Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. С. Борисов, Д. В. Миронов, Асимптотическое представление отношения правдоподобия для многомерных выборок с разрывными плотностями, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, том 45, выпуск 2, 345–356

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp467>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 12:52:04

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2000 г.

БОРИСОВ И. С.*; МИРОНОВ Д. В.*

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ
ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ВЫБОРОК
С РАЗРЫВНЫМИ ПЛОТНОСТЯМИ¹⁾

Исследована точность аппроксимации распределения логарифмического процесса отношения правдоподобия, построенного по выборке из многомерного распределения с разрывной плотностью, сверткой обобщенного пуассоновского и вырожденного гауссовского распределений.

Ключевые слова и фразы: процесс отношения правдоподобия, обобщенный пуассоновский процесс, асимптотические разложения.

1. Постановка задачи и основной результат. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — выборка, состоящая из независимых случайных векторов, распределенных в пространстве $\mathbf{R}^d$ с общей плотностью $f(\bar{x}, \theta)$ относительно меры Лебега. Предположим, что плотность непрерывна по $\bar{x} = (x_1, \dots, x_d)$ за исключением точек множества K_θ , зависящего от неизвестного параметра $\theta \in \Theta = (a, b)$, где a и b не обязательно конечны. Предположим также, что K_θ при всех $\theta \in \Theta$ — гладкое многообразие размерности $d-1$, и определены такие множества Ω_θ^1 и Ω_θ^2 , которые, во-первых, вместе с K_θ образуют разбиение пространства $\mathbf{R}^d$, а во-вторых, в точках $\bar{y} \in K_\theta$ плотность $f(\bar{x}, \theta)$ имеет разрывы 1-го рода по направлениям, задаваемым множествами Ω_θ^1 и Ω_θ^2 :

$$0 \neq q(\bar{y}, \theta) = \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{y}|_{\Omega_\theta^1}} f(\bar{x}, \theta), \quad 0 \neq p(\bar{y}, \theta) = \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{y}|_{\Omega_\theta^2}} f(\bar{x}, \theta),$$

где запись $\bar{x} \rightarrow \bar{y}|_{\Omega_\theta^j}$ означает, что $\bar{x} \rightarrow \bar{y}$ и при этом $\bar{x} \in \Omega_\theta^j$.

Считая далее истинное значение параметра θ фиксированным, введем следующие обозначения: $l(\bar{x}, \delta) = \ln f(\bar{x}, \delta)$, $\delta \in \Theta$,

$$\Delta(\bar{x}, \delta) = l(\bar{x}, \delta) - l(\bar{x}, \theta), \quad Y_n(u) = \sum_{i \leq n} \Delta\left(X_i, \theta + \frac{u}{n}\right), \quad \theta + \frac{u}{n} \in \Theta,$$

E_δ — математическое ожидание по распределению с плотностью $f(\cdot, \delta)$.

Цель настоящей работы — изучение асимптотического поведения процесса логарифмического отношения правдоподобия $Y_n(u)$, что позволяет, в частности, исследовать предельное поведение точки экстремума указанного процесса — оценки максимального правдоподобия (см. [1]). Основной результат работы представляет собой своеобразное асимптотическое разложение процесса $Y_n(u)$. Применения этого разложения к исследованию асимптотического поведения оценок максимального правдоподобия, а также случай многомерного параметра θ будут рассмотрены в следующей работе авторов.

Далее, наряду с вышеприведенными, считаем выполненными следующие условия.

* Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, просп. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: sibam@math.nsc.ru

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS и РФФИ (коды проектов: 95-0099, 97-01-00809).

1. Мы предполагаем, что многообразия K_δ ориентированы. Это означает, что в каждой точке $\bar{y} \in K_\delta$ можно восстановить единичный вектор нормали $N(\bar{y}, \delta)$, который как векторнозначная функция непрерывен по δ . Будем считать, что вектор $N(\bar{y}, \delta)$ «обращен» в множество Ω_δ^2 .

Многообразия K_δ представимы в параметрической форме

$$K_\delta = \{\bar{y}(t, \delta); t \in [0, 1]^{d-1}\}, \quad \delta \in \Theta,$$

где $\bar{y}(t, \delta) = (y^1(t, \delta), \dots, y^d(t, \delta))$, а функции $y^i(t, \delta)$, $i = 1, \dots, d$, непрерывно дифференцируемы по параметрам $t = (t_1, \dots, t_{d-1})$ и δ , и соответствующий якобиан всюду отличен от нуля; частные производные компонент параметризации обозначим через $y_{i,j}^i(t, \delta)$, $j = 1, \dots, d-1$, и $y_\delta^i(t, \delta)$. Будем также предполагать, что вторые частные производные функций $y^i(t, \delta)$ по t_j ограничены равномерно по t и δ .

В силу компактности множества определения параметризации и приведенных условий ее гладкости заключаем, что многообразия K_δ с необходимостью ограничены, что, впрочем, не является существенным. Можно рассматривать гладкую параметризацию, заданную на открытом единичном кубе. Однако при этом в нижеследующих условиях и выкладках мы дополнительно должны потребовать существование соответствующих поверхностных интегралов.

Далее, пусть семейство $\{K_\delta\}$ удовлетворяет условию:

$$K_{\delta'} \in \Omega_\delta^1, \quad \text{если } \delta' < \delta, \quad K_{\delta'} \in \Omega_\delta^2, \quad \text{если } \delta' > \delta.$$

Кроме того, пусть для любого $\delta \in \Theta$ и любых $\bar{x}' \in \Omega_\delta^1$, $\bar{x}'' \in \Omega_\delta^2$ имеет место соотношение $[\bar{x}', \bar{x}''] \cap K_\delta \neq \emptyset$, где $[\bar{x}', \bar{x}''] = \{\bar{x}' + h(\bar{x}'' - \bar{x}'); h \in [0, 1]\}$. Указанные требования означают, что каждая точка выборочного пространства принадлежит не более чем одной поверхности K_δ , причем все эти поверхности — компактные многообразия без края. В силу сказанного можно корректно определить следующую функцию:

$$\theta(\bar{y}) = \delta, \quad \text{если } \bar{y} \in K_\delta,$$

заданную на $\cup K_\delta$. Обозначим $\Theta_1(\bar{y}) = \{\delta \in \Theta: \delta < \theta(\bar{y})\}$, $\Theta_2(\bar{y}) = \{\delta \in \Theta: \delta > \theta(\bar{y})\}$.

2. Для всех $\bar{x} \in \cup K_\delta$ в каждой из областей $\Theta_1(\bar{x})$ и $\Theta_2(\bar{x})$ существует производная $l'(\bar{x}, \delta)$ по параметру δ , которая удовлетворяет условиям

$$|l'(\bar{x}, \delta + \Delta) - l'(\bar{x}, \delta)| \leq L(\bar{x}, \delta) |\Delta|, \quad \mathbf{E}_\delta L^{2+\beta}(X_1, \delta) < \infty$$

при всех $\delta, \delta + \Delta \in \Theta_i(\bar{x})$, $i = 1, 2$, и некотором $\beta > 0$.

Предположим также, что $|l'(\bar{x}, \theta)| \leq c$ в некоторой окрестности (в смысле расстояния Хаусдорфа) многообразия K_θ .

Здесь и всюду в дальнейшем символом c обозначаются различные постоянные, не зависящие от n , пространственных переменных и $\delta \in \Theta$, но зависящие в некоторых случаях от распределения X_1 и других параметров задачи. Кроме того, один и тот же знак модуля будет использоваться для обозначения классической евклидовой нормы вне зависимости от размерности пространства.

3. Каждая из функций $y^i(t, \delta)$ дифференцируема по δ ; соответствующие производные $y_\delta^i(t, \delta)$ ограничены равномерно по t и δ и удовлетворяют условию Липшица по δ :

$$|\bar{y}_\delta(t, \delta) - \bar{y}_\delta(t, \delta + \Delta)| \leq c|\Delta|, \quad \delta, \delta + \Delta \in \Theta, \quad t \in [0, 1]^{d-1}.$$

4. Справедливы следующие неравенства:

$$|f(\bar{x}, \delta) - p(\bar{y}, \delta)| \leq c|\bar{x} - \bar{y}|, \quad \bar{x} \in \Omega_\delta^2, \quad \bar{y} \in K_\delta,$$

$$|f(\bar{x}, \delta) - q(\bar{y}, \delta)| \leq c|\bar{x} - \bar{y}|, \quad \bar{x} \in \Omega_\delta^1, \quad \bar{y} \in K_\delta,$$

$$|l(\bar{x}, \delta) - \ln q(\bar{y}, \delta')| \leq c(|\bar{x} - \bar{y}| + |\delta - \delta'|), \quad \bar{x} \in \Omega_\delta^1, \quad \bar{y} \in K_{\delta'},$$

$$|l(\bar{x}, \delta) - \ln p(\bar{y}, \delta')| \leq c(|\bar{x} - \bar{y}| + |\delta - \delta'|), \quad \bar{x} \in \Omega_\delta^2, \quad \bar{y} \in K_{\delta'}.$$

Пусть W — случайная пуассоновская мера на $\mathbf{R} \times [0, 1]^{d-1}$. На непересекающихся множествах она принимает независимые целочисленные значения, и для любого

$b \in \mathbf{R}$ и любого борелевского множества $B \subseteq [0, 1]^{d-1}$ выполняются следующие соотношения (при очевидном соглашении касательно обозначений кратных интегралов):

$$\mathbf{E} W([0, b] \times B) = b \int_B p(\bar{y}(t, \theta), \theta) I(t, \theta) dt, \quad b > 0,$$

$$\mathbf{E} W([b, 0] \times B) = -b \int_B q(\bar{y}(t, \theta), \theta) I(t, \theta) dt, \quad b < 0,$$

где $I(t, \theta) = \sqrt{\det \|(\bar{y}_{t_i}(t, \theta), \bar{y}_{t_j}(t, \theta))\|}$ — коэффициент искажения объема, возникающий при замене переменных в поверхностном интеграле (см. [2]). Отметим, что определитель Грама (неотрицательный), стоящий под знаком квадратного корня в определении функции $I(t, \theta)$, будет строго положительным в силу невырожденности якобиана в условии 1.

Положим

$$\Pi(u) = \int_{[0, 1]^{d-1}} \ln \frac{q(\bar{y}(t, \theta), \theta)}{p(\bar{y}(t, \theta), \theta)} \int_0^{u(\bar{y}_\delta, N)} W(dv, dt),$$

где $\bar{y}_\delta = \bar{y}_\delta(t, \theta)$ — вектор из соответствующих частных производных, $N = N(t, \theta)$, а скобки в верхнем пределе внутреннего интеграла обозначают скалярное произведение.

Определим процесс

$$Y(u) = u \int_{[0, 1]^{d-1}} [p(\bar{y}(t, \theta), \theta) - q(\bar{y}(t, \theta), \theta)] |\det J(t, \theta)| dt + \Pi(u),$$

где

$$J(t, \theta) = \begin{pmatrix} y_\theta^1(t, \theta) & \cdots & y_\theta^d(t, \theta) \\ y_{t_1}^1(t, \theta) & \cdots & y_{t_1}^d(t, \theta) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{t_{d-1}}^1(t, \theta) & \cdots & y_{t_{d-1}}^d(t, \theta) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Случайный процесс $Y(u)$ в рассматриваемой общности, по-видимому, впервые был введен в [3]. Нетрудно видеть, что при $d = 1$ он принимает вид (см. [1])

$$Y(u) = u(p(\theta) - q(\theta)) y'(\theta) + (\pi_1(p(\theta) y'(\theta) u^+) - \pi_2(q(\theta) y'(\theta) u^-)) \ln \frac{q(\theta)}{p(\theta)},$$

где π_1 и π_2 — независимые стандартные пуассоновские процессы на положительной полупрямой, u^+ и u^- — соответственно положительная и отрицательная части числа, $y(\theta)$ — точка разрыва плотности $f(x, \theta)$.

Обозначим $T_n = c \ln n$, где c будет выбрано в лемме 1. Для произвольных случайных процессов $X(u)$ и $Z(u)$ положим

$$\|X - Z\|_{T_n} = \sup_{|u| \leq T_n} |X(u) - Z(u)|.$$

Кроме того, для произвольных процессов $X(u, n)$ и $Y(u, n)$ и сходящейся к нулю последовательности положительных чисел a_n условимся писать

$$X(u, n) = Y(u, n) + O(a_n), \quad |u| \leq T_n,$$

если для каждого n существует такой процесс $Z(u, n)$, что $X(u, n) = Y(u, n) + Z(u, n)$ с вероятностью 1 при всех $u \in [-T_n, T_n]$, и $\mathbf{P}\{\|Z\|_{T_n} \geq ca_n\} \leq ca_n$. Запись

$$X(u, n) \stackrel{d}{=} Y(u, n) + O(a_n), \quad |u| \leq T_n,$$

означает, что совпадают конечномерные распределения процессов $X(u, n)$ и $Y(u, n) + Z(u, n)$, заданных, возможно, на разных вероятностных пространствах.

Теорема. Пусть выполнены условия 1–4. Тогда если $\mathbf{E}_\theta \|l'(X_1, \theta)\|^\alpha < \infty$ при некотором $\alpha > 2$, то случайные процессы $Y_n(u)$ и $Y(u)$ можно так определить на одном вероятностном пространстве, что

$$Y_n(u) = Y(u) + u n^{-1/2} \eta(Dl'(X_1, \theta))^{1/2} + O(\gamma_n), \quad |u| \leq T_n, \quad (2)$$

где $\gamma_n = (\ln n)^{1-1/(1+\alpha)} / n^{1-2/(1+\alpha)}$, η — не зависящая от $Y(u)$ случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение.

Если для случайной величины $l'(X_1, \theta)$ выполнено условие Крамера (т.е. существует экспоненциальный момент), то оценка (2) справедлива с $\gamma_n = \ln^2 n / n$.

З а м е ч а н и е 1. По-видимому, впервые задача аппроксимации процесса $Y_n(\cdot)$ с помощью пуассоновского процесса $\Pi(\cdot)$ была рассмотрена в [1] и [3]. При $d = 1$ соответствующая оценка скорости сходимости получена в [4]. Идея приближения распределений $Y_n(\cdot)$ с помощью сверток гауссовских и обобщенных пуассоновских распределений восходит к классическим работам А. Н. Колмогорова и его последователей, посвященным проблеме аппроксимации распределений сумм независимых случайных величин (или векторов) безгранично делимыми законами (см., например, [5]). Результат приведенной теоремы можно трактовать как многомерный вариант теоремы Колмогорова для сумм независимых процессов специального вида (первый бесконечномерный аналог указанной аппроксимации для другого класса случайных процессов — процессов частных сумм, был получен в [6]). Отметим также, что при $d = 1$ приведенное выше асимптотическое разложение можно извлечь из [7], где по существу использовалась асимптотическая факторизация распределения процесса $Y_n(\cdot)$, разработанная в [6], [8].

З а м е ч а н и е 2. Приведенная теорема допускает обобщение на случай, когда многообразия точек разрывов плотностей параметрического семейства при каждом θ представляют собой объединение конечного числа отделенных друг от друга в смысле расстояния Хаусдорфа гладких замкнутых многообразий, удовлетворяющих приведенным выше условиям. При этом остается корректным понятие одностороннего предела плотностей в точках указанного многообразия, но в определении процесса $Y(u)$ в правой части (2) параметризация $\bar{y}(t, \delta)$ будет уже кусочно-непрерывной (и кусочно-гладкой) векторной функцией. Кроме того, авторы не видят принципиальных трудностей и в случае, когда отмеченные гладкие части этих многообразий будут иметь общие точки (естественно, с ограничениями на порядок касания).

Авторы благодарят И. А. Ибрагимова и М. С. Ермакова за полезные замечания по данной теме.

2. Доказательство теоремы. Пусть $G_n(u)$ — множество точек $\mathbf{R}^d$, заключенных «между» многообразиями K_θ и $K_{\theta+u/n}$, т.е.

$$G_n(u) = \left\{ \bar{y}(t, \delta); t \in [0, 1]^{d-1}, \delta \in \left(\theta, \theta + \frac{u}{n} \right) \right\},$$

$$G_n = G_n(-T_n) \cup G_n(T_n).$$

Пусть $\{X_i^{(1)}\}$, $\{X_i^{(2)}\}$ и $\{\nu_i\}$ — независимые последовательности независимых случайных величин со следующими распределениями:

$$\mathbf{P}\{X_i^{(1)} \in A\} = \mathbf{P}\{X_1 \in A | X_1 \in G_n\} \quad \forall A \in \mathcal{B}^d,$$

$$\mathbf{P}\{X_i^{(2)} \in A\} = \mathbf{P}\{X_1 \in A | X_1 \notin G_n\} \quad \forall A \in \mathcal{B}^d,$$

$\{\nu_i\}$ имеют распределение Бернулли с вероятностью успеха $g = \mathbf{P}\{X_1 \in G_n\}$; здесь $\mathcal{B}^d$ — борелевская σ -алгебра в $\mathbf{R}^d$. Для простоты будем считать, что события $\{X_1 \in G_n\}$ и $\{X_1 \notin G_n\}$ имеют ненулевые вероятности. Легко видеть, что случайные векторы X_i совпадают по распределению со следующей смесью:

$$X_i \stackrel{d}{=} \nu_i X_i^{(1)} + (1 - \nu_i) X_i^{(2)}. \quad (3)$$

Обозначим через $\text{pr } \bar{x}$ ортогональную проекцию $\bar{x}$ на K_θ . В силу условия 1 она определена корректно, если точка $\bar{x}$ достаточно близка к K_θ .

Определим процесс

$$Y^{(n)}(u) = u \int_{[0,1]^{d-1}} \left[p(\bar{y}(t, \theta), \theta) - q(\bar{y}(t, \theta), \theta) \right] |\det J(t, \theta)| dt + \Pi_n(u),$$

где $\Pi_n(u)$ — некоторый обобщенный пуассоновский процесс, конечномерные распределения которого совпадают с конечномерными распределениями процесса

$$\text{sign}(u) \sum_{i=1}^{\pi_{ng}} I\{X_i^{(1)} \in G_n(u)\} \ln \frac{q(\text{pr} X_i^{(1)}, \theta)}{p(\text{pr} X_i^{(1)}, \theta)},$$

π_{ng} — пуассоновская случайная величина с параметром ng , не зависящая от последовательности $\{X_i^{(1)}\}$.

Обозначим $B_n = \sum_{i \leq n} \nu_i$.

Лемма 1. *Существует такая константа c в определении величины T_n , что $P\{B_n \geq 2c \ln n\} \leq n^{-2}$.*

Доказательство. Найдем представление для $P\{X_1 \in G_n(u)\}$. Рассмотрим элемент ds поверхности K_θ . Элементарный объем $dG_n(u)$ с основанием ds представляет собой параллелепипед. Его объем равен

$$|\det J| \left(\frac{u}{n} + O\left(\frac{u^2}{n^2}\right) \right) dt,$$

матрица J была определена в (1). Следовательно, принимая во внимание условие 4 и заменяя плотность f функцией p , для $u > 0$ получаем

$$P\{X_1 \in G_n(u)\} = \frac{u}{n} \int_{[0,1]^{d-1}} p(\bar{x}(t, \theta), \theta) |\det J(t, \theta)| dt + O\left(\frac{u^2}{n^2}\right).$$

При $u < 0$ имеет место аналогичная формула с заменой плотности f на функцию q . Таким образом,

$$g = P\{X_1 \in G_n\} = c \frac{\ln n}{n} \int_{[0,1]^{d-1}} [p(\bar{x}(t, \theta), \theta) + q(\bar{x}(t, \theta), \theta)] |\det J(t, \theta)| dt + O\left(\frac{(\ln n)^2}{n^2}\right).$$

Полученное представление для $P\{X_1 \in G_n\}$ означает, что среднее и дисперсия случайной величины B_n имеют порядок $\ln n$. Остается воспользоваться классическим неравенством Бернштейна, которое при достаточно большом c обеспечивает нужную оценку. Лемма доказана.

Обозначим $\varepsilon_n = \ln^2 n / n$. Следуя методу, предложенному в [8], с учетом (3) имеем

$$Y_n(u) \stackrel{d}{=} \sum_{i \leq n} \nu_i \Delta\left(X_i^{(1)}, \theta + \frac{u}{n}\right) + \sum_{i \leq n} \Delta\left(X_i^{(2)}, \theta + \frac{u}{n}\right) - \sum_{i \leq n} \nu_i \Delta\left(X_i^{(2)}, \theta + \frac{u}{n}\right).$$

Обозначим три суммы в правой части этого равенства как $Y_n^{(1)}(u)$, $Y_n^{(2)}(u)$ и $\Gamma_n(u)$ соответственно.

Лемма 2. *Справедливо представление*

$$Y_n^{(2)}(u) = \frac{u}{n} \sum_{i \leq n} l'(X_i^{(2)}, \theta) + O(\varepsilon_n), \quad |u| \leq T_n.$$

Доказательство. Так как $X_i^{(2)} \notin G_n$ и $|u| \leq T_n$, то в силу условия 2 для достаточно больших n можно воспользоваться формулой Тейлора:

$$\Delta\left(X_i^{(2)}, \theta + \frac{u}{n}\right) = l'(X_i^{(2)}, \theta) \frac{u}{n} + \varphi\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 L(X_i^{(2)}, \theta),$$

где φ — некоторая ограниченная с вероятностью 1 случайная величина;

$$\left\| Y_n^{(2)}(u) - \frac{u}{n} \sum_{i \leq n} l'(X_i^{(2)}, \theta) \right\|_{T_n} \leq c \left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 \sum_{i \leq n} L(X_i^{(2)}, \theta).$$

Теперь применим неравенство Нагаева-Фука (см. [9]):

$$P\left\{\sum_{i \leq n} \xi_i \geq x\right\} \leq nP\{\xi_1 \geq y\} + \exp\left\{-\frac{x^2}{b^2 + 2xy/3}\right\}, \quad (4)$$

где ξ_i — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним, $y > 0$, $b^2 = nE|\xi_1|^2$. Положим в (4)

$$\xi_i = L(X_i^{(2)}, \theta) - E_\theta L(X_i^{(2)}, \theta), \quad y = c(1 - E_\theta L(X_i^{(2)}, \theta)) \frac{n}{\ln n}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & P\left\{\sum_{i \leq n} L(X_i^{(2)}, \theta) > cn\right\} \\ &= P\left\{\sum_{i \leq n} (L(X_i^{(2)}, \theta) - E_\theta L(X_i^{(2)}, \theta)) \geq (c - E_\theta L(X_i^{(2)}, \theta))n\right\} \leq c \frac{(\ln n)^2}{n}. \end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 3. Справедливо представление

$$Y_n^{(1)}(u) \stackrel{d}{=} \text{sign}(u) \sum_{i=1}^{B_n} I\{X_i^{(1)} \in G_n(u)\} \ln \frac{q(\text{pr} X_i^{(1)}, \theta)}{p(\text{pr} X_i^{(1)}, \theta)} + O(\varepsilon_n), \quad |u| \leq T_n,$$

где сумма в правой части по определению равна нулю при $B_n = 0$.

Доказательство. Пусть $0 \leq u \leq T_n$ и $X_i^{(1)} \in G_n(u)$. Из условия 4 найдем, что

$$\begin{aligned} \left| \ln f\left(X_i^{(1)}, \theta + \frac{u}{n}\right) - \ln q(\text{pr} X_i^{(1)}, \theta) \right| &\leq c \frac{\ln n}{n}, \\ \left| \ln f(X_i^{(1)}, \theta) - \ln p(\text{pr} X_i^{(1)}, \theta) \right| &\leq c \frac{\ln n}{n}. \end{aligned}$$

Следовательно, если $0 \leq u \leq T_n$ и $X_i^{(1)} \in G_n(u)$, то

$$\left| \Delta\left(X_i^{(1)}, \theta + \frac{u}{n}\right) - \ln \frac{q(\text{pr} X_i^{(1)}, \theta)}{p(\text{pr} X_i^{(1)}, \theta)} \right| \leq c \frac{\ln n}{n}.$$

Если $-T_n \leq u \leq 0$ и $X_i^{(1)} \in G_n(u)$, то

$$\left| \Delta\left(X_i^{(1)}, \theta + \frac{u}{n}\right) + \ln \frac{q(\text{pr} X_i^{(1)}, \theta)}{p(\text{pr} X_i^{(1)}, \theta)} \right| \leq c \frac{\ln n}{n}.$$

При $X_i^{(1)} \notin G_n(u)$ в силу ограниченности $l'(X_i^{(1)}, \theta)$ на G_n (условие 2) имеем $\Delta(X_i^{(1)}, \theta + u/n) = O(\ln n/n)$. Следовательно,

$$\left\| Y_n^{(1)}(u) - \text{sign}(u) \sum_{i=1}^n \nu_i I\{X_i^{(1)} \in G_n(u)\} \ln \frac{q(\text{pr} X_i^{(1)}, \theta)}{p(\text{pr} X_i^{(1)}, \theta)} \right\|_{T_n} \leq c \frac{\ln^2 n}{n}.$$

Заметив, что

$$\begin{aligned} & \text{sign}(u) \sum_{i \leq n} \nu_i I\{X_i^{(1)} \in G_n(u)\} \ln \frac{q(\text{pr} X_i^{(1)}, \theta)}{p(\text{pr} X_i^{(1)}, \theta)} \\ & \stackrel{d}{=} \text{sign}(u) \sum_{i=1}^{B_n} I\{X_i^{(1)} \in G_n(u)\} \ln \frac{q(\text{pr} X_i^{(1)}, \theta)}{p(\text{pr} X_i^{(1)}, \theta)}, \end{aligned}$$

мы получим нужное утверждение. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Справедливо представление*

$$\Gamma_n(u) = \frac{u}{n} \sum_{i \leq n} \nu_i l'(X_i^{(2)}, \theta) + O(\varepsilon_n), \quad |u| \leq T_n.$$

Доказательство. Применяем так же, как и в лемме 2, к членам суммы $\Gamma_n(u)$ разложение по формуле Тейлора и используем лемму 1. Лемма доказана.

Далее, представим процессы $Y_n^{(2)}(u)$ и $\Gamma_n(u)$ в следующем виде:

$$Y_n^{(2)}(u) = u \mathbf{E}_\theta l'(X_i^{(2)}, \theta) + \frac{u}{n} \sum_{i \leq n} \left(l'(X_i^{(2)}, \theta) - \mathbf{E}_\theta l'(X_i^{(2)}, \theta) \right) + O(\varepsilon_n), \quad |u| \leq T_n,$$

$$\begin{aligned} \Gamma_n(u) &= \frac{u}{n} \sum_{i \leq n} \nu_i \left(l'(X_i^{(2)}, \theta) - \mathbf{E}_\theta l'(X_i^{(2)}, \theta) \right) \\ &\quad + \frac{u}{n} \sum_{i \leq n} \nu_i \mathbf{E}_\theta l'(X_i^{(2)}, \theta) + O(\varepsilon_n), \quad |u| \leq T_n. \end{aligned}$$

Из леммы 1 получаем

$$\frac{u}{n} \mathbf{E}_\theta l'(X_1^{(2)}, \theta) \sum_{i \leq n} \nu_i = O(\varepsilon_n), \quad |u| \leq T_n.$$

Лемма 5. *Верна оценка*

$$\frac{u}{n} \sum_{i \leq n} \nu_i \left(l'(X_i^{(2)}, \theta) - \mathbf{E}_\theta l'(X_i^{(2)}, \theta) \right) = O(\tau_n), \quad |u| \leq T_n,$$

где $\tau_n = (\ln n)^{2-1/(1+\alpha)} / n^{1-1/(1+\alpha)}$.

Если же случайная величина $l'(X_1, \theta)$ удовлетворяет условию Крамера, то приведенное соотношение имеет место с $\tau_n = \varepsilon_n$.

Доказательство. Воспользуемся неравенством (4) и леммой 1. Обозначим $a(\theta) = \mathbf{E}_\theta l'(X_i^{(2)}, \theta)$. Имеем:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P} \left\{ \left\| \frac{u}{n} \sum_{i \leq n} \nu_i \left(l'(X_i^{(2)}, \theta) - a(\theta) \right) \right\|_{T_n} \geq c\tau_n \right\} \\ &\leq \mathbf{P} \left\{ \sum_{i \leq c \ln n} |l'(X_i^{(2)}, \theta) - a(\theta)| \geq c(\ln n)^{\alpha/(1+\alpha)} n^{1/(1+\alpha)} \right\} + \frac{1}{n^2} \\ &\leq c \ln n \mathbf{P} \left\{ |l'(X_i^{(2)}, \theta) - a(\theta)| \geq c(\ln n)^{-1/(1+\alpha)} n^{1/(1+\alpha)} \right\} \\ &\quad + \exp\{-c \ln n\} + \frac{1}{n^2} \leq c\tau_n. \end{aligned}$$

Если выполнено условие Крамера, то для получения оценки хвоста распределения суммы используем экспоненциальное неравенство Чебышева. Лемма доказана.

В силу того, что

$$\mathbf{E}_\theta l'(X_1^{(2)}, \theta) = \frac{\mathbf{E}_\theta l'(X_1, \theta) - \mathbf{E}_\theta l'(X_1^{(1)}, \theta) \mathbf{P}\{X_1 \in G_n\}}{\mathbf{P}\{X_1 \notin G_n\}},$$

мы имеем

$$\mathbf{E}_\theta l'(X_1^{(2)}, \theta) = \mathbf{E}_\theta l'(X_1, \theta) + O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Лемма 6. *Справедливо следующее представление:*

$$\mathbf{E}_\theta l'(X_1, \theta) = \int_{[0,1]^{d-1}} \left[p(\bar{y}(t, \theta), \theta) - q(\bar{y}(t, \theta), \theta) \right] |\det J(t, \theta)| dt.$$

Доказательство. Наши рассуждения вполне аналогичны доказательству соответствующего утверждения в [1]. Имеем

$$\mathbf{E}_\theta l'(X_1, \theta) = \int_{\mathbf{R}^d} f'(\bar{x}, \theta) d\bar{x},$$

где f' — производная плотности f по θ . Она определена всюду на $\mathbf{R}^d$ за исключением некоторого множества нулевой меры, на котором ее можно задать произвольным образом. Докажем, что

$$\int_{\mathbf{R}^d} f'(\bar{x}, \theta) d\bar{x} = \int_{[0,1]^{d-1}} [p(\bar{y}(t, \theta), \theta) - q(\bar{y}(t, \theta), \theta)] |\det J(t, \theta)| dt. \quad (5)$$

Обозначим два интеграла, стоящие в левой и правой частях этого равенства, через $I_1(\theta)$ и $I_2(\theta)$ соответственно. Для того, чтобы доказать (5), достаточно показать, что для любых достаточно близких $\delta_1 < \delta_2$ из Θ верно

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} I_1(\delta) d\delta = \int_{\delta_1}^{\delta_2} I_2(\delta) d\delta.$$

Теорема Фубини и условие 2 позволяют изменить порядок интегрирования:

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} d\delta \int_{\mathbf{R}^d} f'(\bar{x}, \delta) d\bar{x} = \int_{\mathbf{R}^d} d\bar{x} \int_{\delta_1}^{\delta_2} f'(\bar{x}, \delta) d\delta.$$

Обозначим $\Omega_1 = \Omega_{\delta_1}^1$, $\Omega_2 = \Omega_{\delta_2}^2$, а Ω_3 — множество точек, заключенных «между» многообразиями K_{δ_1} и K_{δ_2} . Интеграл по $\mathbf{R}^d$ можно представить как сумму интегралов по этим трем множествам. Для полученных интегралов имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_j} d\bar{x} \int_{\delta_1}^{\delta_2} f'(\bar{x}, \delta) d\delta &= \int_{\Omega_j} [f(\bar{x}, \delta_2) - f(\bar{x}, \delta_1)] d\bar{x}, \quad j = 1, 2, \\ \int_{\Omega_3} d\bar{x} \int_{\delta_1}^{\delta_2} f'(\bar{x}, \delta) d\delta &= \int_{\Omega_3} \left[\int_{\delta_1}^{\theta(\bar{x})} f'(\bar{x}, \delta) d\delta + \int_{\theta(\bar{x})}^{\delta_2} f'(\bar{x}, \delta) d\delta \right] d\bar{x} \\ &= \int_{\Omega_3} [p(\bar{x}, \theta(\bar{x})) - f(\bar{x}, \delta_1)] d\bar{x} + \int_{\Omega_3} [f(\bar{x}, \delta_2) - q(\bar{x}, \theta(\bar{x}))] d\bar{x}. \end{aligned}$$

Сложив эти три интеграла, получим

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} I_1(\delta) d\delta = \int_{\mathbf{R}^d} f(\bar{x}, \delta_2) d\bar{x} - \int_{\mathbf{R}^d} f(\bar{x}, \delta_1) d\bar{x} + \int_{\Omega_3} [p(\bar{x}, \theta(\bar{x})) - q(\bar{x}, \theta(\bar{x}))] d\bar{x}. \quad (6)$$

Первые два интеграла правой части (6) равны единице каждый. В третьем сделаем замену переменных $\bar{x} = \bar{y}(t, \delta)$, $t \in [0, 1]^{d-1}$, $\delta \in [\delta_1, \delta_2]$. Получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\delta_1}^{\delta_2} I_1(\delta) d\delta &= \int_{[\delta_1, \delta_2] \times [0,1]^{d-1}} [p(\bar{x}, \theta(\bar{y}(t, \delta))) - q(\bar{y}(t, \delta), \theta(\bar{y}(t, \delta)))] |\det J(t, \delta)| dt d\delta \\ &= \int_{\delta_1}^{\delta_2} d\delta \int_{[0,1]^{d-1}} [p(\bar{y}(t, \delta), \theta(\bar{y}(t, \delta))) - q(\bar{y}(t, \delta), \theta(\bar{y}(t, \delta)))] |\det J(t, \delta)| dt \\ &= \int_{\delta_1}^{\delta_2} I_2(\delta) d\delta. \end{aligned}$$

Лемма 6 доказана.

Нам осталось аппроксимировать сумму B_n пуассоновской случайной величины π_{ng} , а сумму $n^{-1/2} \sum_{i \leq n} (l'(X_i^{(2)}, \theta) - \mathbf{E}_\theta l'(X_i^{(2)}, \theta))$ — нормально распределенной случайной величиной η' .

Лемма 7. Случайная величина η' может быть так задана на основном вероятностном пространстве, что

$$\frac{u}{n} \sum_{i \leq n} (l'(X_i^{(2)}, \theta) - \mathbf{E}_\theta l'(X_i^{(2)}, \theta)) = un^{-1/2} \eta' + O(\gamma_n), \quad |u| \leq T_n,$$

где $\gamma_n = (\ln n)^{1-1/(1+\alpha)} / n^{1-2/(1+\alpha)}$, если у случайной величины $l'(X_1, \theta)$ существует конечный момент порядка α , и $\gamma_n = \ln^2 n / n$ при выполнении условия Крамера.

Доказательство. Предположим, что у случайной величины $l'(X_1, \theta)$ существует момент порядка α . Обозначим

$$S_n = \sum_{i \leq n} (l'(X_i^{(2)}, \theta) - \mathbf{E}_\theta l'(X_i^{(2)}, \theta)).$$

Имеем

$$\mathbf{P} \left\{ \left\| \frac{u}{n} S_n - un^{-1/2} \eta' \right\|_{T_n} \geq c \gamma_n \right\} \leq \frac{\mathbf{E}_\theta |S_n - n^{1/2} \eta'|^\alpha}{c^\alpha (\ln n)^{-\alpha/(1+\alpha)} n^{2\alpha/(1+\alpha)}}.$$

В [10] доказано, что можно так построить нормально распределенную случайную величину η' на одном вероятностном пространстве с S_n , чтобы была верна оценка

$$\mathbf{E}_\theta |S_n - n^{1/2} \eta'|^\alpha \leq C_\alpha n \mathbf{E}_\theta |l'(X_1^{(2)}, \theta)|^\alpha,$$

где C_α — константа, зависящая только от α . Из этого следует первая часть леммы 7.

Если выполнено условие Крамера, то мы можем воспользоваться результатом из [11]: нормально распределенная случайная величина η' может быть построена таким образом, чтобы была верна оценка

$$\mathbf{P} \left\{ \left\| \frac{u}{n} S_n - un^{-1/2} \eta' \right\|_{T_n} \geq c \frac{\ln^2 n}{n} \right\} \leq \frac{c}{n},$$

если c достаточно велико. Лемма 7 доказана.

Положим $\eta = \eta'(\mathbf{D}l'(X_1^{(2)}, \theta))^{-1/2}$. Нетрудно убедиться в том, что

$$\eta' = \eta(\mathbf{D}l'(X_1, \theta))^{1/2} + O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Для суммы B_n можно так построить случайную величину π_{ng} , имеющую распределение Пуассона с параметром ng , что

$$\mathbf{P}\{B_n \neq \pi_{ng}\} \leq ng^2 \leq c \frac{\ln^2 n}{n},$$

если c достаточно велико (см. [12]).

Из лемм 2-7 и последнего неравенства следует, что имеет место утверждение теоремы с заменой процесса $Y(u)$ на $Y^{(n)}(u)$.

Далее, пусть V — такая случайная пуассоновская мера на $\mathbf{R} \times K_\theta$, что для любого $b \in \mathbf{R}$ и любого борелевского множества $B \subseteq K_\theta$ выполнено

$$\begin{aligned} \mathbf{E}V([0, b] \times B) &= b \int_B p(s, \theta) ds, \quad b > 0, \\ \mathbf{E}V([b, 0] \times B) &= -b \int_B q(s, \theta) ds, \quad b < 0. \end{aligned}$$

Обозначим через $K' = K'(s, \theta)$ следующую производную:

$$K'(s, \theta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\bar{y}(t, \theta + \delta) - \bar{y}(t, \theta)}{\delta},$$

где $s = \bar{y}(t, \theta)$ — точка на поверхности K_θ . Это определение корректно в силу условия 1.

Положим

$$\Pi_0(u) = \int_{K_\theta} \ln \frac{q(s, \theta)}{p(s, \theta)} \int_0^{(u/n)(K', N)} V(d\delta, ds).$$

Лемма 8. Процессы $\Pi_0(u)$ и $\Pi_n(u)$ можно так задать на одном вероятностном пространстве, что $\Pi_n(u) = \Pi_0(u) + O(\varepsilon_n)$, $|u| \leq T_n$.

Доказательство. Рассмотрим случай $u > 0$. Процесс $\Pi_n(u)$ можно представить в виде интеграла

$$\begin{aligned}\Pi_n(u) &= \int_{G_n(u)} \sum_{i=1}^{\pi_{ng}} I\{X_i^{(1)} \in dG\} \ln \frac{q(\text{pr} X_i^{(1)}, \theta)}{p(\text{pr} X_i^{(1)}, \theta)} \\ &= \int_{K_\theta} \ln \frac{q(s, \theta)}{p(s, \theta)} \int_0^{(u/n)(K', N)} \sum_{i=1}^{\pi_{ng}} I\{X_i^{(1)} \in (d\delta, ds)\}.\end{aligned}$$

Пусть A — некоторая хаусдорфова ε -окрестность многообразия K_θ (ниже мы уточним условия, накладываемые на ε), $\mathcal{B}$ — класс всех конечных объединений шаров с рациональными диаметрами и рациональными центрами, целиком содержащихся в A . Рассмотрим функциональное пространство

$$\mathbf{B} = \left\{ f(B); B \in \mathcal{B}: \sup_{B \in \mathcal{B}} |f(B)| < \infty \right\}$$

с нормой $\|f\| = \sup_i \{\alpha_i |f(B_i)|\}$, где $\{B_i\} = \mathcal{B}$, а $\{\alpha_i\}$ — последовательность положительных чисел, монотонно стремящаяся к нулю. Отметим, что линейное нормированное пространство $\{\mathbf{B}, \|\cdot\|\}$ является сепарабельным (но не полным).

Напомним, что обобщенное пуассоновское распределение $\text{Pois}(\lambda)$ с мерой Леви λ в сепарабельном линейном нормированном пространстве $\mathbf{B}$ определяется следующим соотношением:

$$\text{Pois}(\lambda) := e^{-\lambda(\mathbf{B})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{*k}}{k!},$$

где λ^{*k} — k -кратная свертка конечной меры λ с собой, λ^{*0} — единичная масса, сосредоточенная в нуле.

Пуассоновскую случайную меру $\sum_{i=1}^{\pi_{ng}} I\{X_i^{(1)} \in (\cdot)\}$, заданную на множествах из $\mathcal{B}$, обозначим Λ_1 . Мера Леви распределения $\mathcal{L}\{\Lambda_1\}$ в пространстве $\mathbf{B}$ имеет вид

$$\lambda_1 = ng \mathcal{L}\{I\{X_i^{(1)} \in B\}; B \in \mathcal{B}\}.$$

Пусть Y — случайная величина, распределенная в A с плотностью

$$f_Y(\bar{x}, \theta) = \frac{c \ln n}{ng} q(\text{pr} \bar{x}, \theta), \quad \bar{x} \in A \cap \Omega_\theta^1,$$

$$f_Y(\bar{x}, \theta) = \frac{c \ln n}{ng} p(\text{pr} \bar{x}, \theta), \quad \bar{x} \in A \cap \Omega_\theta^2,$$

где постоянная c определена в асимптотическом представлении величины g в доказательстве леммы 1. Окрестность A (точнее, ε) мы выберем так, чтобы

$$\int_A f_Y(\bar{x}, \theta) d\bar{x} = 1.$$

Возможность такого выбора следует из условия 4 и того факта, что $q(\bar{y}, \theta) \neq 0$ и $p(\bar{y}, \theta) \neq 0$ для всех $\bar{y} \in K_\theta$, что влечет отделимость от нуля этих функций в окрестности любой точки многообразия K_θ .

Определим случайную пуассоновскую меру Λ_2 . Мера Леви распределения $\mathcal{L}\{\Lambda_2\}$ в пространстве $\mathbf{B}$ имеет следующий вид:

$$\lambda_2 = ng \mathcal{L}\left\{ I \left\{ \frac{c \ln n}{n} * Y \in B \right\}; B \in \mathcal{B} \right\},$$

где операция $*$ определяется как $m * \bar{x} = m(\bar{x} - \text{pr} \bar{x}) + \text{pr} \bar{x}$ для всех положительных m и всех $\bar{x} \in \mathbf{R}^d$.

Оценим расстояние по вариации $\|\cdot\|_{\text{var}}$ между распределениями $\text{Pois}(\lambda_1)$ и $\text{Pois}(\lambda_2)$.

Сначала мы получим следующую верхнюю оценку:

$$\|\text{Pois}(\lambda_1) - \text{Pois}(\lambda_2)\|_{\text{var}} \leq 2\|\lambda_1 - \lambda_2\|_{\text{var}}. \quad (7)$$

Без ограничения общности можем считать, что $\lambda_1(\mathbf{B}) \leq \lambda_2(\mathbf{B})$. Тогда

$$\begin{aligned} & \| \text{Pois}(\lambda_1) - \text{Pois}(\lambda_2) \|_{\text{var}} \\ & \leq \left(e^{-\lambda_1(\mathbf{B})} - e^{-\lambda_2(\mathbf{B})} \right) e^{\lambda_1(\mathbf{B})} + e^{-\lambda_2(\mathbf{B})} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^{*k}}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^{*k}}{k!} \right\|_{\text{var}}. \end{aligned}$$

Искомая верхняя оценка выводится из этого неравенства и следующих двух оценок:

$$\begin{aligned} e^{-\lambda_1(\mathbf{B})} - e^{-\lambda_2(\mathbf{B})} & \leq (\lambda_2(\mathbf{B}) - \lambda_1(\mathbf{B})) e^{-\lambda_1(\mathbf{B})}, \\ \| \lambda_1^{*k} - \lambda_2^{*k} \|_{\text{var}} & \leq k \lambda_2(\mathbf{B})^{k-1} \| \lambda_1 - \lambda_2 \|_{\text{var}}. \end{aligned}$$

Вследствие сепарабельности и определения нормы в $\mathbf{B}$ расстояние полной вариации в правой части (7) совпадает с супремумом по всем конечномерным цилиндрическим множествам в $\{\mathbf{B}, \|\cdot\|\}$, откуда следует оценка

$$\| \text{Pois}(\lambda_1) - \text{Pois}(\lambda_2) \|_{\text{var}} \leq 2ng \sup_{B \in \mathcal{B}} \left| \mathbf{P}\{X_1^{(1)} \in B\} - \mathbf{P}\left\{\frac{c \ln n}{n} * Y \in B\right\} \right|.$$

Обозначим $A_n = \{c \ln n / n * \bar{x} : \bar{x} \in A\}$. Тогда с помощью условия 4 имеем

$$\begin{aligned} & 2ng \sup_{B \in \mathcal{B}} \left| \mathbf{P}\{X_1^{(1)} \in B\} - \mathbf{P}\left\{\frac{c \ln n}{n} * Y \in B\right\} \right| \\ & \leq ng \int_{A_n} \left| \frac{1}{g} f(\bar{x}, \theta) - \frac{n}{c \ln n} f_Y(\bar{x}, \theta) \right| d\bar{x} \leq c \ln n \text{mes}\{A_n\} \leq \frac{c' \ln^2 n}{n}. \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь теоремой Добрушина [13], которая утверждает, что два случайных элемента со значениями в сепарабельном метрическом пространстве можно так задать на одном вероятностном пространстве, чтобы вероятность их несовпадения равнялась расстоянию по вариации между распределениями этих случайных элементов. Расстояние по вариации между распределениями случайных мер Λ_1 и Λ_2 не превышает $c' \ln^2 n / n$, в силу чего два стохастических интеграла

$$\int_{K_\theta} \ln \frac{q(s, \theta)}{p(s, \theta)} \int_0^{(u/n)(K', N)} \Lambda_1(d\delta, ds), \quad \int_{K_\theta} \ln \frac{q(s, \theta)}{p(s, \theta)} \int_0^{(u/n)(K', N)} \Lambda_2(d\delta, ds)$$

можно так построить на одном вероятностном пространстве, чтобы они совпадали для всех $|u| \leq c \ln n$ с вероятностью, не меньшей, чем $1 - c \ln^2 n / n$.

Сделав во втором интеграле замену переменных $\delta = nv$ и приняв во внимание тот факт, что мера Леви $ng \mathcal{L}\{I\{c \ln n * Y \in B\}; B \in \mathcal{B}\}$ не зависит от n и совпадает с мерой Леви распределения $\mathcal{L}\{V\}$, мы получим утверждение леммы.

Еще одна замена переменных во втором интеграле по формуле $s = \bar{y}(t, \theta)$, $t \in [0, 1]^{d-1}$, заканчивает доказательство теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979, 528 с.
2. Зорич В. А. Математический анализ. М.: Наука, 1984, 640 с.
3. Ермаков М. С. Асимптотическое поведение статистических оценок параметров многомерной разрывной плотности. — Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1977, т. 74, с. 88–107.
4. Мосягин В. Е. Оценка скорости сходимости распределения процесса максимального правдоподобия в нерегулярном случае. — Сиб. матем. журн., 1991, т. 32, № 4, с. 96–103.
5. Зайцев А. Ю. Многомерный вариант второй равномерной предельной теоремы Колмогорова. — Теория вероятн. и ее примен., 1989, т. XXXIV, в. 1, с. 128–151.

6. Борисов И. С., Боровков А. А. Аппроксимация второго порядка случайных ломаных в принципе инвариантности Донскера–Прохорова. — Теория вероятн. и ее примен., 1986, т. XXXI, в. 2, с. 225–245.
7. Мосягин В. Е. Асимптотическое представление для процесса отношения правдоподобия в случае разрывной плотности. — Сиб. матем. журн., 1994, т. 35, № 2, с. 416–423.
8. Borisov I. S. Strong Poisson and mixed approximations of sums of independent random variables in Banach spaces. — Siberian Adv. Math., 1993, v. 3, № 2, p. 1–13.
9. Пикелис И. Ф., Сазаненко А. И. Замечания о неравенствах для вероятностей больших отклонений. — Теория вероятн. и ее примен., 1985, т. XXX, в. 1, с. 127–131.
10. Сазаненко А. И. О точности нормальной аппроксимации в принципе инвариантности. — Асимптотический анализ распределений случайных процессов. Новосибирск: Наука, 1989, с. 40–66.
11. Komlós J., Major P., Tusnády G. An approximation of partial sums of independent RV's and the sample DF. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1976, B. 34, H. 1, S. 33–58.
12. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1976, 352 с.
13. Добрушин Р. Л. Задание системы случайных величин при помощи условных распределений. — Теория вероятн. и ее примен., 1970, т. XV, в. 3, с. 469–497.

Поступила в редакцию
23.V.1997

© 2000 г.

ИНГСТЕР Ю. И.*

О ПРОВЕРКЕ ГИПОТЕЗЫ, БЛИЗКОЙ К ПРОСТОЙ¹⁾

Пусть наблюдается n -мерный гауссовский вектор $x = v + \xi$, где $v \in \mathbb{R}^n$ — неизвестный вектор средних, ξ — стандартный n -мерный гауссовский вектор. При $n \rightarrow \infty$ рассматривается асимптотически минимаксная задача проверки гипотезы $H_0: \|v\|_p \leq R_{n,0}$ против альтернативы $H_1: \|v\|_p \geq R_{n,1}$. Известно [3], что при простой гипотезе H_0 (т.е. при $R_{n,0} = 0$) условия минимаксной различимости и неразличимости имеют вид $R_{n,1}/R_{n,1,p}^* \rightarrow \infty$, $R_{n,1}/R_{n,1,p}^* \rightarrow 0$ соответственно и выражаются в терминах «критических радиусов» $R_{n,1,p}^*$. Нас интересует вопрос: сколь малым может быть $R_{n,0}$ для сохранения этих условий различимости и неразличимости?

Ответ имеет вид $R_{n,0} = o(R_{n,0,p}^*)$ и выражается в терминах «критических радиусов» $R_{n,0,p}^*$, вид которых зависит от четности p . В частности, показатель степени «критических радиусов» $R_{n,0,p}^*$ как функция от p имеет разрыв слева при четных $p > 2$; кроме того, $R_{n,0,p}^* \asymp R_{n,1,p}^*$, лишь если p четно. Эти результаты переносятся на модель, соответствующую наблюдениям неизвестного сигнала f из соболевского или бесовского класса в гауссовском белом шуме.

Аналогичные эффекты в задаче оценивания функционала $\Phi(f) = \|f\|_p$ были недавно установлены в работе [12].

Ключевые слова и фразы: минимаксная проверка гипотез, непараметрические гипотезы и альтернативы, соболевские и бесовские классы.

* Петербургский государственный университет путей сообщения, Московский пр., 9, 190031 С.-Петербург, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 96-01-00684, 98-01-04108) и гранта ведущих научных школ (проект 96-15-96199).