Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Кремена, В. И. Питербарг, Ю. Хюслер, О форме траекторий гауссовских процессов, имеющих массивные высокие выбросы. II, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2015, том 60, выпуск 3, 613–621

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp4641>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 17:36:20

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коршунов Д. А., Питербарг В. И., Хашорва Э. Об экстремальных значениях гауссовского хаоса. — Докл. РАН, 2013, т. 452, № 5, с. 483–485.
2. Piterbarg V. I. Asymptotic methods in the theory of Gaussian processes and fields. Providence: Amer. Math. Soc., 1996, 206 p. (Transl. Math. Monogr., v. 148.)
3. Piterbarg V. I. High excursions for nonstationary generalized chi-square processes. — Stochastic Process. Appl., 1994, v. 51, № 2, p. 307–337.
4. Piterbarg V. I. High deviations for multidimensional stationary Gaussian process with independent components. — Stability Problems for Stochastic Models. Ed. by V. M. Zolotarev, V. M. Kruglov, V. Yu. Korolev. Moscow/Utrecht: TVP/VSP, 1994, p. 197–230.
5. Питербарг В. И., Стаматович С. Предельная теорема для α -выходов траекторий χ -процесса за высокий уровень. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 4, с. 811–818.
6. Piterbarg V. I., Zhdanov A. On probability of high extremes for product of two independent Gaussian stationary processes. — Extremes, 2015, v. 18, № 1, p. 99–108.

Поступила в редакцию
28.I.2015

© 2015 г.

КРЕМЕНА Е. В.*, ПИТЕРБАРГ В. И.*,
ХЮСЛЕР Ю.**

О ФОРМЕ ТРАЕКТОРИЙ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ, ИМЕЮЩИХ МАССИВНЫЕ ВЫСОКИЕ ВЫБРОСЫ. II¹⁾

Исследуется предельная форма траекторий гауссовского недифференцируемого стационарного процесса, которые выходят за высокий уровень либо в одной точке, либо в двух различных точках, расстояние между которыми превосходит заданное число.

Ключевые слова и фразы: гауссовский процесс, траектория, асимптотика вероятности высокого выброса, асимптотика вероятности массивного выброса.

1. Введение. Пусть $X(t)$, $t \in \mathbf{R}$, — гауссовский стационарный процесс с нулевым средним, единичной дисперсией и ковариационной функцией $r(t)$. Настоящая работа является продолжением статьи [2], в которой подробно изучены формы простых и массивных выбросов дифференцируемых гауссовских процессов. В [2] показано, что траектории, имеющие пересечения высокого уровня в одной или двух отстоящих друг от друга точках, с достаточно высокой точностью следуют своим ожидаемым значениям. В настоящей работе аналогичные задачи решаются для недифференцируемых гауссовских стационарных процессов. При этом, в то время как рассмотрение простых выбросов идеологически мало чем отличается от аналогичной

---

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Москва, Россия; e-mail: janesbond088@yahoo.com; piter@mech.math.msu.su

** University of Bern, Bern, Switzerland.

¹⁾ Исследование первого и второго авторов выполнено при поддержке РФФИ (грант № 14-01-00075).

задачи в [2], изучение формы массивных выбросов в рассматриваемом здесь случае требует существенно иного подхода. В связи с этим мы лишь сформулируем результаты о форме простых выбросов в случае недифференцируемых траекторий и коротко остановимся на их доказательствах. Случай массивных выбросов будет рассмотрен подробно, здесь существенно используются разработанные в [1] методы исследования асимптотик вероятностей массивных выбросов. Обзор литературы по форме высоких выбросов имеется в [2].

Предположим, что для ковариационной функции $r(t)$ выполнено следующее условие.

С1. $r(t) = 1 - |t|^\alpha + o(|t|^\alpha)$, $t \rightarrow 0$, для некоторого $\alpha \in (0, 2)$; $r(t) < 1$ для всех $t > 0$; для всех $t > 0$ $r(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\gamma > \alpha/2$.

2. Простые выбросы. Обозначим

$$Y_u(t) = \frac{X(t) - ur(t)}{\sqrt{1 - r^2(t)}}, \quad B_{u,S,g} = \{|Y_u(t)| \leq g(t) \forall t: |t| \in (0, S]\}.$$

Заметим, что $ur(t) = \mathbf{E}(X(t) | X(0) = u)$, а $1 - r^2(t) = \mathbf{D}(X(t) | X(0))$. Пусть $g(t)$ — положительная функция, обладающая свойством

$$\mathbf{P}\left(\exists t_0(\omega) > 0: \frac{|X(t)|}{g(t)\sqrt{1 - r^2(t)}} \leq 1 \text{ для всех } t \in (0, t_0(\omega)) \mid X(0) = 0\right) = 1, \quad (1)$$

т.е. функция $g(t)\sqrt{1 - r^2(t)}$ — локальная верхняя функция для траекторий условного процесса $X(t)$ при условии $X(0) = 0$ (см. [3]). Пусть $\{T_s, s \in \mathbf{R}\}$ — группа операторов сдвига вдоль траекторий $X(t)$. Мы изучаем следующую вероятность:

$$P_{u,S,g}(p) := \mathbf{P}\left(\bigcup_{t \in [0,p]} \{X(t) > u, T_t B_{u,S,g}\}\right).$$

Сначала заметим, что при условии $X(0) = u$ случайный процесс Y_u имеет нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию. Обозначим условную ковариационную функцию данного процесса через $\tilde{r}(s, t)$, $s, t \neq 0$. Аналогично доказательствам из [2] и [5] можно доказать следующие факты.

Лемма 1. Пусть центрированный стационарный гауссовский процесс $X(t)$ удовлетворяет условию **С1**. Пусть также для функции $g(t)$ выполнено (1). Тогда для любого фиксированного S имеет место соотношение

$$P_{u,S,g}(\Lambda u^{-2/\alpha}) \sim H_\alpha(\Lambda) \Psi(u) \mathbf{P}(|Y(s)| \leq g(s), |s| \in (0, S])$$

при $u \rightarrow \infty$, где $Y(s)$ — гауссовский процесс с нулевым средним, единичной дисперсией и ковариационной функцией $\tilde{r}(s, t)$, а

$$H_\alpha(\Lambda) = \mathbf{E} \exp\left(\max_{t \in [0, \Lambda]} (\sqrt{2} B_{\alpha/2}(t) - |t|^\alpha)\right),$$

где $B_H(t)$, $t \in \mathbf{R}$, — дробное броуновское движение с параметром $H \in (0, 1)$, т.е. $B_H(0) = 0$, $\mathbf{E} B_H(t) \equiv 0$ и $\mathbf{E} (B_H(t) - B_H(s))^2 = |t - s|^{2H}$.

Известно (см., например, [5]), что существует положительный конечный предел

$$H_\alpha := \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\Lambda} H_\alpha(\Lambda) \quad (\text{константа Пикандса}). \quad (2)$$

Теорема 1. Пусть $X(t)$ — стационарный гауссовский процесс, удовлетворяющий условию **С1**. Предположим, что для функции g выполнено (1), тогда для всех $p, S > 0$ имеет место соотношение

$$P_{u,S,g}(p) \sim H_\alpha p u^{2/\alpha} \Psi(u) \mathbf{P}(|Y(s)| \leq g(s), |s| \in (0, S]) \quad (3)$$

при $u \rightarrow \infty$.

Доказательство теоремы 1, с учетом [2], аналогично доказательству теоремы Пикандса, приведенному в [5], поэтому опишем только основную идею. Разобьем интервал $[0, T]$ на малые интервалы длины $\Lambda u^{-2/\alpha}$. Затем, используя неравенство Бонферрони, получим верхнюю оценку вероятности как сумму вероятностей, изученных в лемме 1. Нижняя оценка почти такая же, как верхняя, но она содержит вычитание двойной суммы, которая оценена в упомянутом выше доказательстве теоремы Пикандса и которая асимптотически меньше суммы вероятностей.

Отметим, что для рассматриваемого случая $\alpha < 2$ утверждения теорем 2 и 4 из [2] верны практически в дословной формулировке.

3. Массивные выбросы. Рассмотрим теперь форму выбросов траекторий за высокий уровень, которые происходят в двух точках, разделенных положительным числом ε . Вероятность такого массивного выброса, очевидно, меньше вероятности простого выброса. В отличие от классической схемы доказательства теоремы 1, как уже упоминалось, в этом пункте мы используем схему доказательств из [1]. Поведение вероятностей таких событий в большой степени определяется расположением точки максимума функции $r(t)$ на отрезке $t \in [\varepsilon, T]$. Как и в [1], мы рассмотрим два случая: (а) точка $t_m := \arg \max_{[\varepsilon, T]} r(t)$ — внутренняя точка этого отрезка, т.е. $t_m > \varepsilon$, и (б) точка t_m — граничная, т.е. $t_m = \varepsilon$. Случай $t_m = T$ мы рассматривать не будем, так как доказательства и формулировки результатов аналогичны случаю $t_m = \varepsilon$. Введем следующие условия.

C2. На отрезке $[\varepsilon, T]$ существует только одна внутренняя точка t_m максимума функции $r(t)$: $t_m \in (\varepsilon, T)$; $r(t)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности t_m и $r''(t_m) < 0$.

Второе условие связано со вторым случаем, когда $t_m = \varepsilon$. Оно является в определенном смысле более естественным, так как в наших условиях $r(t)$ убывает в правой окрестности нуля.

C3. Функция $r(t)$ непрерывно дифференцируема в окрестности точки $\varepsilon < T$, при этом $r'(\varepsilon) < 0$ и $r(\varepsilon) > r(t)$ для всех $t \in (\varepsilon, T]$.

Мы будем в целях удобства использовать обозначение t_m и в случае **C3**, вместо ε , если не будет возникать неопределенности. Нам понадобится асимптотическое поведение вероятности превышения высокого уровня в двух точках: для всех $t > 0$

$$\mathbf{P}(X(0) > u, X(t) > u) = \Psi_2(u, r(t))(1 + o(1))$$

при $u \rightarrow \infty$, где

$$\Psi_2(u, r) = \frac{(1+r)^{3/2}}{2\pi u^2 \sqrt{1-r}} \exp\left(-\frac{u^2}{1+r}\right).$$

Поведение массивного выброса зависит от поведения условного математического ожидания $m_2(t) = \mathbf{E}(X(t) | X(0) = X(t_m) = 1)$ и условной дисперсии $s_2^2(t) = \mathbf{D}(X(t) | X(0), X(t_m))$. Имеем

$$m_2(t) = \frac{r(t) + r(t_m - t)}{1 + r(t_m)},$$

$$s_2^2(t) = \frac{1 + 2r(t_m)r(t)r(t_m - t) - r^2(t_m) - r^2(t) - r^2(t_m - t)}{1 - r^2(t_m)}.$$

Обозначим

$$Z_u(t) = \frac{X(t) - um_2(t)}{s_2(t)}, \quad t \notin \{0, t_m\},$$

и введем событие

$$B_{u, S_1, S_2, g} = \{|Z_u(t)| \leq g(t) \ \forall t \in [-S_1, S_2] \setminus \{0, t_m\}\},$$

где $S_1 > 0$, $S_2 > t_m$ и $g(t)$ — положительная функция такая, что

$$\mathbf{P}\left(\exists t(\omega) > 0: |X(t)| \leq g(t)s_2(t)\right. \\ \left.\forall t \in (-t(\omega), t(\omega)) \cap (t_m - t(\omega), t_m + t(\omega)) \mid X(0) = X(t_m) = 0\right) = 1, \quad (4)$$

т.е. $g(t)s_2(t)$ — верхняя локальная функция для $X(t)$ в двух точках 0 и t_m при условии $X(0) = X(t_m) = 0$. Мы рассматриваем следующую вероятность:

$$P(u; S_1, S_2, g) := \mathbf{P}\left(\{\exists s, t \in [0, T]:\right. \\ \left.t - s \geq \varepsilon, X(s) > u, X(t) > u, T_s B_{u, S_1, S_2, g}\}\right). \quad (5)$$

Обозначим $a\Lambda = \{ax: x \in \Lambda\}$ и $(a_1, a_2) + \Lambda = \{(a_1, a_2) + x: x \in \Lambda\}$ для всех действительных чисел a, a_1, a_2 и любого множества $\Lambda \subset \mathbf{R}^2$. Для ковариационной матрицы двух центрированных случайных векторов $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ будем использовать обозначение

$$\text{cov}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) := \mathbf{E}(\mathbf{UV}^\top), \quad \text{cov}(\mathbf{U}) := \text{cov}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \mathbf{E}(\mathbf{UU}^\top).$$

Введем гауссовский случайный процесс $Z(t)$, $t \notin \{0, t_m\}$, с нулевым средним, единичной дисперсией и ковариационной функцией

$$R(s, t) := s_2^{-2} \text{cov}(X(s), X(t) \mid X(0), X(t_m)). \quad (6)$$

Заметим, что распределения случайного процесса $\{Z(t), t \notin \{0, t_m\}\}$ такие же, как условные распределения процесса $Z_u(t)$ при условии $X(0) = X(t_m) = u$. Оценим поведение условной дисперсии

$$V(s, t) = \mathbf{D}([X(s) - X(t)]^2 \mid X(0), X(t_m))$$

при $t - s \rightarrow 0$. Имеем

$$V(s, t) = \mathbf{E}(X(s) - X(t))^2 - Q(s, t), \quad \text{где} \quad Q(s, t) = D\left(\text{cov}\left(\begin{pmatrix} X(0) \\ X(t_m) \end{pmatrix}\right)\right)^{-1} D^\top,$$

при этом

$$D = \text{cov}\left(X(t) - X(s), \begin{pmatrix} X(0) \\ X(t_m) \end{pmatrix}\right) = (r(t) - r(s), r(t - t_m) - r(s - t_m))$$

— вектор взаимных ковариаций. Используя соотношение

$$\left(\text{cov}\left(\begin{pmatrix} X(0) \\ X(t_m) \end{pmatrix}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{1 - r^2(t_m)} \begin{pmatrix} 1 & -r(t_m) \\ -r(t_m) & 1 \end{pmatrix},$$

получаем с помощью простых алгебраических преобразований, что

$$Q(s, t) = \frac{1}{1 - r^2(t_m)} \\ \times \left[(r(t) - r(s))^2 - 2r(t_m)(r(t) - r(s))(r(t - t_m) - r(s - t_m)) \right. \\ \left. + (r(t - t_m) - r(s - t_m))^2 \right] \\ \leq \frac{2L^2(1 - r(t_m))|t - s|^{2\gamma}}{1 - r^2(t_m)} = \frac{2L^2|t - s|^{2\gamma}}{1 + r(t_m)},$$

где последнее неравенство следует из условия **C1**. Таким образом, для условной дисперсии при $\gamma > \alpha/2$ имеем

$$V(s, t) = 2(1 - r^2(t - s)) - Q(s, t) = 2|t - s|^\alpha(1 + o(1)), \quad |t - s| \rightarrow 0. \quad (7)$$

Теперь мы можем сформулировать основные результаты настоящей заметки, относящиеся к массивным выбросам.

Теорема 2. Пусть $X(t)$, $t \in \mathbf{R}$, — гауссовский центрированный стационарный процесс с п.н. непрерывными траекториями. Предположим, что ковариационная функция $r(t)$ удовлетворяет условиям **C1** и **C2**, а функция g такова, что $g(s)s_2(s)$ — верхняя локальная функция, определенная в (4). Тогда

$$P(u; S_1, S_2, g) = F_1(u) \mathbf{P} \left(|Z(s)| \leq g(s), s \in [-S_1, S_2] \setminus \{0, t_m\} \right) (1 + o(1))$$

при $u \rightarrow \infty$, где

$$F_1(u) = \frac{(T - t_m) \sqrt{2\pi} H_\alpha^2 u^{-1+4/\alpha}}{\sqrt{-r''(t_m)} (1 + r(t_m))^{-1+4/\alpha}} \Psi_2(u, r(t_m)).$$

Теорема 3. Пусть $X(t)$, $t \in \mathbf{R}$, — гауссовский центрированный стационарный процесс с п.н. непрерывными траекториями. Предположим, что ковариационная функция $r(t)$ удовлетворяет условиям **C1** и **C3**, а функция g такова, что $g(s)s_2(s)$ — верхняя локальная функция, определенная в (4). Тогда

$$P(u; S_1, S_2, g) = F_i(u) \mathbf{P} \left(|Z(s)| \leq g(s), s \in [-S_1, S_2] \setminus \{0, t_m\} \right) (1 + o(1)),$$

где

1) при $\alpha > 1$

$$F_2(u) = \frac{(T - t_m) |r'(\varepsilon)|}{(1 + r(\varepsilon))^2} u^2 \Psi_2(u, r(\varepsilon));$$

2) при $\alpha = 1$

$$F_3(u) = (T - \varepsilon) h u^2 \Psi_2(u, r(\varepsilon));$$

3) при $\alpha < 1$

$$F_4(u) = \frac{(T - \varepsilon) H_\alpha^2 u^{-2+4/\alpha}}{|r'(\varepsilon)| (1 + r(\varepsilon))^{-2+4/\alpha}} \Psi_2(u, r(\varepsilon)).$$

В качестве примера рассмотрим функцию g такую, что $g(s) = +\infty$ при $s \in [-\delta, \delta] \cup [t_m - \delta, t_m + \delta] =: I(\delta, t_m)$ и $g(s) = G$ при $s \in S(\delta) =: [-S_1, S_2] \setminus I(\delta, t_m)$. Пусть $S_1 > \delta$, $S_2 > t_m + \delta$, тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 4. В условиях теорем 2 или 3 для любого положительного $\delta = \delta(G)$ имеем

$$\lim_{G \rightarrow \infty} \frac{\lim_{u \rightarrow \infty} P(u; S_1, S_2, g) / F_\ell(u)}{2 \int_{S(\delta)} (s_2^2(t)/2)^{-1/\alpha} dt G^{2/\alpha} \Psi(G)} = H_\alpha^2$$

при условии, что знаменатель стремится к нулю, где $\ell = 1, 2, 3, 4$ соответствует случаям, рассмотренным в теоремах 2 и 3.

3.1. Леммы. Следующие две леммы являются ключевыми в доказательстве вышеприведенных теорем, они описывают асимптотическое поведение траекторий при условии, что произошло два пересечения в точках, разделенных ε , причем эти пересечения произошли на коротких промежутках времени. Для $\Lambda \subset \mathbf{R}^2$ обозначим

$$p(u; S_1, S_2, g, \Lambda) := \mathbf{P} \left(\bigcup_{(s,t) \in (0,\tau) + u^{-2/\alpha} \Lambda} \{X(s) > u, X(t) > u, T_s B_{u, S_1, S_2, g}\} \right).$$

Здесь τ принадлежит той окрестности точки t_m , в которой $r(t)$ дважды непрерывно дифференцируема (в случае условия **C2**) или дифференцируема (в случае условия **C3** с $t_m = \varepsilon$). При этом τ может зависеть от u .

Лемма 2. Пусть $X(t)$ — гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией $r(t)$, удовлетворяющий условиям **C1** и **C2**. Пусть Λ — замкнутое

подмножество в $\mathbf{R}^2$. Тогда для любого $\tau = \tau(u)$ такого, что $|\tau - t_m| = O(u^{-1}\sqrt{\ln u})$ при $u \rightarrow \infty$,

$$p(u; S_1, S_2, g, \Lambda) \sim h_\alpha \left(\frac{\Lambda}{(1 + r(t_m))^{2/\alpha}} \right) \Psi_2(u, r(\tau)) \times \mathbf{P} \left\{ |Z(s)| \leq g(s), s \in [-S_1, S_2] \setminus \{0, t_m\} \right\}, \quad (8)$$

где

$$h_\alpha(\Lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{x+y} \mathbf{P} \left(\bigcup_{(s,t) \in \Lambda} \left\{ \sqrt{2} B_{\alpha/2}(s) - |s|^\alpha > x, \sqrt{2} \tilde{B}_{\alpha/2}(t) - |t|^\alpha > y \right\} \right) dx dy,$$

а $B_{\alpha/2}, \tilde{B}_{\alpha/2}$ — независимые копии дробного броуновского движения с параметром $\alpha/2$.

З а м е ч а н и е. Если $|\tau - t_m| = o(u^{-1})$, то $\Psi_2(u, r(\tau)) \sim \Psi_2(u, r(t_m))$ при $u \rightarrow \infty$.

Лемма 3. Пусть $X(t)$ — гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией $r(t)$, удовлетворяющий условиям **C1** и **C3** при $\alpha \leq 1$. Пусть Λ — замкнутое подмножество $\mathbf{R}^2$, а для $\tau = \tau(u)$ имеет место соотношение $|\tau - \varepsilon| = O(u^{-2} \ln u)$ при $u \rightarrow \infty$. Тогда при $\alpha < 1$ и $u \rightarrow \infty$

$$p(u; S_1, S_2, g, \Lambda) \sim h_\alpha \left(\frac{\Lambda}{(1 + r(\varepsilon))^{2/\alpha}} \right) \Psi_2(u, r(\tau)) \times \mathbf{P} \left\{ |Z(s)| \leq g(s), s \in [-S_1, S_2] \setminus \{0, t_m\} \right\}. \quad (9)$$

Если $\alpha = 1$, то в (9) нужно заменить h_α на

$$\tilde{h}_1(\Lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{x+y} \mathbf{P} \left\{ \bigcup_{(s,t) \in \Lambda} \left\{ \sqrt{2} B_{1/2}(s) - |s| - r'(\varepsilon)s > x, \sqrt{2} \tilde{B}_{1/2}(t) - |t| + r'(\varepsilon)t > y \right\} \right\} dx dy.$$

Заметим, что $B_{1/2}$ — стандартный винеровский процесс.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим

$$U(K, B_{u, S_1, S_2, g}) = \bigcup_{(s,t) \in K} \{X(s) > u, X(t) > u, T_s B_{u, S_1, S_2, g}\},$$

где $K = (0, \tau) + u^{-2/\alpha} \Lambda$. Подобно доказательству лемм 1 и 2 в [1], запишем

$$p(u; B_{u, S_1, S_2, g}, \Lambda) = u^{-2} \iint \mathbf{P} \left(U(K, B_{u, S_1, S_2, g}) \mid X(0) = u - \frac{x}{u}, X(\tau) = u - \frac{y}{u} \right) \times f_{X(0), X(\tau)} \left(u - \frac{x}{u}, u - \frac{y}{u} \right) dx dy. \quad (10)$$

Рассмотрим вероятность под интегралом в (10) и изучим предельное поведение условных распределений вектора $(\xi_u(t), \eta_u(s), Z_u(v))$ при условии $(\xi_u(0), \eta_u(0)) = (0, 0)$ (т.е. $X(0) = u - x/u$, $X(\tau) = u - y/u$), где

$$\xi_u(t) = u(X(u^{-2/\alpha}t) - u) + x, \quad \eta_u(t) = u(X(\tau + u^{-2/\alpha}t) - u) + y.$$

Указанную вероятность можно переписать в виде

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{(s,t) \in \Lambda} \{\xi_u(s) > x, \eta_u(t) > y, T_{u^{-2/\alpha}s} B_{u, S_1, S_2, g}\} \mid \xi_u(0) = \eta_u(0) = 0\right).$$

Условное распределение вектора $(\xi_u(t), \eta_u(s))$ изучено в [1]. Условное математическое ожидание $Z_u(v)$ равно $O(|x| + |y|)u^{-1}$, условная ковариационная функция равна $R(s, t)$. Докажем теперь, что корреляции между Z_u и ξ_u и между Z_u и η_u стремятся к нулю. По сути, достаточно доказать, что условная ковариация между $X(s)/s_2(s)$ (вместо $Z_u(s)$) и $uX(u^{-2/\alpha}t)$ (вместо $\xi_u(t)$) при условии $X(0)$ (вместо $\xi_u(0)$) и $X(\tau)$ (вместо $\eta_u(0)$) стремится к нулю. Используем соотношение

$$\text{cov}\left(\begin{pmatrix} uX(u^{-2/\alpha}t) \\ X(s)/s_2(s) \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} X(0) \\ X(\tau) \end{pmatrix}\right) = \text{cov}\left(\begin{pmatrix} uX(u^{-2/\alpha}t) \\ X(s)/s_2(s) \end{pmatrix}\right) - C\left(\text{cov}\begin{pmatrix} X(0) \\ X(\tau) \end{pmatrix}\right)^{-1} C^\top, \quad (11)$$

где

$$C = \text{cov}\left(\begin{pmatrix} uX(u^{-2/\alpha}t) \\ X(s)/s_2(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X(0) \\ X(\tau) \end{pmatrix}\right)$$

— матрица ковариаций двух случайных векторов. Далее,

$$\text{cov}\left(\begin{pmatrix} uX(u^{-2/\alpha}t) \\ X(s)/s_2(s) \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u^2 & ur(s - u^{-2/\alpha}t)/s_2(s) \\ ur(s - u^{-2/\alpha}t)/s_2(s) & s_2(s)^{-2} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Используя условие **C1**, получаем, что

$$C = \begin{pmatrix} ur(u^{-2/\alpha}t) & ur(\tau - u^{-2/\alpha}t) \\ \frac{r(s)}{s_2(s)} & \frac{r(s - \tau)}{s_2(s)} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} u & ur(\tau) \\ \frac{r(s)}{s_2(s)} & \frac{r(s - \tau)}{s_2(s)} \end{pmatrix}$$

при $u \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что при $u \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} C\left(\text{cov}\begin{pmatrix} X(0) \\ X(\tau) \end{pmatrix}\right)^{-1} &\sim \frac{1}{1 - r^2(\tau)} \begin{pmatrix} u & ur(\tau) \\ \frac{r(s)}{s_2(s)} & \frac{r(s - \tau)}{s_2(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -r(\tau) \\ -r(\tau) & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \frac{1}{1 - r^2(\tau)} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} u(1 - r^2(\tau)) & 0 \\ \frac{r(s)}{s_2(s)} - \frac{r(\tau)r(s - \tau)}{s_2(s)} & -\frac{r(\tau)r(s)}{s_2(s)} + \frac{r(s - \tau)}{s_2(s)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда при $u \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} C\left(\text{cov}\begin{pmatrix} X(0) \\ X(\tau) \end{pmatrix}\right)^{-1} C^\top &\sim \frac{1}{1 - r^2(\tau)} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} u^2(1 - r^2(\tau)) & \frac{u(1 - r^2(\tau))r(s)}{s_2(s)} \\ \frac{u(1 - r^2(\tau))r(s)}{s_2(s)} & \frac{r^2(s) + r^2(s - \tau) - 2r(s)r(s - \tau)r(\tau)}{s_2^{-2}(s)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

Пусть δ — произвольное малое положительное число. Из (11), (12) и (13), собирая элементы матриц, стоящие в правых верхних углах, и используя условие **C2**, получаем для всех s, t , отделенных от нуля числом δ :

$$\text{cov}(Z_u(s), \xi_u(t) \mid \xi_u(0), \eta_u(0)) \sim \frac{ur(s - u^{-2/\alpha}t) - ur(s)}{s_2(s)} \rightarrow 0 \quad (14)$$

при $u \rightarrow \infty$. Точно так же получаем корреляцию между η_u и Z_u :

$$\text{cov}(Z_u(s), \eta_u(t) | \xi_u(0), \eta_u(0)) \sim \frac{ur(s - \tau - u^{-2/\alpha}t)}{s_2(s - \tau)} - \frac{ur(s - \tau)}{s_2(s - \tau)} \rightarrow 0 \quad (15)$$

при $u \rightarrow \infty$, при условии, что и s , и t отделены от t_m числом δ . Введем события

$$B_{u,S_1,S_2,g}^\delta = \left\{ |Z_u(t)| \leq g(t), t \in I_\delta := [-S_1, -\delta] \cup (\delta, t_m - \delta) \cup (t_m + \delta, S_2] \right\},$$

$$U_\delta(K, B_{u,S_1,S_2,g}^\delta) = \bigcup_{(s,t) \in \Lambda} \{ \xi_u(s) > x, \eta_u(t) > y, T_{u^{-2/\alpha} s} B_{u,S_1,S_2,g}^\delta \}.$$

Из (14) и (15) следует, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(U(K, B_{u,S_1,S_2,g}^\delta) | \xi_u(0) = \eta_u(0) = 0 \right) \\ & \sim \mathbf{P} \left(\bigcup_{(s,t) \in \Lambda} \{ \xi_u(s) > x, \eta_u(t) > y \} \mid \xi_u(0) = \eta_u(0) = 0 \right) \\ & \times \mathbf{P} \left(T_{u^{-2/\alpha} s} B_{u,S_1,S_2,g}^\delta \mid X(0) = u - \frac{x}{u}, X(\tau) = u - \frac{y}{u} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Поскольку $\tau \rightarrow t_m$ при $u \rightarrow \infty$, то, используя непрерывность гауссовского условного распределения, для последней вероятности получаем, что при всех $\delta > 0$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(T_{u^{-2/\alpha} s} B_{u,S_1,S_2,g}^\delta \mid X(0) = u - \frac{x}{u}, X(\tau) = u - \frac{y}{u} \right) \\ & \sim \mathbf{P}(B_{u,S_1,S_2,g}^\delta | X(0) = u, X(t_m) = u) = \mathbf{P}(|Z(t)| \leq g(t), t \in I_\delta). \end{aligned} \quad (17)$$

Последнее равенство следует из совпадения условных распределений Z_u и распределений Z . Теперь покажем, что соотношения (16) и (17) имеют место и при $\delta = 0$. Для этого введем события

$$\begin{aligned} B_{u,S_1,S_2,g}^{0,\delta} &= \left\{ |Z_u(t)| \leq g(t), t \in [-\delta, \delta] \cup [t_m - \delta, t_m + \delta] \setminus \{0, t_m\} \right\}, \\ B_{S_1,S_2,g}^{0,\delta} &= \left\{ |Z(t)| \leq g(t), t \in [-\delta, \delta] \cup [t_m - \delta, t_m + \delta] \setminus \{0, t_m\} \right\}. \end{aligned}$$

Так как $g(t)s_2(t)$ — верхняя локальная функция, то

$$\mathbf{P}(B_{u,S_1,S_2,g}^{0,\delta} | X(0) = u, X(t_m) = u) = \mathbf{P}(B_{S_1,S_2,g}^{0,\delta}) \rightarrow 1$$

при $\delta \rightarrow 0$. Дальнейшее доказательство полностью повторяет соответствующие рассуждения из доказательств лемм 1 и 2 в [1].

3.2. Схема доказательств теорем 2 и 3. Из доказанных выше лемм, используя метод двойных сумм в модификации [1], легко получить доказательства теорем этого раздела, соответствующих случаям $t_m > \varepsilon$ и $t_m = \varepsilon$. Для доказательства теоремы 2 обозначим $\Delta = \lambda u^{-2/\alpha}$, $\lambda > 0$, и определим, как и в доказательстве теоремы 1 из [1], интервалы

$$\Delta_k = [k\Delta, (k+1)\Delta], \quad 0 \leq k \leq N, \quad N = \left\lfloor \frac{T}{\Delta} \right\rfloor,$$

где $\lfloor \cdot \rfloor$ — целая часть числа. К множествам $\Delta_k \times \Delta_l = (0, (l-k)\Delta) + \Delta_k \times \Delta_k$ мы применяем лемму 2, полагая $\tau = (l-k)\Delta$ и $\Lambda = [k\lambda, (k+1)\lambda] \times [k\lambda, (k+1)\lambda]$. При этом, как и в [1], τ меняется в достаточно малой окрестности точки t_m . Эта окрестность определяется так же, как в [1]. Вместо событий, рассмотренных в [1], введем события

$$\mathcal{E}_{k,l} = \{ \exists (s,t) \in \Delta_k \times \Delta_l: X(s) > u, X(t) > u, T_s B_{u,S_1,S_2,g} \}$$

и применим неравенство Бонферрони

$$\sum \mathbf{P}(\mathcal{E}_{k,l}) \geq P(u; B_{u,S_1,S_2,g}) \geq \sum \mathbf{P}(\mathcal{E}_{k,l}) - \sum_{(k,l) \neq (k',l')} \mathbf{P}(\mathcal{E}_{k,l} \mathcal{E}_{k',l'}) \quad (18)$$

(суммирование ведется по тем же $\Delta_k \times \Delta_l$, что и в [1]). К вероятностям в простых суммах слева и справа применяется лемма 2, вероятности в двойной сумме мажорируются соответствующими вероятностями из [1], поэтому ее оценивание не меняется.

Для доказательства теоремы 3 введем вместо рассматриваемых в [1] событий $U_{u;a,b,T}(S)$ события

$$U_{u;a,b,T}(S_1, S_2, g) := \{ \exists(s, t): s, t \in [0, T], b \geq t - s \geq a, \\ X(t) \geq u, X(s) \geq u, T_s B_{u,S_1,S_2,g} \}$$

и практически буквально повторим доказательства из [1], применяя лемму 3 вместо используемых там лемм.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hüsler J., Ladneva A., Piterbarg V.* On clusters of high extremes of Gaussian stationary processes with ε -separation. — Electron. J. Probab., 2010, v. 15, paper № 59, p. 1825–1862.
2. *Кремена Е., Пите́рбарг В. И., Хю́слер Ю.* О форме траекторий гауссовских процессов, имеющих массивные высокие выбросы. — Теория вероятн. и ее примен., 2013, т. 58, в. 4, с. 672–694.
3. *Marcus M., Rosen J.* Markov Processes, Gaussian Processes and Local Times. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006, 620 p.
4. *Pickands J. III* Upcrossing probabilities for stationary Gaussian processes. — Trans. Amer. Math. Soc., 1969, v. 145, p. 51–73.
5. *Piterbarg V. I.* Asymptotic Methods in the Theory of Gaussian Processes and Fields. Providence: Amer. Math. Soc., 1996, 206 p. (AMS Transl. Math. Monographs, v. 148.)
6. *Watanabe H.* On asymptotic property of Gaussian processes. I. — Trans. Amer. Math. Soc., 1970, v. 148, p. 233–248.