Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Алиев, Т. Ханиев, Б. Геве́р, Теорема о слабой сходимости для эргодического распределения случайного процесса с дискретным вмешательством случая и обобщенным отражающим барьером, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2015, том 60, выпуск 3, 594–605

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4639>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 17:13:52

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2015 г.

АЛИЕВ Р.*, ХАНИЕВ Т.** , ГЕВЕР Б.***

ТЕОРЕМА О СЛАБОЙ СХОДИМОСТИ ДЛЯ ЭРГОДИЧЕСКОГО
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С ДИСКРЕТНЫМ
ВМЕШАТЕЛЬСТВОМ СЛУЧАЯ И ОБОБЩЕННЫМ
ОТРАЖАЮЩИМ БАРЬЕРОМ

Строится случайный процесс $X(t)$, называемый процессом с дискретным вмешательством случая и обобщенным отражающим барьером, и доказывается эргодичность этого процесса. С помощью основного тождества для случайных блужданий характеристическая функция эргодического распределения выражается через характеристики граничного функционала $S_{N_1(x)}$. Более того, доказывается теорема о слабой сходимости при $\lambda \rightarrow \infty$ для эргодического распределения стандартизированного процесса $Y_\lambda(t) \equiv X(t)/\lambda$ и находится предельный вид эргодического распределения.

Ключевые слова и фразы: случайный процесс с дискретным вмешательством случая, отражающий барьер, эргодическое распределение, лестничные случайные величины, остающееся время ожидания.

1. Введение. Пусть $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$, $n \geq 1$, — две независимые последовательности случайных величин, определенных на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, и в каждой из последовательностей случайные величины независимы и одинаково распределены. Предположим, что случайные величины ξ_n принимают только положительные, а случайные величины η_n — как положительные, так и отрицательные значения и их функции распределения

$$\Phi(t) = \mathbf{P}\{\xi_1 \leq t\}, \quad t > 0, \quad F(x) = \mathbf{P}\{\eta_1 \leq x\}, \quad x \in (-\infty, \infty),$$

известны. Определим процесс восстановления $\{T_n\}$ и случайное блуждание $\{S_n\}$ формулами

$$T_0 \equiv S_0 \equiv 0; \quad T_n = \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad S_n = \sum_{i=1}^n \eta_i, \quad n = 1, 2, \dots$$

* Department of Probability Theory and Mathematical Statistics, Baku State University; Institute of Cybernetics, Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan; e-mail: aliyevrt@mail.ru; aliyeurovshan@yahoo.com

** Institute of Cybernetics, Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan; Department of Industrial Engineering, TOBB University of Economics and Technology, Ankara, Turkey; e-mail: tahirkhaniyev@etu.edu.tr

*** Department of Industrial Engineering, TOBB University of Economics and Technology, Ankara, Turkey.

Введем также следующие случайные величины:

$$N_1 \equiv N_1(\lambda z) = \inf\{k \geq 1: \lambda z - S_k < 0\}, \quad \lambda > 0 \quad (\inf \emptyset = +\infty),$$

$$\zeta_1 \equiv \zeta_1(\lambda z) = |\lambda z - S_{N_1}|;$$

$$N_n \equiv N_n(\lambda \zeta_{n-1}) = \inf\{k \geq N_{n-1} + 1: \lambda \zeta_{n-1} - (S_k - S_{N_{n-1}}) < 0\},$$

$$\zeta_n \equiv \zeta_n(\lambda \zeta_{n-1}) = |\lambda \zeta_{n-1} - (S_{N_n} - S_{N_{n-1}})|, \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$N_0 = 0, \quad \zeta_0 = z \geq 0.$$

Используя случайные величины $\{N_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, построим последовательность $\{\tau_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, следующим образом:

$$\tau_0 \equiv 0, \quad \tau_1 \equiv \tau_1(\lambda z) = \sum_{i=1}^{N_1} \xi_i,$$

$$\tau_n \equiv \tau_n(\lambda \zeta_{n-1}) = \sum_{i=1}^{N_n} \xi_i, \quad n = 2, 3, \dots$$

Далее, положим $\nu(t) = \max\{n \geq 0: T_n \leq t\}$, $t > 0$. Теперь мы можем построить случайный процесс

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda \zeta_n - (S_{\nu(t)} - S_{N_n})) I_{[\tau_n, \tau_{n+1})}(t),$$

где $I_A(t)$ — характеристическая функция множества A .

Выборочная траектория процесса $X(t)$ показана на рис. 1.

Рис. 1. Выборочная траектория процесса $X(t)$.

Мы называем процесс $X(t)$ случайным процессом с дискретным вмешательством случая и обобщенным отражающим барьером. Похожие процессы изучались, например, в [1], [2], [7], [8].

2. Эргодичность процесса $X(t)$. Прежде чем доказывать теорему о слабой сходимости, мы должны показать, что процесс $X(t)$ является эргодическим. Чтобы сформулировать соответствующее утверждение, введем лестничные моменты (ν_i^+) и лестничные высоты (χ_i^+) для случайного блуждания $\{S_n\}$, $n \geq 0$:

$$\nu_1^+ = \min\{n \geq 1: S_n > 0\}, \quad \chi_1^+ = S_{\nu_1^+} = \sum_{i=1}^{\nu_1^+} \eta_i$$

и при $m = 1, 2, \dots$

$$\nu_{m+1}^+ = \min \left\{ n \geq 1: S_{\nu_m^+ + n} > \chi_m^+ \right\}, \quad \chi_{m+1}^+ = S_{\nu_{m+1}^+} = \sum_{i=1}^{\nu_{m+1}^+} \eta_i.$$

Случайные величины ν_n^+ , $n \geq 2$, независимы в совокупности и имеют то же распределение, что и ν_1^+ . Известно также, что случайные величины χ_n^+ , $n \geq 2$, независимы в совокупности и имеют то же распределение, что и χ_1^+ (см. [5, гл. XI]). В этом случае, согласно принципу Дынкина (см. [9]), $N_1(\lambda z)$ и $S_{N_1(\lambda z)}$ можно представить в виде

$$N_1(\lambda z) = \sum_{i=1}^{H(\lambda z)} \nu_i^+ \quad \text{и} \quad S_{N_1(\lambda z)} = \sum_{i=1}^{H(\lambda z)} \chi_i^+,$$

где $H(x) \equiv \min\{n \geq 1: \sum_{i=1}^n \chi_i^+ > x\}$.

Теорема 2.1. Пусть последовательности случайных величин $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$, $n \geq 1$, удовлетворяют следующим дополнительным условиям:

- (i) $\mathbf{E} \xi_1 < \infty$; (ii) $\mathbf{E} \eta_1 > 0$; (iii) $\mathbf{E} \eta_1^2 < \infty$;
- (iv) η_1 имеет неарифметическое распределение.

Тогда процесс $X(t)$ является эргодическим и для любой измеримой функции $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ с вероятностью единица выполнено соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X(u)) du = \frac{1}{\mathbf{E} N_1(\lambda \zeta)} \int_0^\infty f(x) d_x \mathbf{E} A(x, \lambda \zeta), \quad (2.1)$$

где

$$\mathbf{E} N_1(\lambda \zeta) = \int_0^\infty \mathbf{E} N_1(\lambda z) d\pi_\lambda(z), \quad \mathbf{E} A(x, \lambda \zeta) = \int_0^\infty A(x, \lambda z) d\pi_\lambda(z),$$

$$A(x, \lambda z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(x, \lambda z),$$

$$a_n(x, \lambda z) = \mathbf{P}\{\lambda z - S_i > 0, i = \overline{1, n}; \lambda z - S_n \leq x\}, \quad n \geq 1, \quad x > 0,$$

а $\pi_\lambda(z)$ есть эргодическое распределение марковской цепи $\{\zeta_n\}$, $n = 0, 1, \dots$. Кроме того, случайная величина ζ имеет распределение $\pi_\lambda(z)$, т.е. $\pi_\lambda(z) \equiv \mathbf{P}\{\zeta \leq z\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\zeta_n \leq z\}$.

Доказательство. Рассматриваемый процесс принадлежит широкому классу процессов, называемому в литературе процессами с дискретным вмешательством случая. Для этого класса процессов в [4] приведена общая эргодическая теорема, согласно которой нам достаточно проверить, что выполнены следующие условия.

Условие 1. Найдется неубывающая последовательность марковских моментов такая, что значения случайного процесса $X(t)$ в эти моменты образуют вложенную марковскую цепь, которая является эргодической.

Чтобы проверить выполнение этого условия, достаточно рассмотреть последовательность случайных моментов $\{\tau_n\}$, $n \geq 0$, определенных в п. 1. Из определения нетрудно сделать вывод, что $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n < \dots$.

С другой стороны, значения процесса $X(t)$ в эти моменты равны $\lambda \zeta_n = X(\tau_n + 0)$. В нашем случае случайные величины $\zeta_n \equiv \zeta_n(\lambda \zeta_{n-1}) = |\lambda \zeta_{n-1} - (S_{N_n} - S_{N_{n-1}})|$, $n = 1, 2, \dots$, образуют вложенную марковскую цепь. Эта марковская цепь $\{\zeta_n\}$, $n \geq 1$, является эргодической со стационарным распределением $\pi_\lambda(z)$ (см. [3, гл. 12, § 7, пример 10 и следствие 6]). Таким образом, первое условие общей эргодической теоремы выполнено.

У с л о в и е 2. Математическое ожидание интервала времени между последовательными марковскими моментами $\{\tau_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, конечно, т.е. для каждого $n = 1, 2, \dots$

$$\mathbf{E}(\tau_n - \tau_{n-1}) < \infty. \quad (2.2)$$

Поскольку случайные величины $\tau_n - \tau_{n-1}$, $n = 2, 3, \dots$, независимы и одинаково распределены, то для доказательства соотношения (2.2) достаточно показать, что

$$\mathbf{E} \tau_1(\lambda z) < \infty; \quad \mathbf{E} \tau_1(\lambda \zeta) \equiv \int_0^\infty \mathbf{E} \tau_1(\lambda z) d\pi_\lambda(z) < \infty. \quad (2.3)$$

Используя тождество Вальда (см. [5, гл. XVIII, § 2]), получаем

$$\mathbf{E} \tau_1(\lambda z) = \mathbf{E} \sum_{i=1}^{N_1(\lambda z)} \xi_i = \mathbf{E} \xi_1 \mathbf{E} N_1(\lambda z). \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в (2.3), приходим к равенству

$$\mathbf{E} \tau_1(\lambda \zeta) = \mathbf{E} \xi_1 \int_0^\infty \mathbf{E} N_1(\lambda z) d\pi_\lambda(z). \quad (2.5)$$

По условию теоремы 2.1 имеем $\mathbf{E} \xi_1 < \infty$. Поэтому для того чтобы было выполнено условие (2.2), должен быть конечен следующий интеграл:

$$\int_0^\infty \mathbf{E} N_1(\lambda z) d\pi_\lambda(z) < \infty. \quad (2.6)$$

Используя тождество Вальда, получаем

$$\mathbf{E} N_1(\lambda z) = \mathbf{E} \sum_{i=1}^{H(\lambda z)} \nu_i^+ = \mathbf{E} H(\lambda z) \mathbf{E} \nu_1^+ = U_+(\lambda z) \mathbf{E} \nu_1^+. \quad (2.7)$$

Функция $U_+(\lambda z) \equiv \mathbf{E} H(\lambda z)$ есть функция восстановления, порожденная лестничными высотами $\{\chi_n^+\}$, $n \geq 1$. Условие $U_+(\lambda z) < \infty$ выполнено для любого $0 < z < \infty$ (см. [5, гл. XI]). С другой стороны, поскольку $\mathbf{E} \eta_1 > 0$, мы имеем $\mathbf{E} \nu_1^+ < \infty$ (см. [5, гл. XI]). Поэтому $\mathbf{E} N_1(\lambda z) < \infty$. Следовательно, соотношение (2.6) будет доказано, если мы покажем, что

$$\mathbf{E} U_+(\lambda \zeta) = \int_0^\infty U_+(\lambda z) d\pi_\lambda(z) < \infty. \quad (2.8)$$

Поскольку случайная величина η_1 имеет неарифметическое распределение, то и χ_1^+ имеет неарифметическое распределение. С другой стороны, условия доказываемой теоремы гарантируют, что $0 < \mu_1 = \mathbf{E} \chi_1^+ < \infty$. Поэтому по теореме восстановления (см. [5, гл. XI, § 1]) при $z \rightarrow \infty$

$$U_+(\lambda z) = \frac{\lambda z}{\mu_1} + \mu_{21} + g(\lambda z), \quad (2.9)$$

где $\mu_{21} = \mu_2/(2\mu_1)$, $\mu_k = \mathbf{E}(\chi_1^+)^k$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$.

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует число $b(\varepsilon)$ такое, что $0 < b(\varepsilon) < \infty$ и для любого $z \geq b(\varepsilon)$

$$|g(\lambda z)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.10)$$

Теперь (2.8) можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{E} U_+(\lambda \zeta) = \int_0^{b(\varepsilon)} U_+(\lambda z) d\pi_\lambda(z) + \int_{b(\varepsilon)}^\infty U_+(\lambda z) d\pi_\lambda(z) \equiv J_1(\varepsilon) + J_2(\varepsilon). \quad (2.11)$$

Функция $U_+(\lambda z)$ не убывает, поэтому для любого $z \leq b(\varepsilon)$ выполнены соотношения $U_+(\lambda z) \leq U_+(\lambda b(\varepsilon)) < \infty$. Следовательно,

$$J_1(\varepsilon) \equiv \int_0^{b(\varepsilon)} U_+(\lambda z) d\pi_\lambda(z) \leq U_+(\lambda b(\varepsilon)) \int_0^{b(\varepsilon)} d\pi_\lambda(z) \leq U_+(\lambda b(\varepsilon)). \quad (2.12)$$

С другой стороны, в силу определения (2.10) числа $b(\varepsilon)$ имеем

$$U_+(\lambda b(\varepsilon)) \leq \frac{\lambda b(\varepsilon)}{\mu_1} + \mu_{21} + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.13)$$

Из (2.12) и (2.13) получаем

$$J_1(\varepsilon) \leq \frac{\lambda b(\varepsilon)}{\mu_1} + \mu_{21} + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.14)$$

Теперь оценим второй интеграл в (2.11):

$$J_2(\varepsilon) \leq \frac{1}{\mu_1} \int_{b(\varepsilon)}^{\infty} \lambda z d\pi_{\lambda}(z) + \mu_{21} + \int_{b(\varepsilon)}^{\infty} g(\lambda z) d\pi_{\lambda}(z) \leq \frac{\lambda \mathbf{E} \zeta}{\mu_1} + \mu_{21} + \frac{\varepsilon}{2}, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{E} \zeta \equiv \int_0^{\infty} (1 - \pi_{\lambda}(\nu)) d\nu.$$

Подставляя в (2.11) оценки (2.14) и (2.15), получаем

$$\mathbf{E} U_+(\lambda \zeta) \leq \frac{\lambda(\mathbf{E} \zeta + b(\varepsilon))}{\mu_1} + \mu_{21} + \varepsilon. \quad (2.16)$$

При условиях доказываемой теоремы выполнено соотношение $\mathbf{E} \zeta < \infty$. С другой стороны, для любых $0 < \lambda < \infty$ и $\varepsilon > 0$ имеем $0 < b(\varepsilon) < \infty$. Следовательно, из (2.16) получаем

$$\mathbf{E} U_+(\lambda \zeta) < \infty. \quad (2.17)$$

Итак, мы показали, что $\mathbf{E} \tau_1 < \infty$ и $\mathbf{E}(\tau_n - \tau_{n-1}) < \infty$ ($n = 2, 3, \dots$). Это доказывает выполнение условия 2. Таким образом, в предположениях теоремы 2.1 выполнены все условия общей эргодической теоремы. Следовательно, процесс $X(t)$ является эргодическим и для любой измеримой ограниченной функции $f(x)$ следующее соотношение выполнено с вероятностью единица (см. [6]):

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X(u)) du &= \frac{1}{\mathbf{E} \tau_1} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(x) P_{\lambda z} \{ \tau_1 > t; X(t) \in dx \} dt d\pi_{\lambda}(z) \\ &= \frac{1}{\mathbf{E} \tau_1} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(x) d_x G(t, x, \lambda z) dt d\pi_{\lambda}(z), \end{aligned} \quad (2.18)$$

где

$$G(t, x, \lambda z) \equiv P_{\lambda z} \{ \tau_1 > t; X(t) \leq x \} \equiv \mathbf{P} \{ \tau_1 > t; X(t) \leq x | X(0) = \lambda z \}.$$

Наконец, выразим $G(t, x, \lambda z)$ через вероятностные характеристики случайного блуждания $\{S_n\}$, $n \geq 1$. Поскольку последовательности $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$, $n \geq 1$, независимы, то

$$\begin{aligned} G(t, x, \lambda z) &= P_{\lambda z} \{ \tau_1 > t; X(t) \leq x \} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{\lambda z} \{ \nu(t) = n; T_{N_1} > t; X(t) \leq x \} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P} \{ T_n \leq t < T_{n+1}; N_1 > n; \lambda z - S_n \leq x \} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\Phi^{*(n)}(t) - \Phi^{*(n+1)}(t) \right) a_n(x, \lambda z), \end{aligned} \quad (2.19)$$

где

$$\Phi^{*(n)}(t) = \mathbf{P} \{ T_n \leq t \}, \quad \Phi^{*(0)}(t) = \varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

$$a_0(x, \lambda z) = \varepsilon(x - \lambda z), \quad a_n(x, \lambda z) = \mathbf{P} \{ \lambda z - S_i > 0, i = \overline{1, n}; \lambda z - S_n \leq x \}, \quad n \geq 1.$$

Применяя преобразование Лапласа, из (2.19) получаем

$$\tilde{G}(\beta, x, \lambda z) = \frac{1 - \varphi(\beta)}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi(\beta))^n a_n(x, \lambda z), \quad (2.20)$$

где

$$\tilde{G}(\beta, x, \lambda z) = \int_0^{\infty} e^{-\beta t} G(t, x, \lambda z) dt$$

и $\varphi(\beta) = \mathbf{E} e^{-\beta \xi_1}$, $\beta > 0$.

Поскольку $|\varphi(\beta)| = |\mathbf{E} e^{-\beta \xi_1}| \leq \mathbf{E} |e^{-\beta \xi_1}| \leq 1$ для любого $\beta > 0$, то

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi(\beta))^n a_n(x, \lambda z) \right| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |\varphi(\beta)|^n a_n(x, \lambda z) \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\infty, \lambda z) = \mathbf{E} N_1(\lambda z) < \infty. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Следовательно, в (2.20) можно перейти к пределу при $\beta \rightarrow 0$. Принимая во внимание соотношения $\lim_{\beta \rightarrow 0} (1 - \varphi(\beta))/\beta = \mathbf{E} \xi_1$ и $\lim_{\beta \rightarrow 0} \varphi(\beta) = 1$, из (2.20) получаем

$$\int_0^{\infty} G(t, x, \lambda z) dt = \lim_{\beta \rightarrow 0} \tilde{G}(\beta, x, \lambda z) = \mathbf{E} \xi_1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, \lambda z) = \mathbf{E} \xi_1 A(x, \lambda z). \quad (2.22)$$

Наконец, подставляя в (2.18) соотношения (2.5) и (2.22), приходим к утверждению теоремы 2.1.

Если в (2.1) положить $f(x) = e^{i\alpha x}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, получим следующее утверждение.

Следствие 2.1. Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда характеристическая функция $(\varphi_X(\alpha))$ эргодического распределения процесса $X(t)$ имеет вид

$$\varphi_X(\alpha) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} e^{i\alpha X(t)} = \frac{\mathbf{E} A^*(\alpha, \lambda \zeta)}{\mathbf{E} N_1(\lambda \zeta)}, \quad (2.23)$$

где $\mathbf{E} A^*(\alpha, \lambda \zeta) = \int_0^{\infty} e^{i\alpha x} d_x \mathbf{E} A(x, \lambda \zeta)$.

Предложение 2.1. Предположим, что выполнены условия теоремы 2.1. Тогда характеристическая функция $\varphi_X(\alpha)$ эргодического распределения процесса $X(t)$ выражается через характеристики граничных функционалов $N_1(\lambda z)$ и $S_{N_1(\lambda z)}$ следующим образом:

$$\varphi_X(\alpha) = \frac{1}{\mathbf{E} N_1(\lambda \zeta)} \int_0^{\infty} e^{i\alpha \lambda z} \frac{\varphi_{S_{N_1(\lambda z)}}(-\alpha) - 1}{\varphi_{\eta}(-\alpha) - 1} d\pi_{\lambda}(z), \quad \alpha \neq 0, \quad (2.24)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{\eta}(-\alpha) &= \mathbf{E} \exp(-i\alpha \eta_1), \quad \varphi_{S_{N_1(\lambda \zeta)}}(-\alpha) = \mathbf{E} \exp(-i\alpha S_{N_1(\lambda \zeta)}), \\ S_{N_1(\lambda \zeta)} &= \sum_{i=1}^{N_1(\lambda \zeta)} \eta_i, \quad \mathbf{E} N_1(\lambda \zeta) = \int_0^{\infty} \mathbf{E} N_1(\lambda z) d\pi_{\lambda}(z). \end{aligned}$$

Доказательство. Из определения следует, что случайная величина $N_1(\lambda z)$ есть момент первого выхода случайного блуждания $\{S_n\}$, $n \geq 1$ из интервала $B_{\lambda z} = (-\infty, \lambda z)$. Для произвольного подмножества $I \subseteq B'_{\lambda z}$ обозначим $d_n(I, \lambda z) = \mathbf{P}\{N_1(\lambda z) = n, S_{N_1(\lambda z)} \in I\}$, где $B'_{\lambda z}$ — дополнительное множество к множеству $B_{\lambda z}$. Предположим, что $d_n(I, \lambda z) = 0$ для любого $n \geq 0$ и любого $I \subset B_{\lambda z}$. Из определения случайной величины $N_1(\lambda z)$ следует, что для каждого $I \subseteq B'_{\lambda z}$ выполнено равенство

$$d_n(I, \lambda z) = \mathbf{P}\{S_k \in B_{\lambda z}, k = \overline{1, n-1}; S_n \in I\}. \quad (2.25)$$

Пусть для любого $n \geq 0$

$$\begin{aligned} c_n(I, \lambda z) &= \mathbf{P}\{S_1 \in B_{\lambda z}, \dots, S_{n-1} \in B_{\lambda z}, S_n \in I\}, \quad I \subset B_{\lambda z}; \\ c_n(I, \lambda z) &= 0, \quad I \subseteq B'_{\lambda z}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Введем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \tilde{d}^*(s, \alpha, \lambda z) &= \sum_{n=1}^{\infty} s^n \int_{B'_{\lambda z}} e^{i\alpha x} d_n(dx, \lambda z), \\ \tilde{c}^*(s, \alpha, \lambda z) &= \sum_{n=0}^{\infty} s^n \int_{B_{\lambda z}} e^{i\alpha v} c_n(dv, \lambda z). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Согласно основному тождеству для случайных блужданий (см. [5, гл. XVIII, § 1]), имеем

$$1 - \tilde{d}^*(s, \alpha, \lambda z) = \tilde{c}^*(s, \alpha, \lambda z)(1 - s\varphi_{\eta}(\alpha)). \quad (2.28)$$

Введем следующее преобразование:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \psi(s, \alpha, \lambda \zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} s^n \int_0^{\infty} d\pi_{\lambda}(z) \int_0^{\infty} e^{i\alpha x} \mathbf{P}\{\lambda z - S_k > 0, k = \overline{1, n}; \lambda z - S_n \in dx\}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Из (2.29) нетрудно вывести, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \psi(s, \alpha, \lambda \zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} s^n \int_0^{\infty} d\pi_{\lambda}(z) \int_0^{\infty} e^{i\alpha x} \mathbf{P}\{S_k < \lambda z, k = \overline{1, n}; \lambda z - S_n \in dx\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} s^n \int_0^{\infty} d\pi_{\lambda}(z) \int_{-\infty}^{\lambda z} e^{i\alpha(\lambda z - v)} \mathbf{P}\{S_k < \lambda z, k = \overline{1, n}; S_n \in dv\} \\ &= \int_0^{\infty} e^{i\alpha \lambda z} d\pi_{\lambda}(z) \sum_{n=0}^{\infty} s^n \int_{B_{\lambda z}} e^{-i\alpha v} \mathbf{P}\{S_k \in B_{\lambda z}, k = \overline{1, n}; S_n \in dv\}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Принимая во внимание (2.25)–(2.27), из (2.30) получаем

$$\mathbf{E} \psi(s, \alpha, \lambda \zeta) = \int_0^{\infty} e^{i\alpha \lambda z} \tilde{c}^*(s, -\alpha, \lambda z) d\pi_{\lambda}(z). \quad (2.31)$$

Подставляя (2.28) в (2.31), приходим к равенству

$$\mathbf{E} \psi(s, \alpha, \lambda \zeta) = \int_0^{\infty} e^{i\alpha \lambda z} \frac{1 - \tilde{d}^*(s, -\alpha, \lambda z)}{1 - s\varphi_{\eta}(-\alpha)} d\pi_{\lambda}(z). \quad (2.32)$$

Поскольку $|\tilde{c}^*(s, \alpha, \lambda z)| \leq \mathbf{E} N_1(\lambda z) < \infty$, то условия, гарантирующие конечность математического ожидания $\mathbf{E} N_1(\lambda z)$, гарантируют также существование и конечность предела при $s \rightarrow 1$ величин $\tilde{c}^*(s, \alpha, \lambda z)$. Поэтому в (2.32) можно перейти к пределу:

$$\mathbf{E} A^*(\alpha, \lambda \zeta) \equiv \lim_{s \rightarrow 1} \mathbf{E} \psi(s, \alpha, \lambda \zeta) = \int_0^{\infty} e^{i\alpha \lambda z} \frac{1 - \tilde{d}^*(1, -\alpha, \lambda z)}{1 - \varphi_{\eta}(-\alpha)} d\pi_{\lambda}(z), \quad (2.33)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{d}^*(1, \alpha, \lambda z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-i\alpha x} \mathbf{P}\{N_1(\lambda z) = n; S_{N_1(\lambda z)} \in dx\} \\ &= \int_0^{\infty} e^{-i\alpha x} \mathbf{P}\{S_{N_1(\lambda z)} \in dx\} = \mathbf{E} e^{-i\alpha S_{N_1(\lambda z)}} \\ &\equiv \varphi_{S_{N_1(\lambda z)}}(-\alpha). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Объединяя (2.34) и (2.33), получаем

$$\mathbf{E} A^*(\alpha, \lambda \zeta) = \int_0^\infty e^{i\alpha \lambda z} \frac{\varphi_{S_{N_1}(\lambda z)}(-\alpha) - 1}{\varphi_\eta(-\alpha) - 1} d\pi_\lambda(z), \quad \alpha \neq 0. \quad (2.35)$$

Наконец, подставляя (2.35) в (2.23), приходим к утверждению предложения 2.1.

3. Теорема о слабой сходимости. Чтобы сформулировать теорему о слабой сходимости, введем сначала следующий стандартизированный процесс: $Y_\lambda(t) \equiv X(t)/\lambda$.

Наша цель — найти эргодическое распределение процесса $Y_\lambda(t)$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Сформулируем сначала следующие предложения.

Предложение 3.1. *Предположим, что $g: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ — ограниченная функция и $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$. Тогда*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^\infty g(\lambda z) d\pi_\lambda(z) = 0.$$

Предложение 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда случайные величины*

$$Y_\lambda(0) = z, \quad Y_\lambda(\tau_n) = \zeta_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

образуют вложенную марковскую цепь со стационарным распределением $\pi_\lambda(x)$ и при $\lambda \rightarrow \infty$

$$\pi_\lambda(x) \rightarrow \pi_\infty(x) \equiv \frac{1}{\mu_1} \int_0^x (1 - F_+(v)) dv,$$

где $\mu_1 = \mathbf{E} \chi_1^+$, $F_+(x) \equiv \mathbf{P}\{\chi_1^+ \leq x\}$ и χ_1^+ есть первая лестничная высота случайного блуждания $\{S_n\}$, $n \geq 1$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что эргодическое распределение $\pi_\lambda(x)$ вложенной марковской цепи $\zeta_n = |\lambda \zeta_{n-1} - (S_{N_n} - S_{N_{n-1}})|$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяет следующему интегральному уравнению (см. [3, гл. 12, § 6]):

$$\pi_\lambda(x) = \int_0^\infty G_\lambda(x, v) d\pi_\lambda(v),$$

где

$$\begin{aligned} G_\lambda(x, v) &= \mathbf{P}\{\zeta_n \leq x \mid \zeta_{n-1} = v\} = P_{\lambda v}\{\zeta_1 \leq x\} \\ &= - \int_0^x (1 - F_+(t)) dt U_+(\lambda v + x - t) \end{aligned}$$

и $U_+(t) = \sum_{n=0}^\infty F_+^{*n}(t)$ (см. [9, теорема 1, а]). Следовательно (см. [9, теорема 1, б]), при $\lambda \rightarrow \infty$ имеем

$$\pi_\lambda(x) \rightarrow \pi_\infty(x) \equiv \frac{1}{\mu_1} \int_0^x (1 - F_+(v)) dv.$$

Таким образом, предложение 3.2 доказано.

З а м е ч а н и е. Случайная величина $\widehat{\chi}_\infty^+$, имеющая распределение $\pi_\infty(z)$, называется перескоком через бесконечно удаленный барьер [9].

Предложение 3.3. *Предположим, что $\mu_2 = \mathbf{E}(\chi_1^+)^2 < \infty$. Тогда имеет место следующее асимптотическое разложение: при $\lambda \rightarrow \infty$*

$$\mathbf{E} M_1(\lambda \zeta) = \lambda \mu_{21} + o(\lambda), \quad (3.1)$$

где $M_1(x) = \mathbf{E} S_{N(x)}$, $\mu_{21} = \mu_2/(2\mu_1)$, $\mu_1 = \mathbf{E} \chi_1^+ < \infty$, и

$$\mathbf{E} M_1(\lambda \zeta) = \int_0^\infty M_1(\lambda z) d\pi_\lambda(z).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя определение $M_1(x)$ и тождество Вальда (см. [5, гл. XVIII, § 2]), получаем

$$M_1(\lambda z) \equiv \mathbf{E} S_{N_1(\lambda z)} = \mathbf{E} \sum_{i=1}^{H(\lambda z)} \chi_i^+ = \mathbf{E} H(\lambda z) \mathbf{E} \chi_1^+ = \mu_1 U_+(\lambda z), \quad (3.2)$$

где $U_+(\lambda z) \equiv \mathbf{E} H(\lambda z)$. Поскольку $\mu_2 = \mathbf{E} (\chi_1^+)^2 < \infty$, то, согласно варианту теоремы восстановления (см. [5, гл. XI]), справедливо следующее равенство:

$$M_1(\lambda z) = \lambda z + \mu_{21} + g(\lambda z), \quad (3.3)$$

где $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$. Принимая во внимание (3.3), получаем

$$\mathbf{E} M_1(\lambda \zeta) = \int_0^\infty M_1(\lambda z) d\pi_\lambda(z) = \lambda \mathbf{E} \zeta + \mu_{21} + J(\lambda), \quad (3.4)$$

где $J(\lambda) = \int_0^\infty g(\lambda z) d\pi_\lambda(z)$. В силу предложения 3.1 выполнено равенство $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} J(\lambda) = 0$.

С другой стороны, в силу предложения 3.2 имеем: при $\lambda \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \zeta &\equiv \int_0^\infty (1 - \pi_\lambda(v)) dv \rightarrow \int_0^\infty (1 - \pi_\infty(v)) dv \\ &= \frac{1}{\mu_1} \int_0^\infty u(1 - F_+(u)) du = \frac{\mu_2}{2\mu_1} = \mu_{21}. \end{aligned}$$

Поэтому при $\lambda \rightarrow \infty$ справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$\mathbf{E} \zeta = \mu_{21} + o(1). \quad (3.5)$$

Отсюда и из (3.4) получаем (3.1). Таким образом, предложение 3.3 доказано.

В следующей теореме описывается предельный вид характеристической функции эргодического распределения случайной величины $Y_\lambda(t)$.

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда характеристическая функция $(\varphi_{Y_\lambda}(\alpha))$ эргодического распределения процесса $Y_\lambda(t)$ сходится при $\lambda \rightarrow \infty$ к предельной функции $\widehat{\varphi}_+(\alpha)$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi_{Y_\lambda}(\alpha) = \widehat{\varphi}_+(\alpha) \equiv \frac{\widehat{\varphi}_+(\alpha) - 1}{i\alpha\mu_{21}}, \quad \alpha \neq 0,$$

где $\widehat{\varphi}_+(\alpha) \equiv (\varphi_+(\alpha) - 1)/(i\alpha\mu_1)$, $\varphi_+(\alpha) = \mathbf{E} \exp(-i\alpha\chi_1^+)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В основе доказательства лежит соотношение (2.24). По определению имеем

$$\varphi_{Y_\lambda(t)}(\alpha) = \mathbf{E} \exp(i\alpha Y_\lambda(t)) = \mathbf{E} \exp\left(i \frac{\alpha}{\lambda} X(t)\right) = \varphi_{X(t)}\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right). \quad (3.6)$$

Таким образом, характеристическая функция $\varphi_{Y_\lambda}(\alpha)$ эргодического распределения случайной величины $Y_\lambda(t)$ выражается через характеристическую функцию $\varphi_X(\alpha)$:

$$\varphi_{Y_\lambda}(\alpha) = \varphi_X\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right). \quad (3.7)$$

Подставляя (3.7) в (2.24), получаем следующее равенство:

$$\varphi_{Y_\lambda}(\alpha) = \frac{1}{I_2(\lambda)} \int_0^\infty I_1(\lambda, z) d\pi_\lambda(z), \quad (3.8)$$

где $I_1(\lambda, z) \equiv e^{i\alpha z}(\varphi_{S_{N_1(\lambda z)}}(-\alpha/\lambda) - 1)$, $I_2(\lambda) \equiv (\mathbf{E} N_1(\lambda \zeta))(\varphi_\eta(-\alpha/\lambda) - 1)$.

Изучим асимптотическое поведение $I_1(\lambda, z)$ и $I_2(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}\varphi_{S_{N_1}(\lambda z)}\left(-\frac{\alpha}{\lambda}\right) &= \mathbf{E} \exp\left(-i\frac{\alpha}{\lambda} S_{N_1}(\lambda z)\right) \\ &= e^{-i\alpha z} \mathbf{E} \exp\left(-i\frac{\alpha}{\lambda} \widehat{S}_{N_1}(\lambda z)\right),\end{aligned}\quad (3.9)$$

где $\widehat{S}_{N_1}(\lambda z) \equiv S_{N_1}(\lambda z) - \lambda z$.

Поскольку первый момент граничного функционала $\widehat{S}_{N_1}(\lambda z)$ конечен, то при $\lambda \rightarrow \infty$ справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$\mathbf{E} \exp\left(-i\frac{\alpha}{\lambda} \widehat{S}_{N_1}(\lambda z)\right) = 1 - i\frac{\alpha}{\lambda} \mathbf{E} \widehat{S}_{N_1}(\lambda z) + \frac{1}{\lambda} g(\lambda z), \quad (3.10)$$

где $g(x)$ — ограниченная функция и $g(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Из (3.9) и (3.10) следует, что при $\lambda \rightarrow \infty$

$$\varphi_{S_{N_1}(\lambda z)}\left(-\frac{\alpha}{\lambda}\right) = e^{-i\alpha z} \left(1 - i\frac{\alpha}{\lambda} \mathbf{E} \widehat{S}_{N_1}(\lambda z) + \frac{1}{\lambda} g(\lambda z)\right). \quad (3.11)$$

Используя (3.11), получаем

$$\begin{aligned}I_1(\lambda, z) &\equiv e^{i\alpha z} \left(\varphi_{S_{N_1}(\lambda z)}\left(-\frac{\alpha}{\lambda}\right) - 1\right) \\ &= (1 - e^{-i\alpha z}) - i\frac{\alpha}{\lambda} \mathbf{E} \widehat{S}_{N_1}(\lambda z) + \frac{1}{\lambda} g(\lambda z).\end{aligned}\quad (3.12)$$

В силу предложения 3.3 имеем $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathbf{E} \widehat{S}_{N_1}(\lambda z) = \mu_{21}$.

Интегрируя обе части соотношения (3.12) от 0 до ∞ по $d\pi_\lambda(z)$, получаем следующее асимптотическое разложение:

$$\int_0^\infty I_1(\lambda, z) d\pi_\lambda(z) = (1 - \varphi_\zeta(\alpha)) - i\frac{\alpha}{\lambda} \mu_{21} + \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty g(\lambda z) d\pi_\lambda(z) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right). \quad (3.13)$$

Используя предложение 3.1, можно переписать (3.13) в виде

$$\int_0^\infty I_1(\lambda, z) d\pi_\lambda(z) = (1 - \varphi_\zeta(\alpha)) - i\frac{\alpha}{\lambda} \mu_{21} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad (3.14)$$

где $\varphi_\zeta(\alpha) \equiv \mathbf{E} \exp(i\alpha\zeta) = \int_0^\infty e^{i\alpha z} d\pi_\lambda(z)$.

Заметим, что

$$\varphi_\zeta(\alpha) = \widehat{\varphi}_+(\alpha) + o(1), \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

где $\widehat{\varphi}_+(\alpha) \equiv (\varphi_+(\alpha) - 1)/(i\alpha\mu_1)$.

Нетрудно также заметить, что для знаменателя дроби в (3.8) справедливо следующее асимптотическое разложение: при $\lambda \rightarrow \infty$

$$I_2(\lambda) = -\mathbf{E}(M_1(\lambda\zeta)) \frac{i\alpha}{\lambda} \left(1 - \frac{i\alpha}{\lambda} m_{21} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right), \quad (3.15)$$

где $m_{21} = m_2/(2m_1)$, $m_k = \mathbf{E} \eta_1^k$, $k = 1, 2$. Принимая во внимание предложение 3.3, мы можем переписать (3.15) в виде

$$I_2(\lambda) = -i\alpha\mu_{21} + o(1). \quad (3.16)$$

Подставляя (3.14) и (3.16) в (3.8), получаем: при $\lambda \rightarrow \infty$

$$\varphi_{Y_\lambda}(\alpha) = \frac{1}{I_2(\lambda)} \int_0^\infty I_1(\lambda, z) d\pi_\lambda(z) = \frac{\widehat{\varphi}_+(\alpha) - 1}{i\alpha\mu_{21}} + o(1).$$

Таким образом, для $Y_\lambda(t)$ справедливо следующее асимптотическое разложение: при $\lambda \rightarrow \infty$

$$\varphi_{Y_\lambda}(\alpha) = \widehat{\widehat{\varphi}}_+(\alpha) + o(1), \quad (3.17)$$

где $\widehat{\widehat{\varphi}}_+(\alpha) \equiv (\widehat{\varphi}_+(\alpha) - 1)/(i\alpha\mu_{21})$, $\alpha \neq 0$, и $\widehat{\varphi}_+(\alpha) \equiv (\varphi_+(\alpha) - 1)/(i\alpha\mu_1)$.

Из (3.17) получаем, что при $\lambda \rightarrow \infty$

$$\varphi_{Y_\lambda}(\alpha) \rightarrow \widehat{\widehat{\varphi}}_+(\alpha) \equiv \frac{\widehat{\varphi}_+(\alpha) - 1}{i\alpha\mu_{21}}, \quad \alpha \neq 0.$$

Теорема 3.1 доказана.

Используя теорему непрерывности для характеристических функций (см., например, [5]), нетрудно вывести теорему о сходимости из теоремы 3.1. Приведем следующее утверждение.

Предложение 3.4. *Функция $\widehat{\widehat{\varphi}}_+(\alpha) \equiv (\widehat{\varphi}_+(\alpha) - 1)/(i\alpha\mu_{21})$ является характеристической функцией предельного распределения остающегося времени ожидания для процесса восстановления, порожденного независимыми положительными случайными величинами, имеющими распределение*

$$\pi_\infty(x) \equiv \frac{1}{\mu_1} \int_0^x (1 - F_+(z)) dz,$$

где $F_+(x) \equiv \mathbf{P}\{\chi_1^+ \leq x\}$, $\mu_1 = \mathbf{E}\chi_1^+$.

Наконец, сформулируем основной результат настоящей статьи в виде следующей теоремы.

Теорема 3.2. *Предположим, что выполнены условия теоремы 3.1. Тогда процесс $Y_\lambda(t)$ является эргодическим и его эргодическая функция распределения $(Q_{Y_\lambda}(x))$ при $\lambda \rightarrow \infty$ слабо сходится к функции распределения $R(x)$, т.е. для всех $x > 0$*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} Q_{Y_\lambda}(x) = R(x) \equiv \frac{2}{\mu_2} \int_0^x \int_v^\infty (1 - F_+(u)) du dv. \quad (3.18)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 3.1 и предложения 3.4 следует, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} Q_{Y_\lambda}(x) = R(x) \equiv \frac{1}{\mathbf{E}\widehat{\chi}_\infty^+} \int_0^x (1 - \pi_\infty(v)) dv, \quad (3.19)$$

где $\pi_\infty(x) \equiv (1/\mu_1) \int_0^x (1 - F_+(v)) dv$, $\mathbf{E}\widehat{\chi}_\infty^+ = \int_0^\infty (1 - \pi_\infty(v)) dv = \mu_{21}$. Теорема 3.2 доказана.

П р и м е р 3.1. Пусть $\eta_1 = X_1 - X_2$ где X_1 и X_2 — независимые экспоненциально распределенные случайные величины:

$$F_{X_1}(x) = 1 - e^{-ax}, \quad F_{X_2}(x) = 1 - e^{-bx}, \quad x > 0, \quad b > a > 0.$$

Нетрудно понять, что предельное распределение $R(x)$ тоже является экспоненциальным:

$$R(x) = 1 - e^{-ax}, \quad x > 0.$$

4. Выводы. Известно, что математическая структура эргодического распределения случайных процессов с отражающим барьером весьма сложна. Тем не менее мы получили полезную формулу для эргодического распределения случайного блуждания с отражающим барьером. Этот результат интересен также тем, что эргодическое распределение рассматриваемого процесса в пределе совпадает с распределением остающегося времени ожидания для некоторого специального процесса восстановления.

Авторы признательны анонимным рецензентам за ценные замечания и предложения, позволившие сделать изложение более наглядным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aliyev R. T., Khaniyev T. A., Kesemen T. Asymptotic expansions for the moments of the semi-Markovian random walk with gamma distributed interference of chance. — Commun. Statist. Theory Methods, 2010, v. 39, № 1, p. 130–143.
2. Aliyev R. T. Inventory model type of (s, S) with subexponential distributed demands. — Международная конференция «Теория вероятностей и ее приложения», посвященная 100-летию со дня рождения Б. В. Гнеденко (Москва, 26–30 июня 2012 г.). Тезисы докладов. М.: ЛЕНАНД, 2012, с. 77–78.
3. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: УРСС, 2003, 470 с.
4. Ежов И. И., Шуренков В. М. Эргодические теоремы, связанные с марковским свойством случайных процессов. — Теория вероятн. и ее примен., 1976, т. 21, № 3, с. 635–639.
5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М.: Мир, 1984, 751 с.
6. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов, т. 2. М.: Наука, 1973, 639 с.
7. Khaniyev T. A., Aliyev R. T., Gever B. Weak convergence theorem for ergodic distribution of a semi-Markovian random walk with a generalized reflecting barrier. — 8th World Congress in Probability and Statistics (Istanbul, 9–14 July 2012), 2012, p. 187.
8. Khaniev T. A., Ünver İ., Maden S. On the semi-Markovian random walk with two reflecting barriers. — Stoch. Anal. Appl., 2001, v. 1, № 5, p. 799–819.
9. Рогозин Б. А. О распределении величины первого перескока. — Теория вероятн. и ее примен., 1964, т. 9, № 3, с. 498–515.

Поступила в редакцию
26.III.2013

Исправленный вариант
3.XII.2014

© 2015 г.

ЖДАНОВ А. И.*

ВЕРОЯТНОСТИ ВЫСОКИХ ВЫБРОСОВ ТРАЕКТОРИЙ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГАУССОВСКИХ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ¹⁾

Пусть $(X(t), Y(t))$, $t \geq 0$, — центрированный стационарный гауссовский векторный процесс такой, что ковариационные функции его координат удовлетворяют условию Пикандса $r_i(t) = 1 - c_i |t|^{\alpha_i} (1 + o(1))$, $t \rightarrow 0$, $c_i > 0$, $0 < \alpha_i \leq 2$, $i = 1, 2$. Будем предполагать, что $r_i(t) < 1$ при $i = 1, 2$ и $t > 0$. В предположении, что $r \equiv \mathbf{E} X(t)Y(t) \in (-1, 1)$ и существует предел $\lim_{t, s \rightarrow 0} (\mathbf{E} X(t)Y(s) - r) / |t - s|^{\min(\alpha_1, \alpha_2)}$, найдена точная асимптотика вероятности $\mathbf{P}(\max_{t \in [0, p]} X(t)Y(t) > u)$ при $u \rightarrow \infty$ для произвольного $p > 0$. С помощью данного результата вычислена точная асимптотика вероятности $\mathbf{P}(\max_{t \in [0, p]} (X^2(t) - Y^2(t)) > u)$ при $u \rightarrow \infty$ для независимых процессов $X(t), Y(t)$ указанного вида и произвольного $p > 0$.

Ключевые слова и фразы: гауссовские процессы, гауссовский хаос, вероятности высоких выбросов, метод двойных сумм.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Москва, Россия; e-mail: zhdanova_e@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке проекта RARE-318984 (FP7 Marie Curie IRSES Fellowship).