \right|.$$

Проинтегрируем по частям, имеем

$$|R_{112}| \leq \left| \frac{1 + \sin y}{y} \int_1^y F_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z} \right|_{y=1}^{y=\omega/2} - \int_1^{\omega/2} \frac{1 + \sin y}{y^2} \left(F_2\left(\frac{y}{\omega}\right) - \int_1^y F_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z} \right) dy \right|.$$

Подстановка $y = 1$ обнуляется, подстановка $y = \omega/2$ с учетом (16) есть $O(|F_2(\frac{1}{\omega})| \cdot \omega^{\alpha-1})$, а получившийся интеграл, пользуясь неравенствами (16), (13) и (14) для $\mathbf{F} = F_2$, оценим

$$\begin{aligned} & \left| \int_1^{\omega/2} \frac{1 + \sin y}{y^2} \left(F_2\left(\frac{y}{\omega}\right) - \int_1^y F_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z} \right) dy \right| \\ & \leq C(\alpha, F) \left| F_2\left(\frac{1}{\omega}\right) \right| \int_1^{\omega/2} \frac{1 + \sin y}{y^{2-\alpha}} dy \leq C(\alpha, F) \left| F_2\left(\frac{1}{\omega}\right) \right|. \end{aligned}$$

Рассмотрим R_{113} . После интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned} R_{113} &= \frac{1 - \cos x}{x} \int_x^{\omega/2} \frac{\cos y}{y} \int_1^y F_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z} dy \Big|_{x=1}^{x=\omega/2} \\ &+ \int_1^{\omega/2} \frac{1 - \cos x}{x^2} \int_x^{\omega/2} \frac{\cos y}{y} \int_1^y F_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z} dy dx \\ &+ \int_1^{\omega/2} \frac{(1 - \cos x) \cos x}{x^2} \int_1^x F_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z} dx. \end{aligned}$$

Подстановка $x = \omega/2$ обнуляется, подстановка $x = 1$ оценивается через R_{112} . Последний интеграл с помощью (16) оценивается через $C(\alpha, F)|F_2(1/\omega)|$. Во втором слагаемом проинтегрируем по частям по переменной y , получим

$$\begin{aligned} & \int_1^{\omega/2} \frac{1 - \cos x}{x^2} \int_x^{\omega/2} \frac{\cos y}{y} \int_1^y F_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z} dy dx \\ &= \int_1^{\omega/2} \frac{1 - \cos x}{x^2} \left[\frac{1 + \sin y}{y} \int_1^y F_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z} \right]_{y=x}^{y=\omega/2} \\ &+ \int_x^{\omega/2} \frac{1 + \sin y}{y^2} \left(\int_1^y F_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z} - F_2\left(\frac{y}{\omega}\right) \right) dy \Big] dx. \end{aligned}$$

Оценивая это выражение аналогично интегралу R_{112} , получаем окончательно

$$|R_{11}| \leq C(\alpha, F) \left| F_2\left(\frac{1}{\omega}\right) \right|.$$

Аналогично оценим R_{12} . Полагая $\alpha = 1/2$, получаем оценку (18) для $N = 2$. При $N > 2$ действуем по индукции: подставляем (10) в (19) и оцениваем остатки аналогичным образом с помощью предложения 2. Теорема 3 доказана.

3. Асимптотика собственных чисел. Обозначим для удобства $\mathcal{F}_0(x) := \Phi^{-1}(x)$, $\mathcal{F}_{n+1}(x) := x\mathcal{F}'_n(x)$, $n \geq 0$, и заметим, что согласно теореме 5 (см. Приложение) функции $F = \mathcal{F}_0$ и $F = \mathcal{F}_0^2$ удовлетворяют условиям, сформулированным в начале § 2. Запишем асимптотики интегралов $\mathcal{C}_1(\omega)$, $\mathcal{C}_2(\omega)$, $\mathcal{I}_1(\omega)$, $\mathcal{I}_2(\omega)$, используя формулы (7) и (17) при $N = 2$ (как будет ясно из следующего параграфа, такая точность будет достаточна для наших целей):

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1(\omega) &= -\frac{\pi}{2} \frac{\mathcal{F}_1}{\omega} + \frac{\gamma\pi}{2} \frac{\mathcal{F}_2}{\omega} + O\left(\frac{|\mathcal{F}_3|}{\omega}\right), \\ \mathcal{C}_2(\omega) &= -\pi \frac{\mathcal{F}_0\mathcal{F}_1}{\omega} + \gamma\pi \frac{\mathcal{F}_0\mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_1^2}{\omega} + O\left(\frac{|\mathcal{F}_0\mathcal{F}_3| + |\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2|}{\omega}\right), \\ \mathcal{I}_1(\omega) &= \frac{1}{4\omega} + \frac{\pi^3}{8} \frac{\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2}{\omega^2} + O\left(\frac{|\mathcal{F}_1\mathcal{F}_3| + \mathcal{F}_2^2}{\omega^2}\right), \\ \mathcal{I}_2(\omega) &= \frac{3}{4\omega} + \frac{\pi^3}{2} \frac{\mathcal{F}_0^2\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_0\mathcal{F}_1^3}{\omega^2} + O\left(\frac{|\mathcal{F}_0^2\mathcal{F}_1\mathcal{F}_3| + |\mathcal{F}_0\mathcal{F}_1^2\mathcal{F}_2|}{\omega^2}\right).\end{aligned}\quad (20)$$

Здесь γ — константа Эйлера, и у всех $\mathcal{F}_n$ аргумент равен $1/\omega$. Подставляя (20) в формулы (5) и (6) для $D_1(\omega)$ и $D_2(\omega)$, получаем

$$\begin{aligned}D_1(\omega) &= \frac{\pi^2}{2\omega^3} \mathcal{F}_1^2 \left[\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) - 2\gamma \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \frac{\mathcal{F}_2}{\mathcal{F}_1} - \pi \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \frac{\mathcal{F}_2}{\mathcal{F}_1} \right. \\ &\quad \left. + O\left(\frac{|\mathcal{F}_3\mathcal{F}_1| + \mathcal{F}_2^2}{\mathcal{F}_1^2}\right) \right]; \\ D_2(\omega) &= \frac{\pi^2}{\omega^3} \left(\mathcal{F}_0\mathcal{F}_1\right)^2 \left[-\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) + 2\gamma \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \frac{\mathcal{F}_0\mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_1^2}{\mathcal{F}_0\mathcal{F}_1} \right. \\ &\quad \left. - \pi \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \frac{\mathcal{F}_0\mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_1^2}{\mathcal{F}_0\mathcal{F}_1} \right. \\ &\quad \left. + O\left(\frac{(\mathcal{F}_0\mathcal{F}_2)^2 + \mathcal{F}_1^4 + |\mathcal{F}_0^2\mathcal{F}_1\mathcal{F}_3| + |\mathcal{F}_0\mathcal{F}_1^2\mathcal{F}_2|}{\mathcal{F}_0^2\mathcal{F}_1^2}\right) \right].\end{aligned}\quad (21)$$

Напомним, что $\omega_{2k-1}^{(1)}$ являются корнями уравнения $D_1(\omega) = 0$. С учетом (21) это уравнение принимает вид:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \pi \frac{\mathcal{F}_2}{\mathcal{F}_1} + O\left(\frac{|\mathcal{F}_3\mathcal{F}_1| + \mathcal{F}_2^2}{\mathcal{F}_1^2}\right), \quad (22)$$

где аргумент всех $\mathcal{F}_n$ равен $1/\omega$. Поскольку правая часть (22) стремится к нулю при $\omega \rightarrow \infty$, в окрестности точки $2\pi k$ при достаточно больших k находится ровно один корень данного уравнения.

Как указано во введении, $\lambda_{2k}^{(1)} = \lambda_{2k}$ и $\lambda_{2k-1}^{(1)} \leq \lambda_{2k-1}$. Поэтому $\omega_{2k}^{(1)} = 2\pi k$ и $\omega_{2k-1}^{(1)} \geq \pi(2k-1)$. Из этих фактов и перемежаемости собственных чисел следует, что на промежутке $[(2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$ располагаются $\omega_{2k-1}^{(1)}$ и $\omega_{2k}^{(1)}$. Значит, в окрестности $2\pi k$ лежит корень $\omega_{2k-1}^{(1)}$ уравнения (22).

Стандартными методами получаем асимптотику $\omega_{2k-1}^{(1)}$ при $k \rightarrow \infty$:

$$\omega_{2k-1}^{(1)} = 2\pi k + 2\pi \frac{\mathcal{F}_2}{\mathcal{F}_1} + O\left(\frac{|\mathcal{F}_3\mathcal{F}_1| + \mathcal{F}_2^2}{\mathcal{F}_1^2}\right),$$

где аргумент всех $\mathcal{F}_n$ равен $1/2\pi k$. В силу соотношений (43), (44)–(46) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \frac{1}{\mathcal{F}_0} + O\left(\frac{1}{|\mathcal{F}_0|^3}\right), & \mathcal{F}_2 &= -\frac{1}{\mathcal{F}_0^3} + O\left(\frac{1}{|\mathcal{F}_0|^5}\right), \\ \mathcal{F}_3 &= O\left(\frac{1}{|\mathcal{F}_0|^5}\right), & \omega &\rightarrow \infty \end{aligned} \quad (23)$$

(аргумент всех $\mathcal{F}_n$ равен $1/\omega$). Отсюда

$$\omega_{2k-1}^{(1)} = 2\pi k + \frac{2\pi}{\mathcal{F}_0^2(1/2\pi k)} + O\left(\frac{1}{\mathcal{F}_0^4(1/2\pi k)}\right).$$

Известно, что (см., например, [32])

$$\mathcal{F}(x) = \Phi^{-1}(x) = -\sqrt{-2\ln x} \cdot \left[1 + O\left(\frac{\ln(-\ln x)}{\ln x}\right)\right], \quad x \rightarrow 0.$$

Поэтому

$$\omega_{2k-1}^{(1)} = 2\pi k + \frac{\pi}{\ln k} + O\left(\frac{\ln(\ln k)}{\ln^2 k}\right). \quad (24)$$

Далее, $\omega_{2k}^{(2)}$ являются корнями уравнения $D_2(\omega) = 0$. С учетом (21) это уравнение принимает вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega}{2}\right) &= -\pi \frac{\mathcal{F}_0\mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_1^2}{\mathcal{F}_0\mathcal{F}_1} \\ &+ O\left(\frac{(\mathcal{F}_0\mathcal{F}_2)^2 + \mathcal{F}_1^4 + \mathcal{F}_0^2|\mathcal{F}_1\mathcal{F}_3| + |\mathcal{F}_0\mathcal{F}_1^2\mathcal{F}_2|}{\mathcal{F}_0^2\mathcal{F}_1^2}\right), \end{aligned}$$

где аргумент всех $\mathcal{F}_n$ равен $1/\omega$. Рассуждая аналогичным образом, получаем, что в окрестности $2\pi k + \pi$ при достаточно больших k находится ровно один корень данного уравнения с номером $\omega_{2k}^{(2)}$. Его асимптотика:

$$\begin{aligned} \omega_{2k}^{(2)} &= \pi + 2\pi k - \pi \frac{\mathcal{F}_0\mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_1^2}{\mathcal{F}_0\mathcal{F}_1} \\ &+ O\left(\frac{(\mathcal{F}_0\mathcal{F}_2)^2 + \mathcal{F}_1^4 + \mathcal{F}_0^2|\mathcal{F}_1\mathcal{F}_3| + |\mathcal{F}_0\mathcal{F}_1^2\mathcal{F}_2|}{\mathcal{F}_0^2\mathcal{F}_1^2}\right), \end{aligned}$$

где аргумент всех $\mathcal{F}_n$ равен $1/\pi(2k+1)$. В силу (23) имеем

$$\omega_{2k}^{(2)} = \pi + 2\pi k + O\left(\frac{1}{\mathcal{F}_0^4(1/\pi(2k+1))}\right) = \pi(2k+1) + O\left(\frac{1}{\ln^2 k}\right). \quad (25)$$

4. Асимптотика малых уклонений для процесса $X^{(2)}$. Применим полученные результаты к задаче об асимптотике вероятностей малых уклонений в L^2 -норме для гауссовских процессов $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}$ с нулевым средним и функциями ковариации, определенными в (2)–(4).

Наиболее простой является задача для $X^{(2)}$. Применим принцип сравнения Ли (предложение 1). В качестве аппроксимации возьмем процесс с собственными числами γ_k соответствующего интегрального оператора $\gamma_k = [(2k+1)\pi/2]^{-2}$, $k \in \mathbf{N}$.

Известно, что ([8, теорема 3.4], см. также [11, теорема 6.2])

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \xi_k^2 < \varepsilon^2\right\} \sim \frac{4}{\pi^{3/2}} \varepsilon^{-1} \exp\left(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\right). \quad (26)$$

Для того, чтобы найти константу из (1), дополнительно введем

$$\mu_1 := \pi^{-2}, \quad \mu_{2k} = \mu_{2k+1} := [(2k+1)\pi]^{-2}.$$

Тогда

$$\left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{\lambda_k^{(2)}}\right)^{1/2} = \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{\mu_k}\right)^{1/2} \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{\lambda_k^{(2)}}\right)^{1/2} = \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{\mu_k}\right)^{1/2} \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_{2k}}{\lambda_{2k}^{(2)}}\right)^{1/2}.$$

Первое бесконечное произведение легко считается по формуле Стирлинга:

$$\left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{\mu_k}\right)^{1/2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\pi \cdot (3\pi)^2 \cdot (5\pi)^2 \cdots ((2k+1)\pi)^2}{\frac{3\pi}{2} \cdot \frac{5\pi}{2} \cdots \frac{(4k+3)\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (27)$$

Заметим, что $\mu_{2k}^{-1/2}$ и $(\lambda_{2k}^{(2)})^{-1/2} = \omega_{2k}^{(2)}$ есть корни целых функций

$$M(\omega) := \frac{\cos(\omega/2)}{1 - (\omega/\pi)^2} \quad \text{и} \quad \mathcal{D}(\omega) := \omega D_2(\omega), \quad \omega \in \mathbf{C},$$

причем эти корни достаточно близки. Заметим также, что $M(0) = \mathcal{D}(0) = 1$. Воспользуемся леммой 1 (см. Приложение). Получаем

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_{2k}}{\lambda_{2k}^{(2)}} = \lim_{\substack{|\omega|=2\pi k, \\ k \rightarrow \infty}} \frac{M(\omega)}{\mathcal{D}(\omega)},$$

причем предел можно брать только по вещественной оси. Тогда, пользуясь формулами (21) и (23), имеем

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_{2k}}{\lambda_{2k}^{(2)}} = \lim_{\substack{\omega=2\pi k \\ k \rightarrow \infty}} \frac{M(\omega)}{\omega D_2(\omega)} = \lim_{\substack{\omega=2\pi k \\ k \rightarrow \infty}} \left(\mathcal{F}_0\left(\frac{1}{\omega}\right) \mathcal{F}_1\left(\frac{1}{\omega}\right)\right)^2 = 1. \quad (28)$$

В итоге из формул (1), (26)–(28) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\|X^{(2)}\| < \varepsilon\} &= \mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(2)} \xi_k^2 < \varepsilon^2\right\} \\ &\sim \frac{2\sqrt{2}}{\pi^{3/2}} \varepsilon^{-1} \exp\left(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (29)$$

5. Асимптотика малых уклонений для $X^{(1)}$ и $X^{(3)}$. Для процессов $X^{(1)}$ и $X^{(3)}$ точную константу в асимптотике малых уклонений найти не удастся. Для того, чтобы посчитать асимптотику малых уклонений с точностью до константы, воспользуемся следующим предложением, являющимся частным случаем [9, теорема 3.1].

Предложение 3. Пусть $\phi(t)$ — определенная на $[1, \infty)$, положительная, логарифмически выпуклая, дважды дифференцируемая и интегрируемая функция. Тогда

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \phi(k) \xi_k^2 \leq r\right\} \sim C \sqrt{\frac{f(u\phi(1))}{I_2(u)}} \exp(I_0(u) + ur), \quad r \rightarrow 0,$$

где $f(t) = (1 + 2t)^{-1/2}$, $u = u(r)$ — функция, удовлетворяющая соотношению

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{I_1(u) + ur}{\sqrt{I_2(u)}} = 0, \quad (30)$$

а функции I_0 , I_1 , I_2 определены формулами

$$\begin{aligned} I_0(u) &= \int_1^{\infty} \ln f(u\phi(t)) dt, \quad I_1(u) = \int_1^{\infty} u\phi(t)(\ln f(u\phi(t)))' dt, \\ I_2(u) &= \int_1^{\infty} (u\phi(t))^2 (\ln f(u\phi(t)))'' dt. \end{aligned}$$

В качестве функции $\phi(t)$ мы будем рассматривать

$$\phi(t) = (t + \delta + F(t))^{-d}, \quad d > 1,$$

где $F(t)$ — медленно меняющаяся, монотонно стремящаяся к нулю функция при $t \rightarrow \infty$. Если $\int_1^{\infty} F(t)/t dt < \infty$, то произведение $\prod \phi(k)/(k + \delta)^{-d}$ сходится, и асимптотика с точностью до константы следует из [11, теорема 6.2]. Поэтому будем считать, что $\int_1^{\infty} F(t)/t dt$ расходится.

Преобразуем интеграл I_1 так:

$$\begin{aligned} I_1 &= -u \int_1^{\infty} \frac{dt}{2u + (t + \delta + F(t))^d} \\ &= -\frac{1}{2} \int_{1+\delta+F(1)}^{\infty} \frac{dx}{1 + (x/(2u)^{1/d})^d} + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{F'(t) dt}{1 + ((t + \delta + F(t))/(2u)^{1/d})^d} \end{aligned}$$

$$= -\frac{\pi(2u)^{1/d}}{2d \sin(\pi/d)} + \frac{1}{2} \int_0^{1+\delta+F(1)} \frac{dx}{1 + (x/(2u)^{1/d})^d} + \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{F'(t) dt}{1 + ((t + \delta + F(t))/(2u)^{1/d})^d}.$$

Оба интегранта здесь имеют суммируемые мажоранты, поэтому по теореме Лебега при $u \rightarrow \infty$ имеем

$$\frac{1}{2} \int_0^{1+\delta+F(1)} \frac{dx}{1 + (x/(2u)^{1/d})^d} + \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{F'(t) dt}{1 + ((t + \delta + F(t))/(2u)^{1/d})^d} \rightarrow \frac{1 + \delta}{2},$$

и, таким образом,

$$I_1(u) = -\frac{\pi(2u)^{1/d}}{2d \sin(\pi/d)} + \frac{\delta + 1}{2} + o(1), \quad u \rightarrow \infty.$$

Проводя аналогичные рассуждения с интегралом $I_2(u)$, получаем при $u \rightarrow \infty$

$$I_2(u) = 2u^2 \int_1^\infty \frac{dt}{(2u + (t + \delta + F(t))^d)^2} = \frac{(d-1)\pi(2u)^{1/d}}{2d^2 \sin(\pi/d)} + O(1).$$

Заметим, что асимптотика интегралов $I_1(u)$ и $I_2(u)$ совпадает с асимптотикой соответствующих интегралов в [11], поэтому мы можем выбрать в качестве функции $u = u(r)$

$$u = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi r^{-1}}{d \sin(\pi/d)} \right)^{d/d-1}, \quad (31)$$

которая удовлетворяет условию (30).

Рассмотрим $I_0(u)$. Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} I_0(u) &= -\frac{1}{2} \int_1^\infty \ln \left(1 + \frac{2u}{(t + \delta + F(t))^d} \right) dt \\ &= \frac{(1 + \delta)}{2} \ln \left(1 + \frac{2u}{(1 + \delta + F(1))^d} \right) \\ &\quad - ud \int_1^\infty \frac{(t + \delta)(1 + F'(t)) dt}{(2u + (t + \delta + F(t))^d)(t + \delta + F(t))}. \end{aligned}$$

Последний интеграл можно представить в виде следующих четырех слагаемых:

$$\begin{aligned} &-ud \int_1^\infty \frac{dt}{2u + (t + \delta + F(t))^d} - ud \int_1^\infty \frac{F'(t) dt}{2u + (t + \delta + F(t))^d} \\ &\quad + ud \int_1^\infty \frac{F(t) dt}{(2u + (t + \delta + F(t))^d)(t + \delta + F(t))} \\ &\quad + ud \int_1^\infty \frac{F(t)F'(t) dt}{(2u + (t + \delta + F(t))^d)(t + \delta + F(t))} \\ &=: K_1 + K_2 + K_3 + K_4. \end{aligned}$$

Интеграл $K_1 = -d \cdot I_1$, поэтому

$$K_1 = \frac{\pi(2u)^{1/d}}{2 \sin(\pi/d)} + \text{const} + o(1), \quad u \rightarrow \infty.$$

У интегрантов в K_2 и K_4 имеются суммируемые мажоранты, поэтому при $u \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{d}{2} \int_1^\infty \frac{F'(t) dt}{1 + ((t + \delta + F(t))/(2u)^{1/d})^d} \\ &\rightarrow \frac{d}{2} \int_1^\infty F'(t) dt = -\frac{d}{2} \cdot F(1) = \text{const}; \\ K_4 &= \frac{d}{2} \int_1^\infty \frac{F(t)F'(t) dt}{(1 + ((t + \delta + F(t))/(2u)^{1/d})^d)(t + \delta + F(t))} \\ &\rightarrow \frac{d}{2} \int_1^\infty \frac{F(t)F'(t) dt}{(t + \delta + F(t))} = \text{const}. \end{aligned}$$

Интеграл K_3 представим в виде суммы четырех интегралов

$$\begin{aligned} K_3 &= \frac{d}{2} \int_1^{(2u)^{1/d}} \frac{F(t)}{t} dt - \frac{d}{2} \int_1^{(2u)^{1/d}} \frac{F(t)(\delta + F(t))}{t(t + \delta + F(t))} dt \\ &\quad - \frac{1}{2u} \frac{d}{2} \int_1^{(2u)^{1/d}} \frac{F(t)(t + \delta + F(t))^{d-1}}{1 + ((t + \delta + F(t))/(2u)^{1/d})^d} dt \\ &\quad + \frac{d}{2} \int_{(2u)^{1/d}}^\infty \frac{F(t) dt}{(1 + ((t + \delta + F(t))/(2u)^{1/d})^d)(t + \delta + F(t))} \\ &=: \frac{d}{2} F_{-1}\left((2u)^{1/d}\right) - K_{31} - K_{32} + K_{33}, \end{aligned}$$

где $F_{-1}(x) = \int_1^x (F(t)/t) dt$. По теореме Лебега

$$K_{31} \rightarrow \frac{d}{2} \int_1^\infty \frac{F(t)(\delta + F(t))}{t(t + \delta + F(t))} dt = \text{const}.$$

Сделаем замену переменной $t = (2u)^{1/d} \cdot z$ в интегралах K_{32} и K_{33} :

$$\begin{aligned} K_{32} &= \frac{d}{2} \int_{1/(2u)^{1/d}}^1 \frac{F((2u)^{1/d}z) \left(z + \frac{\delta + F((2u)^{1/d}z)}{(2u)^{1/d}}\right)^{d-1}}{1 + \left(z + \frac{\delta + F((2u)^{1/d}z)}{(2u)^{1/d}}\right)^d} dz, \\ K_{33} &= \int_1^\infty \frac{F((2u)^{1/d}z) dz}{\left(1 + \left(z + \frac{\delta + F((2u)^{1/d}z)}{(2u)^{1/d}}\right)^d\right) \left(z + \frac{\delta + F((2u)^{1/d}z)}{(2u)^{1/d}}\right)}. \end{aligned}$$

Подынтегральные выражения здесь ограничены, поэтому по теореме Лебега $K_{32} \rightarrow 0$ и $K_{33} \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$. Таким образом, при $u \rightarrow \infty$

$$K_3 = \frac{d}{2} F_{-1}((2u)^{1/d}) + \text{const} + o(1),$$

откуда

$$\begin{aligned} I_0(u) &= \frac{(1+\delta)}{2} \ln \left(1 + \frac{2u}{(1+\delta+F(1))^d} \right) - \frac{\pi(2u)^{1/d}}{2 \sin(\pi/d)} \\ &\quad + \frac{d}{2} F_{-1}((2u)^{1/d}) + \text{const} + o(1). \end{aligned} \quad (32)$$

Заметим, что функция $\exp(F_{-1}(t))$ — медленно меняющаяся [31, теорема 1.2], поэтому с учетом (31)

$$\exp \left(F_{-1}((2u)^{1/d}) \right) = \exp \left(F_{-1}(r^{1/d-1}) + o(1) \right), \quad r \rightarrow 0. \quad (33)$$

Применяя предложение 3 с учетом формул (31)–(33) и перемасштабирования, приходим к следующему результату.

Теорема 4. *Рассмотрим формулу $\sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k \xi_k^2$, где $\Lambda_k = (\vartheta(k + \delta + F(k)))^{-d}$, $a, \vartheta > 0$, $\delta > -1$ и $d > 1$ — некоторые константы. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$*

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k \xi_k^2 < \varepsilon^2 \right\} &\sim C \cdot \varepsilon^\gamma \cdot \exp \left(- \frac{d-1}{2} \left(\frac{\pi}{d \vartheta \sin(\pi/d)} \right)^{d/(d-1)} \cdot \varepsilon^{-2/(d-1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{d}{2} \cdot F_{-1}(\varepsilon^{-2/(d-1)}) \right), \end{aligned}$$

где

$$\gamma = \frac{2-d-2d\delta}{2(d-1)}, \quad C = C(\vartheta, \delta, d, F) = \text{const}.$$

В случае процесса $X^{(1)}$ положим

$$\Lambda_k := \left[\pi \left(k + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \ln(k+1)} \right) \right]^{-2}.$$

Убедимся, что $\prod \lambda_k^{(1)} / \Lambda_k$ сходится. Для этого определим

$$\tau_{2k} := (2\pi k)^{-2}, \quad \tau_{2k-1} := \left[\pi \left(2k + \frac{1}{\ln(k+1)} \right) \right]^{-2}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^{(1)}}{\Lambda_k} \right)^{1/2} &= \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^{(1)}}{\tau_k} \right)^{1/2} \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\tau_k}{\Lambda_k} \right)^{1/2} \\ &= \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{2k-1}^{(1)}}{\tau_{2k-1}} \right)^{1/2} \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\tau_k}{\Lambda_k} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (34)$$

Первое произведение в (34) сходится, поскольку в силу (24)

$$\left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{2k-1}^{(1)}}{\tau_{2k-1}} \right)^{1/2} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + O\left(\frac{\ln \ln k}{k \ln^2 k} \right) \right) < \infty.$$

Второе произведение представим в виде

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\tau_{2k} \tau_{2k-1}}{\Lambda_{2k} \Lambda_{2k-1}} \right)^{1/2} \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k + 1/2 + 1/(2 \ln(2k + 1)))(2k - 1/2 + 1/(2 \ln(2k)))}{2k(2k + 1/\ln(k + 1))} \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{4k} \left(\frac{1}{\ln(2k + 1)} + \frac{1}{\ln(2k)} - \frac{2}{\ln(k + 1)} \right) + O\left(\frac{1}{k^2} \right) \right) \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + O\left(\frac{1}{k \ln^2 k} \right) \right) < \infty. \end{aligned}$$

Применяя теорему сравнения Ли и теорему 4, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{ \|X^{(1)}\| < \varepsilon \right\} &= \mathbf{P}\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(1)} \xi_k^2 < \varepsilon^2 \right\} \sim C \cdot \mathbf{P}\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k \xi_k^2 < \varepsilon^2 \right\} \\ &\sim C \varepsilon^{-1} \ln^{1/2} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \exp \left(-\frac{1}{8\varepsilon^2} \right), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (35)$$

В случае процесса $X^{(3)}$ положим

$$\tilde{\Lambda}_k = \left[\pi \left(k + 1 + \frac{1}{2 \ln(k + 1)} \right) \right]^{-2}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Аналогично (35), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{ \|X^{(3)}\| < \varepsilon \right\} &= \mathbf{P}\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(3)} \xi_k^2 < \varepsilon^2 \right\} \sim C \mathbf{P}\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\Lambda}_k \xi_k^2 < \varepsilon^2 \right\} \\ &\sim C \varepsilon^{-2} \ln^{1/2} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \exp \left(-\frac{1}{8\varepsilon^2} \right), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (36)$$

6. Приложение.

6.1. Следующая лемма усиливает утверждение леммы 1.2 из [18].

Лемма 1. Пусть последовательности чисел ω_k и ρ_k имеют одинаковую двучленную асимптотику при $k \rightarrow \infty$

$$\omega_k \sim c(k + \delta) + a_k, \quad \rho_k \sim c(k + \delta) + b_k,$$

где $a_k, b_k \rightarrow 0$ и $|a_k - b_k|$ монотонно убывает при $k \rightarrow \infty$, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k - b_k|}{k} < \infty. \quad (37)$$

Тогда функции

$$f(\zeta) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\zeta^2}{\omega_k^2}\right), \quad g(\zeta) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\zeta^2}{\rho_k^2}\right)$$

имеют одинаковое поведение на бесконечности с точностью до константы. А именно, при $|\zeta| = c(n + \delta + 1/2)$, $n \rightarrow \infty$

$$\frac{f(\zeta)}{g(\zeta)} \rightrightarrows \text{const} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_k^2}{\omega_k^2}. \quad (38)$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{f(\zeta)}{g(\zeta)} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_k^2}{\omega_k^2} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\omega_k - \rho_k}{\rho_k + \zeta}\right) \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\omega_k - \rho_k}{\rho_k - \zeta}\right). \quad (39)$$

Сходимость первого произведения в (39) равносильна сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k - b_k|}{c(k + \delta) + b_k},$$

который сходится благодаря условию (37). Пусть $\text{Re}(\zeta) \geq 0$. Тогда второе произведение в (39) сходится равномерно. Третье произведение сходится равномерно, если сходится равномерно ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\omega_k - \rho_k|}{|\rho_k - R|}, \quad \text{где } R = c(n + \delta + 1/2). \quad (40)$$

Заметим, что $|\rho_k - R| \geq c|n - k + \delta_1|$, где $\delta_1 > 0$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\omega_k - \rho_k|}{|\rho_k - R|} \leq \left(\sum_{k \leq \frac{2}{3}n} + \sum_{\frac{2}{3}n \leq k \leq \frac{4}{3}n} + \sum_{k \geq \frac{4}{3}n} \right) \frac{|a_k - b_k|}{c|n - k + \delta_1|}. \quad (41)$$

Третья сумма в (41) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$:

$$\sum_{k \geq \frac{4}{3}n} \frac{|a_k - b_k|}{c|n - k + \delta_1|} \leq C \sum_{k \geq \frac{4}{3}n} \frac{|a_k - b_k|}{k} \rightarrow 0.$$

Первая сумма мажорируется сходящимся рядом

$$\sum_{k \leq \frac{2}{3}n} \frac{|a_k - b_k|}{c|n - k + \delta_1|} \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k - b_k|}{k},$$

поэтому она сходится равномерно, и при $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{k \leq \frac{2}{3}n} \frac{|a_k - b_k|}{c|n - k + \delta_1|} \rightarrow 0.$$

Поскольку $|a_k - b_k|$ монотонно убывает, имеем

$$\sum_{\frac{2}{3}n \leq k \leq \frac{4}{3}n} \frac{|a_k - b_k|}{c|n - k + \delta_1|} \leq 2 \sum_{\frac{2}{3}n \leq k \leq n} \frac{|a_k - b_k|}{c|n - k + \delta_1|} \leq \frac{2}{c} \sum_{m \leq \frac{1}{3}n} \frac{|a_{m+\frac{n}{3}} - b_{m+\frac{n}{3}}|}{|m + \delta_1|}.$$

Последняя сумма мажорируется сходящимся рядом, поэтому она сходится равномерно. Таким образом, ряд (40) сходится равномерно. Значит, в (39) можно перейти к пределу при $|\zeta| = c(n + \delta + 1/2) \rightarrow \infty$, что дает (38) для $\operatorname{Re}(\zeta) \geq 0$. Доказательство при $\operatorname{Re}(\zeta) \leq 0$ аналогично. Лемма 1 доказана.

6.2. Свойства $\Phi^{-1}(x)$. Введем обозначения:

$$x = \Phi(y), \quad y = F_0(x) := \Phi^{-1}(x).$$

Построим последовательность функций:

$$F_{N+1}(x) := xF'_N(x), \quad N \geq 0. \quad (42)$$

Обозначим $\tilde{F}_N(y) := F_N(x(y))$ и заметим, что

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1(y) &= x(y) \frac{dF(x(y))}{dx} = x(y) \frac{dy}{dx}, \\ \tilde{F}_{N+1}(y) &= x(y) \frac{dF_N(x)}{dx} = x(y) \frac{dy}{dx} \frac{d\tilde{F}_N(y)}{dy} = \tilde{F}_1(y) \tilde{F}'_N(y). \end{aligned} \quad (43)$$

Исследуем поведение функций $\tilde{F}_N(y)$. Рассмотрим функцию $\tilde{F}_1(y)$:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1(y) &= x(y) \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x(y)}{dx/dy} = \frac{\int_{-\infty}^y \exp(-t^2/2) dt}{\exp(-y^2/2)} \\ &= \exp\left(\frac{y^2}{2}\right) \int_{-\infty}^y \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \\ &= \int_0^{\infty} \exp\left(yz - \frac{z^2}{2}\right) dz = -\frac{1}{y} \int_0^{\infty} \exp\left(-u - \frac{u^2}{2y^2}\right) du. \end{aligned}$$

Введем вспомогательные функции:

$$e_N(y) := \int_0^{\infty} \exp\left(-u - \frac{u^2}{2y^2}\right) u^{2N-2} du.$$

Лемма 2. *Справедливы следующие соотношения:*

$$1. \quad e'_N(y) = \frac{e_{N+1}(y)}{y^3}; \quad (44)$$

$$2. \quad (2N-2)! \left(1 - \frac{N(2N-1)}{y^2}\right) < e_N(y) < (2N-2)!. \quad (45)$$

Доказательство. 1. Проверяется непосредственным вычислением.

2. Учитывая, что

$$1 - \frac{u^2}{2y^2} < \exp\left(-\frac{u^2}{2y^2}\right) < 1,$$

получаем

$$\int_0^\infty \exp(-u) \left(1 - \frac{u^2}{2y^2}\right) u^{2N-2} du < e_N(y) < \int_0^\infty \exp(-u) u^{2N-2} du,$$

$$(2N-2)! - \frac{(2N)!}{2y^2} < e_N(y) < (2N-2)!,$$

откуда следует (45). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Для N -й производной функции $\tilde{F}_1(y)$ справедливо следующее тождество:

$$\tilde{F}_1^{(N)}(y) = \frac{(-1)^{N+1} N! e_1(y)}{y^{N+1}} + \frac{c_2 e_2(y)}{y^{N+3}} + \dots + \frac{c_{N+1} e_{N+1}(y)}{y^{3N+1}}, \quad (46)$$

где

$$c_2 = c_2(N), \quad c_3 = c_3(N), \quad \dots, \quad c_{N+1} = c_{N+1}(N) — \text{константы.}$$

Доказательство проводится по индукции с помощью (44).

Следствие 1. При $y \rightarrow -\infty$ справедливо следующее соотношение:

$$\tilde{F}_1^{(N)}(y) \sim \frac{(-1)^{N+1} N!}{y^{N+1}} \text{ при } y \rightarrow -\infty. \quad (47)$$

Доказательство следует из (45) и (46).

Лемма 4. $\tilde{F}_N(y)$ представимо в следующем виде:

$$\tilde{F}_N(y) = \sum_{\{n_1, \dots, n_N\}} c_{n_1, \dots, n_N} \tilde{F}_N^{n_1, \dots, n_N}(y), \quad (48)$$

где

$$\tilde{F}_N^{n_1, \dots, n_N}(y) := (\tilde{F}_1(y))^{n_1} (\tilde{F}_1'(y))^{n_2} \dots (\tilde{F}_1^{(N-1)}(y))^{n_N}, \quad (49)$$

причем

$$n_1, \dots, n_N \in \mathbf{N}_0 = \{0, 1, \dots\};$$

$$1 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 + \dots + N \cdot n_N = 2N - 1; \quad (50)$$

а коэффициенты в (48) удовлетворяют следующим неравенствам:

$$c_{n_1, \dots, n_N} \geq 0, \quad \sum_{\{n_1, \dots, n_N\}} c_{n_1, \dots, n_N} > 0. \quad (51)$$

Доказательство. Применим индукцию.

База $N = 1$: $\tilde{F}_1(y) = c_{n_1} \tilde{F}_1^{n_1}$, $n_1 = 1, c_{n_1} = 1$. Свойства (49)–(51) очевидно выполняются. Индукционный переход: Пусть утверждение верно для $\tilde{F}_N(y)$. Запишем (50) в виде:

$$1 \cdot n_1 + \dots + N \cdot n_N + (N+1) \cdot n_{N+1} = 2N - 1,$$

где $n_{N+1} = 0$. В силу (43) и (48)

$$\tilde{F}_{N+1}(y) = \sum_{\{n_1, \dots, n_N\}} c_{n_1, \dots, n_N} \tilde{F}_1(y) \frac{d}{dy} \left[(\tilde{F}_1(y))^{n_1} (\tilde{F}_1'(y))^{n_2} \dots (\tilde{F}_1^{(N-1)}(y))^{n_N} \right],$$

где коэффициенты $c_{n_1, \dots, n_N}$ удовлетворяют условию (51). Дифференцируя, получим

$$\sum_{k=0}^N c_{n_1, \dots, n_N} n_k (\tilde{F}_1)^{n_1+1} \dots (\tilde{F}_1^{(k-1)})^{n_k-1} (\tilde{F}_1^{(k)})^{n_{k+1}+1} \dots (\tilde{F}_1^{(N-1)})^{n_N}. \quad (52)$$

Рассмотрим слагаемое с номером k в сумме (52). Пусть $n'_1, n'_2, \dots, n'_{N+1}$ — показатели степеней соответствующих производных $\tilde{F}_1$ в этом слагаемом.

Если $k = 1$, то $n'_2 = n_2 + 1$ и $n'_i = n_i$ для остальных i .

Если $k \geq 2$, то $n'_1 = n_1 + 1$, $n'_k = n_k - 1$, $n'_{k+1} = n_{k+1} + 1$ и $n'_i = n_i$ для остальных i .

Отсюда видно, что свойство (50) выполнено. Далее, все коэффициенты в (52) очевидно неотрицательные, причем

$$\sum_{\substack{k=1, \dots, N \\ \{n_1, \dots, n_N\}}} c_{n_1, \dots, n_N} \cdot n_k > 0.$$

Таким образом, неравенства (51) выполнены, и лемма доказана.

Лемма 5. При $y \rightarrow -\infty$ имеем

$$\tilde{F}_N(y) \sim -\frac{C}{y^{2N-1}}, \quad (53)$$

где $C = C(N) > 0$ — константа.

Доказательство. Для каждого слагаемого вида (49) с ненулевым коэффициентом $c_{n_1, \dots, n_N}$ в силу (47) и (50) получаем

$$\begin{aligned} & (\tilde{F}_1(y))^{n_1} (\tilde{F}_1'(y))^{n_2} \dots (\tilde{F}_1^{(N-1)}(y))^{n_N} \\ & \sim \left(\frac{(-1)0!}{y^1} \right)^{n_1} \left(\frac{(-1)^2 1!}{y^2} \right)^{n_2} \dots \left(\frac{(-1)^N (N-1)!}{y^N} \right)^{n_N} \\ & = \underbrace{0!^{n_1} 1!^{n_2} \dots (N-1)!^{n_N}}_{c_N} \frac{(-1)^{n_1+2n_2+\dots+Nn_N}}{y^{n_1+2n_2+\dots+Nn_N}} \\ & = c_N \frac{(-1)^{2N-1}}{y^{2N-1}} = -\frac{c_N}{y^{2N-1}}. \end{aligned}$$

Таким образом, соотношение (53) выполнено для

$$C = c_N \sum_{\{n_1, \dots, n_N\}} c_{n_1, \dots, n_N}.$$

Лемма 5 доказана.

О п р е д е л е н и е 1 (см. [31, гл. 1, с. 1]). Функция $L(x)$ называется медленно меняющейся на бесконечности, если она измерима и знакопостоянна на полуоси $[A, \infty)$, $A > 0$, и для произвольного $\lambda > 0$ выполнено

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1.$$

Функция $L(x)$ называется медленно меняющейся в нуле, если $L(1/x)$ медленно меняется на бесконечности.

Медленно меняющимися на бесконечности являются, например, $\ln^\alpha x$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

Теорема 5. $F_N(x)$ — медленно меняющиеся функции в нуле при всех $N \geq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать (см. [31, гл. 1, с. 15]), что $F_N(x)$ — знакопостоянны в окрестности $x = 0$ (или, что тоже самое, $\tilde{F}_N(y)$ — знакопостоянны в окрестности $y = -\infty$) и

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{\tilde{F}_{N+1}(y)}{\tilde{F}_N(y)} = 0.$$

Оба эти утверждения очевидно следуют из леммы 5. Теорема 5 доказана.

З а м е ч а н и е 2. Теорема остается справедливой, если последовательность (42) построить по функции $F_0(x) = (\Phi^{-1}(x))^n$, $n \in \mathbf{N}$.

Мы весьма признательны Я. Ю. Никитину за ценные замечания и консультации по истории вопроса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Li W. V., Shao Q. M. Gaussian processes: inequalities, small ball probabilities and applications. Stochastic Processes: Theory and Methods. North-Holland: Amsterdam, 2001, p.533–597.
2. Lifshits M. A. Asymptotic behavior of small ball probabilities. — Probab. Theory and Math. Statist. Proc. VII International Vilnius Conference (1998). Vilnius: VSP/TEV, 1999, p. 453–468.
3. Lifshits M. A. Bibliography on small deviation probabilities. <http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/smalldev/biblio.pdf>, 2014.
4. Сытая Г. Н. О некоторых асимптотических представлениях гауссовской меры в гильбертовом пространстве. — Теория случайных процессов, 1974, т.2, с.93–104.

5. *Zolotarev V. M.* Gaussian measure asymptotic in L_2 on a set of centered spheres with radii tending to zero. — 12th Europ. Meeting of Statisticians, Varna, 1979, p. 254.
6. *Hoffmann-Jørgensen J., Shepp L. A., Dudley R. M.* On the lower tail of Gaussian seminorms. — *Ann. Probab.*, 1979, v. 7, № 2, p. 310–342.
7. *Ибрагимов И. А.* О вероятности попадания гауссова вектора со значениями в гильбертовом пространстве в сферу малого радиуса. — *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 1979, т. 85, с. 75–93.
8. *Li. W. V.* Comparison results for the lower tail of Gaussian seminorms. — *J. Theoret. Probab.*, 1992, v. 5, № 1, p. 1–31.
9. *Dunker T., Lifshits M. A., Linde W.* Small deviation probabilities of sums of independent random variables. — *Progr. Probab.*, 1998, v. 43, p. 59–74.
10. *Gao F., Hanning J., Torcaso F.* Comparison theorems for small deviations of random series. — *Electron. J. Probab.*, 2003, v. 8, № 21, p. 1–17.
11. *Nazarov A. I., Nikitin Ya. Y.* Exact L_2 -small ball behavior of integrated Gaussian processes and spectral asymptotics of boundary value problems. — *Prob. Theory Related Fields*, 2004, v. 129, № 4, p. 469–494.
12. *Nazarov A. I.* Exact small ball asymptotics of Gaussian processes and the spectrum of boundary value problems. — *J. Theor. Probab.*, 2009, v. 22, № 3, p. 640–665.
13. *Birkhoff G.* On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1908, v. 9, № 2, p. 219–231.
14. *Birkhoff G.* Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1908, v. 9, № 4, p. 373–395.
15. *Tamarkin J.* Sur quelques points de la theorie des equations differentielles lineaires ordinaires et sur la generalisation de la serie de Fourier. — *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1912, v. 34, № 1, p. 345–382.
16. *Tamarkin J.* Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions. — *Math. Z.*, 1928, v. 27, № 1, p. 1–54.
17. *Шкалик А. А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях. — *Тр. семинара им. И. Г. Петровского. М.: Изд-во Моск. ун-та*, 1983, т. 9, с. 190–229.
18. *Назаров А. И.* О точной константе в асимптотике малых уклонений в L_2 -норме некоторых гауссовских процессов. — *Нелинейные задачи в теории функций. Под ред. Н. Н. Уральцевой. Новосибирск, Тамара Рожковская*, с. 179–214. (Проблемы математического анализа, в. 26.)
19. *Назаров А. И., Пусев Р. С.* Точная асимптотика малых уклонений в L_2 -норме с весом для некоторых гауссовских процессов. — *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2009, т. 364, с. 166–199.
20. *Назаров А. И., Пусев Р. С.* Теоремы сравнения для вероятностей малых уклонений весовых L_2 -норм гриновских гауссовских процессов. — *Алгебра и анализ*, 2013, т. 25, № 3, с. 131–146.
21. *Никитин Я. Ю., Харинский П. А.* Точная асимптотика малых уклонений в L_2 -норме для одного класса гауссовских процессов. — *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2004, т. 311, с. 214–221.
22. *Deheuvels P., Martynov G.* Karhunen–Loeve expansions for weighted Wiener processes and Brownian bridges via Bessel functions. — *High Dimensional Probability, III (Sandjberg, 2002)*. Basel: Birkhäuser, 2003, v. 55, p. 57–93.
23. *Gao F., Hanning J., Lee T.-Y., Torcaso F.* Laplace transforms via Hadamard factorization. — *Electron. J. Probab.*, 2003, v. 8, № 13, p. 1–20.
24. *Назаров А. И.* Об одном семействе преобразований гауссовских случайных функций. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2009, т. 54, в. 2, с. 209–225.
25. *Владимиров А. А., Шейнак И. А.* О задаче Неймана для уравнения Штурма–Лиувилля с самоподобным весом канторовского типа. — *Функциональный анализ и его приложения*, 2013, т. 47, № 4, с. 18–29.
26. *Kac M., Kiefer J., Wolfowitz J.* On tests of normality and other tests of goodness of fit based on distance methods. — *Ann. Math. Statist.*, 1955, v. 26, № 2, p. 189–211.
27. *Гузман И. И.* О некоторых предельных теоремах для условных распределений и

- о связанных с ними задачах математической статистики. — Укр. матем. журн., 1953, т. 5, № 4.
28. Гизман И. И. Процессы Маркова в задачах математической статистики. — Укр. матем. журн., 1954, т. 6, с. 28–36.
29. *Durbin J.* Weak convergence of the sample distribution function when parameters are estimated. — *Ann. Statist.*, 1973, v. 1, № 2, p. 279–290.
30. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве: Учебное пособие. Ленинград: Изд-во Ленинградского ун-та, 1980.
31. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции: Пер. с англ. М.: Наука, 1985.
32. *Blair J. M., Edwards C. A., Johnson J. H.* Rational Chebychev approximations for the inverse of the error function. — *Math. Comput.*, 1976, v. 30, № 136, p. 827–830.

Поступила в редакцию
11.II.2015