Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Жданов, Вероятности высоких выбросов траекторий произведения гауссовских стационарных процессов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2015, том 60, выпуск 3, 605–613

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4640>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 14:48:59

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aliyev R. T., Khaniyev T. A., Kesemen T. Asymptotic expansions for the moments of the semi-Markovian random walk with gamma distributed interference of chance. — Commun. Statist. Theory Methods, 2010, v. 39, № 1, p. 130–143.
2. Aliyev R. T. Inventory model type of (s, S) with subexponential distributed demands. — Международная конференция «Теория вероятностей и ее приложения», посвященная 100-летию со дня рождения Б. В. Гнеденко (Москва, 26–30 июня 2012 г.). Тезисы докладов. М.: ЛЕНАНД, 2012, с. 77–78.
3. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: УРСС, 2003, 470 с.
4. Ежов И. И., Шуренков В. М. Эргодические теоремы, связанные с марковским свойством случайных процессов. — Теория вероятн. и ее примен., 1976, т. 21, № 3, с. 635–639.
5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М.: Мир, 1984, 751 с.
6. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов, т. 2. М.: Наука, 1973, 639 с.
7. Khaniyev T. A., Aliyev R. T., Gever B. Weak convergence theorem for ergodic distribution of a semi-Markovian random walk with a generalized reflecting barrier. — 8th World Congress in Probability and Statistics (Istanbul, 9–14 July 2012), 2012, p. 187.
8. Khaniev T. A., Ünver İ., Maden S. On the semi-Markovian random walk with two reflecting barriers. — Stoch. Anal. Appl., 2001, v. 1, № 5, p. 799–819.
9. Рогозин Б. А. О распределении величины первого перескока. — Теория вероятн. и ее примен., 1964, т. 9, № 3, с. 498–515.

Поступила в редакцию
26.III.2013

Исправленный вариант
3.XII.2014

© 2015 г.

ЖДАНОВ А. И.*

ВЕРОЯТНОСТИ ВЫСОКИХ ВЫБРОСОВ ТРАЕКТОРИЙ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГАУССОВСКИХ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ¹⁾

Пусть $(X(t), Y(t))$, $t \geq 0$, — центрированный стационарный гауссовский векторный процесс такой, что ковариационные функции его координат удовлетворяют условию Пикандса $r_i(t) = 1 - c_i |t|^{\alpha_i} (1 + o(1))$, $t \rightarrow 0$, $c_i > 0$, $0 < \alpha_i \leq 2$, $i = 1, 2$. Будем предполагать, что $r_i(t) < 1$ при $i = 1, 2$ и $t > 0$. В предположении, что $r \equiv \mathbf{E} X(t)Y(t) \in (-1, 1)$ и существует предел $\lim_{t, s \rightarrow 0} (\mathbf{E} X(t)Y(s) - r) / |t - s|^{\min(\alpha_1, \alpha_2)}$, найдена точная асимптотика вероятности $\mathbf{P}(\max_{t \in [0, p]} X(t)Y(t) > u)$ при $u \rightarrow \infty$ для произвольного $p > 0$. С помощью данного результата вычислена точная асимптотика вероятности $\mathbf{P}(\max_{t \in [0, p]} (X^2(t) - Y^2(t)) > u)$ при $u \rightarrow \infty$ для независимых процессов $X(t), Y(t)$ указанного вида и произвольного $p > 0$.

Ключевые слова и фразы: гауссовские процессы, гауссовский хаос, вероятности высоких выбросов, метод двойных сумм.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Москва, Россия; e-mail: zhdanova_e@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке проекта RARE-318984 (FP7 Marie Curie IRSES Fellowship).

1. Введение. Основной результат. В работе [1] Д. А. Коршунов, В. И. Питербарг и Э. Хашорва предложили общий способ вычисления вероятностей $\mathbf{P}(h(X) > u)$ для больших u , где X — гауссовский вектор, а h — однородная функция положительной степени. В общей постановке интересна задача асимптотического поведения вероятности высоких выбросов траектории *процесса гауссовского шума*

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, T]} h(X(t)) > u\right), \quad u \rightarrow \infty,$$

где $X(t)$ — гауссовский векторный случайный процесс с непрерывными траекториями. В работах В. И. Питербарга [5]–[4] и В. И. Питербарга и С. Стаматовича [5] рассмотрен случай процессов типа хи-квадрат (h — положительно-определенная квадратичная форма). Следующий шаг на пути к получению точной асимптотики был сделан в работе [6], где рассматривался случай произведения двух независимых центрированных стационарных гауссовских случайных процессов. В настоящей статье изучается вероятность высоких выбросов траектории произведения двух зависимых центрированных стационарных гауссовских процессов. Доказательство строится по той же схеме, что и в упомянутой работе [6], т.е. мы применяем предложенный там вариант метода двойных сумм.

Пусть $(X(t), Y(t))$, $t \geq 0$, — центрированный стационарный гауссовский векторный процесс такой, что ковариационные функции $r_1(t)$, $r_2(t)$ его координат, удовлетворяют условию Пикандса

$$r_i(t) = 1 - c_i |t|^{\alpha_i} + o(|t|^{\alpha_i}), \quad t \rightarrow 0, \quad 0 < \alpha_i \leq 2, \quad c_i > 0, \quad i = 1, 2. \quad (1)$$

Обозначим $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$ и без ограничения общности будем считать, что $\alpha_1 \leq \alpha_2$. Предположим также, что $r_i(t) < 1$ для всех $t > 0$, $i = 1, 2$. Нашей целью является нахождение асимптотического поведения вероятности

$$\mathbf{P}\left(\max_{t \in [0, p]} X(t)Y(t) > u\right)$$

при $u \rightarrow \infty$ для произвольного $p > 0$. Пусть $r(t, s) := \mathbf{E} X(t)Y(s) = \text{cov}(X(t), Y(s))$ — ковариационная функция процессов $X(t)$ и $Y(s)$. В силу условий стационарности для всех $t, s \geq 0$

$$\mathbf{E} X(t)Y(t) \equiv r, \quad r(t, s) = r(t - s). \quad (2)$$

Напомним определение констант Пикандса:

$$H_\alpha(\Lambda) := \mathbf{E} \exp \left\{ \max_{t \in \Lambda} (\sqrt{2} B_{\alpha/2}(t) - |t|^\alpha) \right\}, \quad H_\alpha(T) := H_\alpha([0, T]), \quad H_\alpha = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{H_\alpha(T)}{T},$$

где $B_{\alpha/2}(t)$ — дробно-броуновское движение с показателем Херста $\alpha/2$. Известно, что $H_\alpha \in (0, \infty)$ (см. [5]).

Будем предполагать, что для ковариационной функции $r(t, s)$ существует следующий предел:

$$\lim_{t, s \rightarrow 0} \frac{r(t, s) - r}{|t - s|^\alpha} =: c. \quad (3)$$

Мы докажем, что при выполнении условия (1) случай $c = \pm\infty$ невозможен. Одновременное выполнение требований (1) и существования конечного предела в (3) накладывает ряд ограничений на параметры, фигурирующие в условиях. Приведем некоторые из них и сформулируем основные результаты.

Предложение 1. При сделанных выше предположениях (1) и (3) справедливы следующие утверждения.

1. $c \neq \pm\infty$.
2. Если $\alpha_1 < \alpha_2$, то $c = 0$.
3. Если $\alpha_1 = \alpha_2$, то $c_1 c_2 \geq c^2$.

Лемма 1. При сделанных выше предположениях и выполнении условия $r \in (-1, 1)$ справедливы следующие утверждения.

1. Если $\alpha = \alpha_1 < \alpha_2$, то для любого $T > 0$

$$\mathbf{P}\left(\max_{t \in [0, Tu^{-1/\alpha}]} X(t)Y(t) > u\right) = H_\alpha\left(\frac{c_1^{1/\alpha}}{(1+r)^{2/\alpha}} T\right) \times \frac{1+r}{\sqrt{2\pi u}} e^{-u/(1+r)}(1+o(1)), \quad u \rightarrow \infty.$$

2. Если $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$, то в случае $c_1 + c_2 - 2c > 0$ для любого $T > 0$

$$\mathbf{P}\left(\max_{t \in [0, Tu^{-1/\alpha}]} X(t)Y(t) > u\right) = H_\alpha\left(\frac{(c_1 + c_2 - 2c)^{1/\alpha}}{(1+r)^{2/\alpha}} T\right) \times \frac{1+r}{\sqrt{2\pi u}} e^{-u/(1+r)}(1+o(1)), \quad u \rightarrow \infty.$$

Теорема 1. При сделанных выше предположениях и выполнении условия $r \in (-1, 1)$ справедливы следующие утверждения.

1. Если $\alpha = \alpha_1 < \alpha_2$, то для любого $p > 0$

$$\mathbf{P}\left(\max_{t \in [0, p]} X(t)Y(t) > u\right) = H_\alpha \frac{pc_1^{1/\alpha}}{(1+r)^{2/\alpha-1}} \frac{u^{1/\alpha-1/2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-u/(1+r)}(1+o(1)), \quad u \rightarrow \infty.$$

2. Если $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$, то в случае $c_1 + c_2 - 2c > 0$ для любого $p > 0$

$$\mathbf{P}\left(\max_{t \in [0, p]} X(t)Y(t) > u\right) = H_\alpha \frac{p(c_1 + c_2 - 2c)^{1/\alpha}}{(1+r)^{2/\alpha-1}} \times \frac{u^{1/\alpha-1/2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-u/(1+r)}(1+o(1)), \quad u \rightarrow \infty.$$

Заметим, что в случае независимых процессов $X(t)$, $Y(t)$ эти предельные соотношения согласуются с полученными в [6].

Приведем следствие из теоремы. Пусть $Z_i(t)$, $t \geq 0$, $i = 1, \dots, d$, — независимые центрированные стационарные гауссовские процессы, ковариационные функции которых удовлетворяют условию Пикандса:

$$r_i(t) = 1 - c_i |t|^{\alpha_i} + o(|t|^{\alpha_i}), \quad t \rightarrow 0, \quad 0 < \alpha_i \leq 2, \quad c_i > 0, \quad i = 1, \dots, d.$$

Без ограничения общности будем предполагать, что $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_d$. Пусть также $r_i(t) < 1$ при всех $t > 0$, $i = 1, \dots, d$. Для произвольных ненулевых наборов действительных чисел $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_d)$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_d)$ и $p > 0$ рассмотрим задачу нахождения асимптотического поведения при $u \rightarrow \infty$ вероятности

$$P_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\mathbf{Z}) := \mathbf{P}\left(\max_{t \in [0, p]} (a_1 Z_1(t) + \dots + a_d Z_d(t))(b_1 Z_1(t) + \dots + b_d Z_d(t)) > u\right).$$

Определим $k_1 = \min\{k: a_k \neq 0\}$, $k_2 = \min\{k: b_k \neq 0\}$. Без ограничения общности будем предполагать, что $k_1 \leq k_2$. Пусть $\alpha_{k_1} = \dots = \alpha_{k_1+d_1} < \alpha_{k_1+d_1+1} \leq \dots \leq \alpha_d$ и $\alpha_{k_2} = \dots = \alpha_{k_2+d_2} < \alpha_{k_2+d_2+1} \leq \dots \leq \alpha_d$ для некоторых d_1 и d_2 . Для краткости записи введем обозначения

$$|\mathbf{a}|_d = \sqrt{\sum_{i=1}^d a_i^2}, \quad |\mathbf{a}|_{\mathbf{c}, d} = \sqrt{\sum_{i=1}^d c_i a_i^2}, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\mathbf{c}, d} = \sum_{i=1}^d c_i a_i b_i.$$

Используя данные обозначения и теорему 1, нетрудно доказать следующее утверждение.

Следствие 1. При сделанных выше предположениях, если $\mathbf{a}$ не равно $k\mathbf{b}$ ни для какого $k \in \mathbb{R}$, то для любого $p > 0$

$$P_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\mathbf{Z}) = H_{\alpha_{k_1}} \frac{p(|\mathbf{a}|_{\mathbf{c}, k_1+d_1}^2 |\mathbf{b}|_d^2 + |\mathbf{b}|_{\mathbf{c}, k_1+d_1}^2 |\mathbf{a}|_d^2 + 2|\mathbf{a}|_d |\mathbf{b}|_d (\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\mathbf{c}, k_1+d_1})^{1/\alpha_{k_1}}}{(|\mathbf{a}|_d |\mathbf{b}|_d + (\mathbf{a}, \mathbf{b})_{1,d})^{2/\alpha_{k_1}-1} (|\mathbf{a}|_d |\mathbf{b}|_d)^{1/\alpha_{k_1}+1/2}} \\ \times \frac{u^{1/\alpha_{k_1}-1/2}}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{u}{|\mathbf{a}|_d |\mathbf{b}|_d + (\mathbf{a}, \mathbf{b})_{1,d}} \right\} (1 + o(1)), \quad u \rightarrow \infty.$$

В частности, для любого $p > 0$

$$\mathbf{P} \left(\max_{t \in [0, p]} (Z_1^2(t) - Z_2^2(t)) > u \right) = H_{\alpha_1} p c_1^{1/\alpha_1} \frac{u^{1/\alpha_1-1/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-u/2} (1 + o(1)), \quad u \rightarrow \infty.$$

2. Доказательство предложения 1 и леммы 1.

Доказательство предложения 1 основано на применении неравенства Коши–Буняковского–Шварца к процессам

$$\xi(s) = X(s) - X(0) - r(Y(s) - Y(0)), \quad \eta(s) = Y(s) - Y(0)$$

и использовании предельных соотношений (1), (3).

Доказательство леммы 1. Приведем доказательство для случая $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$. Для краткости положим $c_1 = 1$, $c_2 = 1$ (комментарии к доказательству леммы в случае произвольных c_1, c_2 и/или $\alpha = \alpha_1 < \alpha_2$ будут даны в замечаниях 1 и 2 в конце настоящего пункта.) Пусть $\Delta_u := [0, Tu^{-1/\alpha}]$. Поскольку $r \in (-1, 1)$, то существует совместная плотность $X(0)$ и $Y(0)$ и

$$\mathbf{P} \left(\max_{t \in \Delta_u} Z(t) > u \right) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \left(\iint_{xy > u} + \iint_{xy \leq u, x > 0, y > 0} + \iint_{xy \leq u, x < 0, y < 0} + \iint_{xy \leq u, xy < 0} \right) \exp \left\{ -\frac{x^2 - 2rxy + y^2}{2(1-r^2)} \right\} \\ \times \mathbf{P} \left(\max_{\Delta_u} Z(t) > u \mid X(0) = x, Y(0) = y \right) dx dy. \quad (4)$$

Используя результат работы [1], найдем асимптотическое поведение первого интеграла при $u \rightarrow \infty$:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \iint_{xy > u} \exp \left\{ -\frac{x^2 - 2rxy + y^2}{2(1-r^2)} \right\} \cdot 1 dx dy \\ = \mathbf{P}(X(0)Y(0) > u) = \frac{1+r}{\sqrt{2\pi u}} \exp \left\{ -\frac{u}{1+r} \right\} \left(1 + O\left(\frac{1}{u}\right) \right).$$

Во втором интеграле (обозначим его I) сделаем замену переменных $x = \sqrt{u} - v/\sqrt{u}$, $y = \sqrt{u} - w/\sqrt{u}$. Поскольку третий интеграл «симметричен» второму, его исследование проводится аналогичным образом после замены $x = -\sqrt{u} + v/\sqrt{u}$, $y = -\sqrt{u} + w/\sqrt{u}$. Наконец, покажем, что четвертый интеграл бесконечно мал по сравнению с первыми тремя при $u \rightarrow \infty$.

Итак, вернемся ко второму интегралу. Определим два гауссовских случайных процесса

$$\xi_u(t) := \sqrt{u}(X(tu^{-1/\alpha}) - rY(tu^{-1/\alpha}) - (1-r)\sqrt{u}) + v - rw, \\ \eta_u(t) := \sqrt{u}(Y(tu^{-1/\alpha}) - \sqrt{u}) + w.$$

Для краткости положим $b := \sqrt{1 - r^2}$. Через E обозначим единичную матрицу размера 2×2 . Тогда

$$I = \frac{1}{u} \exp \left\{ -\frac{u}{1+r} \right\} \iint_{D_u(v,w)} \exp \left\{ \frac{v+w}{1+r} - \frac{v^2 - 2rvw + w^2}{2b^2u} \right\} \\ \times \mathbf{P} \left(\max_{[0,T]} \left(\xi_u(t) + (1+r)\eta_u(t) + \frac{1}{u} \zeta_u(t) \right) \right. \\ \left. > v + w - \frac{vw}{u} \middle| \xi_u(0) = 0, \eta_u(0) = 0 \right) dv dw, \quad (5)$$

где

$$D_u(v, w) := \left\{ (v, w) \in \mathbb{R}^2: v \leq u, w \leq u, v + w - \frac{vw}{u} \geq 0 \right\}$$

и

$$\zeta_u(t) := \xi_u(t)\eta_u(t) - w\xi_u(t) - v\eta_u(t) + r\eta_u^2(t) - wr\eta_u(t).$$

Вычислим условное математическое ожидание и условную ковариационную матрицу гауссовского векторного процесса $(\xi_u(t), \eta_u(t))$ при условии $\xi_u(0) = \eta_u(0) = 0$. Для условного среднего имеем

$$\mathbf{E} \left(\begin{pmatrix} \xi_u(s) \\ \eta_u(s) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \xi_u(0) \\ \eta_u(0) \end{pmatrix} \right) = \mathbf{E} \begin{pmatrix} \xi_u(s) \\ \eta_u(s) \end{pmatrix} + \Sigma_s \Sigma_0^{-1} \begin{pmatrix} \xi_u(0) - \mathbf{E} \xi_u(0) \\ \eta_u(0) - \mathbf{E} \eta_u(0) \end{pmatrix},$$

где

$$\Sigma_0 = \text{cov} \begin{pmatrix} \xi_u(0) \\ \eta_u(0) \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \Sigma_s = \text{cov} \left(\begin{pmatrix} \xi_u(s) \\ \eta_u(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_u(0) \\ \eta_u(0) \end{pmatrix} \right) := uM = u \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{11} & M_{12} \end{pmatrix},$$

$$M_{11} = r_1(su^{-1/\alpha}) - rr(su^{-1/\alpha}, 0) - rr(0, su^{-1/\alpha}) + r^2 r_2(su^{-1/\alpha}), \quad M_{22} = r_2(su^{-1/\alpha}), \\ M_{21} = r(0, su^{-1/\alpha}) - rr_2(su^{-1/\alpha}), \quad M_{12} = r(su^{-1/\alpha}, 0) - rr_2(su^{-1/\alpha}).$$

Следовательно,

$$\mathbf{E} \left(\begin{pmatrix} \xi_u(s) \\ \eta_u(s) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \xi_u(0) = 0 \\ \eta_u(0) = 0 \end{pmatrix} \right) \\ = \left(E - M \begin{pmatrix} 1/b^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} v - rw - (1-r)u \\ w - u \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Принимая во внимание предельные соотношения (1), (3), при $u \rightarrow \infty$ получим

$$E_1 = -\frac{(1-r)(1-c)}{1+r} |s|^\alpha + (v+w)o(1), \quad (7)$$

$$E_2 = -\frac{1-c}{1+r} |s|^\alpha + (v+w)o(1), \quad (8)$$

где $o(1)$ не зависят от v и w . Для условной ковариации

$$\Sigma = \text{cov} \left(\begin{pmatrix} \xi_u(s) - \xi_u(s') \\ \eta_u(t) - \eta_u(t') \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \xi_u(0) = 0 \\ \eta_u(0) = 0 \end{pmatrix} \right),$$

обозначая

$$\Sigma_{ss'0} := \text{cov} \left(\begin{pmatrix} \xi_u(s) - \xi_u(s') \\ \eta_u(t) - \eta_u(t') \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_u(0) \\ \eta_u(0) \end{pmatrix} \right), \quad \Sigma_{ss'} := \text{cov} \left(\begin{pmatrix} \xi_u(s) - \xi_u(s') \\ \eta_u(t) - \eta_u(t') \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_u(s) - \xi_u(s') \\ \eta_u(t) - \eta_u(t') \end{pmatrix} \right),$$

имеем при $u \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\Sigma &:= \Sigma_{ss'} - \Sigma_{ss'0} \Sigma_0^{-1} \Sigma_{ss'0}^\top \\ &= \begin{pmatrix} 2(1+r^2+2cr)|s-s'|^\alpha(1+o(1)) & \kappa_1 \\ \kappa_1 & 2|t-t'|^\alpha(1+o(1)) \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{1}{ub^2} \begin{pmatrix} \kappa_3 & \kappa_2 \\ \kappa_2 & \kappa_4 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= (c+r)(|t-s|^\alpha - |t-s'|^\alpha - |s-t'|^\alpha + |s'-t'|^\alpha)(1+o(1)), \\ \kappa_2 &= -(c+r)(2+2cr)(|s'|^\alpha - |s|^\alpha + o(1))(|t'|^\alpha - |t|^\alpha + o(1)), \\ \kappa_3 &= ((1+c^2)(1+3r^2) + 2cr(3+r^2))(|s'|^\alpha - |s|^\alpha + o(1))^2, \\ \kappa_4 &= (1+c^2+2cr)(|t'|^\alpha - |t|^\alpha + o(1))^2.\end{aligned}$$

Используя неравенства $|r(a) - r(b)| \leq \sqrt{1-r(a-b)}$, $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$ и неравенство Коши–Буняковского–Шварца, получаем при всех достаточно больших u

$$\text{var} \left(\begin{pmatrix} \xi_u(s) - \xi_u(s') \\ \eta_u(t) - \eta_u(t') \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \xi_u(0) \\ \eta_u(0) \end{pmatrix} \right) \leq \gamma(r) \begin{pmatrix} |s-s'|^\alpha \\ |t-t'|^\alpha \end{pmatrix} \quad (9)$$

для всех $s, s', t, t' \geq 0$, где $\gamma(r) = 3 + 3r^2 + 6|cr|$.

Соотношения (7)–(9) обеспечивают слабую сходимость гауссовского векторного процесса $(\xi_u(t), \eta_u(t))$, взятого при условии $(\xi_u(0) = \eta_u(0) = 0)$, к векторному процессу

$$(\xi(t), \eta(t)) := \left(\sqrt{2}\sqrt{1+r^2+2cr}B'_{\alpha/2}(t) - \frac{(1-r)(1-c)}{1+r}|t|^\alpha, \sqrt{2}B''_{\alpha/2}(t) - \frac{1-c}{1+r}|t|^\alpha \right),$$

где $B'_{\alpha/2}(t), B''_{\alpha/2}(t)$ — копии (вообще говоря, зависимые) процесса $B_{\alpha/2}(t)$ и

$$\begin{aligned}2\sqrt{1+r^2+2cr} \mathbf{E}(B'_{\alpha/2}(s) - B'_{\alpha/2}(s'))(B''_{\alpha/2}(t) - B''_{\alpha/2}(t')) \\ = (c+r)(|s-t|^\alpha - |s'-t|^\alpha - |s-t'|^\alpha + |s'-t'|^\alpha).\end{aligned}$$

После подстановки $s' = 0, t' = 0$ получим

$$\mathbf{E} B'_{\alpha/2}(s) B''_{\alpha/2}(t) = -\frac{c+r}{2\sqrt{1+r^2+2cr}}(|s|^\alpha + |t|^\alpha - |t-s|^\alpha).$$

Используя данные соотношения, найдем, что $\xi(t) + (1+r)\eta(t)$ — гауссовский случайный процесс со средним

$$\mathbf{E}(\xi(t) + (1+r)\eta(t)) = -\frac{2(1-c)}{1+r}|t|^\alpha$$

и ковариационной функцией

$$\text{cov}(\xi(t) + (1+r)\eta(t), \xi(s) + (1+r)\eta(s)) = (2-2c)(|t|^\alpha + |s|^\alpha - |t-s|^\alpha).$$

Вернемся к интегралу I и сделаем еще одну замену переменных:

$$p = v + w - \frac{vw}{u}, \quad q = \frac{v-w}{\sqrt{u}},$$

т.е.

$$v = u + \frac{q\sqrt{u}}{2} - \frac{\sqrt{4u^2 + q^2u - 4pu}}{2}, \quad w = u - \frac{q\sqrt{u}}{2} - \frac{\sqrt{4u^2 + q^2u - 4pu}}{2}.$$

В этих переменных $D_u(p, q) = \{0 \leq p \leq u, q \in \mathbb{R}\}$, а якобиан имеет вид

$$\frac{2}{\sqrt{u}} \sqrt{1 + u^{-1} \left(\left(\frac{q}{2} \right)^2 - p \right)} =: \frac{2}{\sqrt{u}} j_u(p, q).$$

Таким образом,

$$I = \frac{1}{2\sqrt{u}} e^{-u/(1+r)} \int_0^u dp \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{1}{j_u(p, q)} \exp \left\{ \frac{p}{1+r} - \frac{q^2}{2b^2} \right\} \\ \times \mathbf{P} \left(\max_{t \in [0, T]} \left(\xi_u(t) + (1+r)\eta_u(t) + \frac{1}{u} \zeta_u(t) \right) > p \mid \xi_u(0) = \eta_u(0) = 0 \right), \quad (10)$$

где теперь

$$\zeta_u(t) := \xi_u(t)\eta_u(t) - \left(u - \frac{q\sqrt{u}}{2} - \frac{\sqrt{4u^2 + q^2u - 4pu}}{2} \right) \xi_u(t) \\ - \left(u + \frac{q\sqrt{u}}{2} - \frac{\sqrt{4u^2 + q^2u - 4pu}}{2} \right) \eta_u(t) + r\eta_u^2(t) \\ - r \left(u - \frac{q\sqrt{u}}{2} - \frac{\sqrt{4u^2 + q^2u - 4pu}}{2} \right) \eta_u(t).$$

Аналогично доказательству в [6], используя оценки условных характеристик процесса под знаком вероятности и теорему 8.1 из [5], доказываем сходимость интеграла в (10).

Примем во внимание предыдущие замечания относительно распределения случайного процесса $\xi(t) + (1+r)\eta(t)$. После замены времени $t' = (2-2c)^{1/\alpha}t/(1+r)^{2/\alpha}$, в силу самоподобия дробного броуновского движения, вероятность в (10) при $u \rightarrow \infty$ примет вид

$$\mathbf{P} \left(\max_{t' \in [0, T']} \left(\sqrt{2}B_{\alpha/2}(t') - |t'|^\alpha \right) > \frac{p}{1+r} \right), \quad T' = \frac{(2-2c)^{1/\alpha}T}{(1+r)^{2/\alpha}}.$$

Наконец, при $u \rightarrow \infty$

$$I = \frac{1+o(1)}{2\sqrt{u}} \exp \left\{ -\frac{u}{1+r} \right\} \int_0^\infty dp \int_{-\infty}^\infty dq \exp \left\{ \frac{p}{1+r} - \frac{q^2}{2b^2} \right\} \\ \times \mathbf{P} \left(\max_{t' \in [0, T']} \left(\sqrt{2}B_{\alpha/2}(t') - |t'|^\alpha \right) > \frac{p}{1+r} \right) \\ = \frac{1+r+o(1)}{2\sqrt{u}} \exp \left\{ -\frac{u}{1+r} \right\} b\sqrt{2\pi} \left(H_\alpha \left(\frac{(2-2c)^{1/\alpha}}{(1+r)^{2/\alpha}} T \right) - 1 \right).$$

Обратимся к четвертому интегралу в (4). В (5) интеграл берется по области $\{v + w - vw/u \geq u\}$, которая далее в (10) превращается в область $\{p \geq u\}$, так что, принимая во внимание мажорирование сверху, получаем малость четвертого интеграла по сравнению с первыми тремя при $u \rightarrow \infty$. Учитывая асимптотическое поведение третьего интеграла в (4), приходим к утверждению леммы.

З а м е ч а н и е 1. В случае произвольных коэффициентов c_1, c_2 при $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ доказательство леммы отличается от приведенного выше вычислением условных среднего и ковариации гауссовского векторного процесса $(\xi_u(t), \eta_u(t))$, $t \geq 0$. В этом случае векторный процесс $(\xi_u(t), \eta_u(t))$, взятый при условии $\xi_u(0) = \eta_u(0) = 0$, при $u \rightarrow \infty$ слабо сходится к векторному процессу

$$(\xi(t), \eta(t)) := \left(\sqrt{2}\sqrt{c_1 + c_2r^2 + 2cr}B'_{\alpha/2}(t) - \frac{c_1 - rc_2 - c(1-r)}{1+r} |t|^\alpha, \right. \\ \left. \sqrt{2}\sqrt{c_2}B''_{\alpha/2}(t) - \frac{c_2 - c}{1+r} |t|^\alpha \right),$$

где $B'_{\alpha/2}(t), B''_{\alpha/2}(t)$ — копии (вообще говоря, зависимые) процесса $B_{\alpha/2}(t)$ и

$$\mathbf{E} B'_{\alpha/2}(s) B''_{\alpha/2}(t) = -\frac{c + c_2 r}{2\sqrt{c_2}\sqrt{c_1 + c_2 r^2 + 2cr}} (|s|^\alpha + |t|^\alpha - |t-s|^\alpha).$$

Используя данные соотношения, найдем, что $\xi(t) + (1+r)\eta(t)$ — гауссовский случайный процесс со средним

$$\mathbf{E} (\xi(t) + (1+r)\eta(t)) = -\frac{c_1 + c_2 - 2c}{1+r} |t|^\alpha$$

и ковариационной функцией

$$\text{cov}(\xi(t) + (1+r)\eta(t), \xi(s) + (1+r)\eta(s)) = (c_1 + c_2 - 2c)(|t|^\alpha + |s|^\alpha - |t-s|^\alpha).$$

Рассуждения, аналогичные проведенным выше, доказывают результат для произвольных c_1, c_2 в случае $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$.

З а м е ч а н и е 2. В случае произвольных коэффициентов c_1, c_2 при $\alpha = \alpha_1 < \alpha_2$ доказательство леммы отличается от приведенного выше вычислением условных среднего и ковариации гауссовского векторного процесса $(\xi_u(t), \eta_u(t))$, $t \geq 0$. В силу предложения 1 $c = 0$. В этом случае векторный процесс $(\xi_u(t), \eta_u(t))$, взятый при условии $\xi_u(0) = \eta_u(0) = 0$, слабо сходится при $u \rightarrow \infty$ к векторному процессу

$$(\xi(t), \eta(t)) := \left(\sqrt{2}\sqrt{c_1} B'_{\alpha/2}(t) - \frac{c_1}{1+r} |t|^\alpha, 0 \right).$$

Рассуждения, аналогичные проведенным выше, доказывают результат для произвольных c_1, c_2 в случае $\alpha = \alpha_1 < \alpha_2$.

3. Доказательство теоремы 1. Доказательство проводится по схеме, аналогичной доказательству теоремы 1 в [6], с использованием леммы 1.

4. Доказательство следствия 1. Рассмотрим пару центрированных гауссовских стационарных случайных процессов

$$X(t) = \frac{a_1 Z_1(t) + \dots + a_d Z_d(t)}{\sqrt{\sum_{i=1}^d a_i^2}}, \quad Y(t) = \frac{b_1 Z_1(t) + \dots + b_d Z_d(t)}{\sqrt{\sum_{i=1}^d b_i^2}}.$$

Отметим, что в силу независимости процессов $Z_i(t)$, $i = 1, \dots, d$, выполнено равенство $r(t, s) = \mathbf{E} X(t)Y(s) = r(t-s)$, что соответствует требованию (2). Вычислим характеристики процессов $X(t), Y(t)$. При $t \rightarrow 0$

$$\mathbf{E} X(t)X(0) = r_X(t) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{k_1+d_1} c_i a_i^2}{\sum_{i=1}^d a_i^2} |t|^{\alpha_{k_1}} (1 + o(1)) =: 1 - c_X |t|^{\alpha_{k_1}} (1 + o(1)),$$

$$\mathbf{E} Y(t)Y(0) = r_Y(t) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{k_2+d_2} c_i b_i^2}{\sum_{i=1}^d b_i^2} |t|^{\alpha_{k_2}} (1 + o(1)) =: 1 - c_Y |t|^{\alpha_{k_2}} (1 + o(1)),$$

$$r = \mathbf{E} X(t)Y(t) = \frac{\sum_{i=1}^d a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^d a_i^2 \sum_{i=1}^d b_i^2}}.$$

Условие $\mathbf{a} \neq k\mathbf{b}$ и неравенство Коши–Буняковского–Шварца позволяют заключить, что $r \in (-1, 1)$. Далее, при $t, s \rightarrow 0$

$$r(t, s) = \mathbf{E} X(t)Y(s) = r - \frac{\sum_{i=1}^{k_1+d_1} c_i a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^d a_i^2 \sum_{i=1}^d b_i^2}} |t-s|^{\alpha_{k_1}} (1 + o(1)) =: r + c |t-s|^{\alpha_{k_1}} (1 + o(1)).$$

Осталось применить теорему 1. Условие $\mathbf{a} \neq k\mathbf{b}$ обеспечивает выполнение требования $c_X + c_Y - 2c > 0$.

Автор выражает признательность В. И. Питербаргу за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коршунов Д. А., Питербарг В. И., Хашорва Э. Об экстремальных значениях гауссовского хаоса. — Докл. РАН, 2013, т. 452, № 5, с. 483–485.
2. Piterbarg V. I. Asymptotic methods in the theory of Gaussian processes and fields. Providence: Amer. Math. Soc., 1996, 206 p. (Transl. Math. Monogr., v. 148.)
3. Piterbarg V. I. High excursions for nonstationary generalized chi-square processes. — Stochastic Process. Appl., 1994, v. 51, № 2, p. 307–337.
4. Piterbarg V. I. High deviations for multidimensional stationary Gaussian process with independent components. — Stability Problems for Stochastic Models. Ed. by V. M. Zolotarev, V. M. Kruglov, V. Yu. Korolev. Moscow/Utrecht: TVP/VSP, 1994, p. 197–230.
5. Питербарг В. И., Стаматович С. Предельная теорема для α -выходов траекторий χ -процесса за высокий уровень. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 4, с. 811–818.
6. Piterbarg V. I., Zhdanov A. On probability of high extremes for product of two independent Gaussian stationary processes. — Extremes, 2015, v. 18, № 1, p. 99–108.

Поступила в редакцию
28.I.2015

© 2015 г.

КРЕМЕНА Е. В.*, ПИТЕРБАРГ В. И.*,
ХЮСЛЕР Ю.**

О ФОРМЕ ТРАЕКТОРИЙ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ, ИМЕЮЩИХ МАССИВНЫЕ ВЫСОКИЕ ВЫБРОСЫ. II¹⁾

Исследуется предельная форма траекторий гауссовского недифференцируемого стационарного процесса, которые выходят за высокий уровень либо в одной точке, либо в двух различных точках, расстояние между которыми превосходит заданное число.

Ключевые слова и фразы: гауссовский процесс, траектория, асимптотика вероятности высокого выброса, асимптотика вероятности массивного выброса.

1. Введение. Пусть $X(t)$, $t \in \mathbf{R}$, — гауссовский стационарный процесс с нулевым средним, единичной дисперсией и ковариационной функцией $r(t)$. Настоящая работа является продолжением статьи [2], в которой подробно изучены формы простых и массивных выбросов дифференцируемых гауссовских процессов. В [2] показано, что траектории, имеющие пересечения высокого уровня в одной или двух отстоящих друг от друга точках, с достаточно высокой точностью следуют своим ожидаемым значениям. В настоящей работе аналогичные задачи решаются для недифференцируемых гауссовских стационарных процессов. При этом, в то время как рассмотрение простых выбросов идеологически мало чем отличается от аналогичной

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Москва, Россия; e-mail: janesbond088@yahoo.com; piter@mech.math.msu.su

** University of Bern, Bern, Switzerland.

¹⁾ Исследование первого и второго авторов выполнено при поддержке РФФИ (грант № 14-01-00075).