Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. И. Ингстер, О проверке гипотезы, близкой к простой,
Теория вероятн. и ее примен., 2000, том 45, выпуск 2, 356–
368

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp468>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 18:30:49

6. Борисов И. С., Боровков А. А. Аппроксимация второго порядка случайных ломанных в принципе инвариантности Донскера–Прохорова. — Теория вероятн. и ее примен., 1986, т. XXXI, в. 2, с. 225–245.
7. Мосягин В. Е. Асимптотическое представление для процесса отношения правдоподобия в случае разрывной плотности. — Сиб. матем. журн., 1994, т. 35, № 2, с. 416–423.
8. Borisov I. S. Strong Poisson and mixed approximations of sums of independent random variables in Banach spaces. — Siberian Adv. Math., 1993, v. 3, № 2, p. 1–13.
9. Пинелис И. Ф., Сазаненко А. И. Замечания о неравенствах для вероятностей больших отклонений. — Теория вероятн. и ее примен., 1985, т. XXX, в. 1, с. 127–131.
10. Сазаненко А. И. О точности нормальной аппроксимации в принципе инвариантности. — Асимптотический анализ распределений случайных процессов. Новосибирск: Наука, 1989, с. 40–66.
11. Komlós J., Major P., Tusnády G. An approximation of partial sums of independent RV's and the sample DF. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1976, B. 34, H. 1, S. 33–58.
12. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1976, 352 с.
13. Добрушин Р. Л. Задание системы случайных величин при помощи условных распределений. — Теория вероятн. и ее примен., 1970, т. XV, в. 3, с. 469–497.

Поступила в редакцию
23.V.1997

© 2000 г.

ИНГСТЕР Ю. И.*

О ПРОВЕРКЕ ГИПОТЕЗЫ, БЛИЗКОЙ К ПРОСТОЙ¹⁾

Пусть наблюдается n -мерный гауссовский вектор $x = v + \xi$, где $v \in \mathbb{R}^n$ — неизвестный вектор средних, ξ — стандартный n -мерный гауссовский вектор. При $n \rightarrow \infty$ рассматривается асимптотически минимаксная задача проверки гипотезы $H_0: \|v\|_p \leq R_{n,0}$ против альтернативы $H_1: \|v\|_p \geq R_{n,1}$. Известно [3], что при простой гипотезе H_0 (т.е. при $R_{n,0} = 0$) условия минимаксной различимости и неразличимости имеют вид $R_{n,1}/R_{n,1,p}^* \rightarrow \infty$, $R_{n,1}/R_{n,1,p}^* \rightarrow 0$ соответственно и выражаются в терминах «критических радиусов» $R_{n,1,p}^*$. Нас интересует вопрос: сколь малым может быть $R_{n,0}$ для сохранения этих условий различимости и неразличимости?

Ответ имеет вид $R_{n,0} = o(R_{n,0,p}^*)$ и выражается в терминах «критических радиусов» $R_{n,0,p}^*$, вид которых зависит от четности p . В частности, показатель степени «критических радиусов» $R_{n,0,p}^*$ как функция от p имеет разрыв слева при четных $p > 2$; кроме того, $R_{n,0,p}^* \asymp R_{n,1,p}^*$, лишь если p четно. Эти результаты переносятся на модель, соответствующую наблюдениям неизвестного сигнала f из соболевского или бесовского класса в гауссовском белом шуме.

Аналогичные эффекты в задаче оценивания функционала $\Phi(f) = \|f\|_p$ были недавно установлены в работе [12].

Ключевые слова и фразы: минимаксная проверка гипотез, непараметрические гипотезы и альтернативы, соболевские и бесовские классы.

* Петербургский государственный университет путей сообщения, Московский пр., 9, 190031 С.-Петербург, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 96-01-00684, 98-01-04108) и гранта ведущих научных школ (проект 96-15-96199).

1. Введение

1.1. Постановка задачи. Мы рассмотрим два варианта задачи проверки гипотез.

1. *Проверка гипотез о среднем гауссовского вектора возрастающей размерности.* Пусть наблюдается последовательность n -мерных гауссовских векторов $x = v + \xi$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, где $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbf{R}^n$ — неизвестный вектор средних, а $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ — стандартный n -мерный гауссовский вектор, т.е. случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы и $\xi_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Рассмотрим задачу проверки гипотезы $H_0: v \in V_{n,0}$ против альтернативы $H_1: v \in V_{n,1}$, где

$$V_{n,0} = \{v \in \mathbf{R}^n: \|v\|_p \leq R_{n,0}\}, \quad V_{n,1} = \{v \in \mathbf{R}^n: \|v\|_p \geq R_{n,1}\}.$$

Здесь $\|v\|_p = (\sum_i |v_i|^p)^{1/p}$, $0 < p < \infty$, $0 \leq R_{n,0} < R_{n,1}$ — заданные последовательности. Нас будут интересовать условия минимаксной различимости и неразличимости в этой задаче при $n \rightarrow \infty$. Именно, для любого теста $\psi = \psi_n(x)$ (под тестом понимается измеримая функция на $\mathbf{R}^n$ со значениями в интервале $[0, 1]$) рассмотрим вероятности ошибок I и II рода $\alpha_n(\psi, v) = \mathbf{E}_{n,v}(\psi)$, $\beta_n(\psi, v) = \mathbf{E}_{n,v}(1 - \psi)$, их максимальные значения

$$\alpha_n(\psi, V_{n,0}) = \sup_{v \in V_{n,0}} \alpha_n(\psi, v), \quad \beta_n(\psi, V_{n,1}) = \sup_{v \in V_{n,1}} \beta_n(\psi, v)$$

и сумму $\gamma_n(\psi, V_{n,0}, V_{n,1}) = \alpha_n(\psi, V_{n,0}) + \beta_n(\psi, V_{n,1})$. Здесь и ниже $\mathbf{E}_{n,v}$ — среднее по гауссовской мере $\mathbf{P}_{n,v}$ на $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}^n)$ со средним v и единичной матрицей ковариаций. Положим

$$\gamma_n = \gamma_n(V_{n,0}, V_{n,1}) = \inf_{\psi} \gamma_n(\psi, V_{n,0}, V_{n,1}); \quad 0 \leq \gamma_n(V_{n,0}, V_{n,1}) \leq 1.$$

Будем говорить, что гипотеза H_0 и альтернатива H_1 *состоятельно различимы*, если $\gamma_n \rightarrow 0$, и *асимптотически неразличимы*, если $\gamma_n \rightarrow 1$; последовательность тестов ψ_n будем называть *состоятельной* (в минимаксном смысле), если $\gamma_n(\psi_n, V_{n,0}, V_{n,1}) \rightarrow 0$. Здесь и ниже для рассматриваемой задачи, если не оговорено противное, пределы рассматриваются при $n \rightarrow \infty$.

2. *Проверка гипотез о сигнале в гауссовском белом шуме.* Пусть для семейства $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, наблюдается семейство реализаций $X_\varepsilon = \{X_\varepsilon(t), t \in (0, 1)\}$ случайного процесса $dX_\varepsilon(t) = f(t)dt + \varepsilon d\omega(t)$ ($\omega(t)$ — стандартный винеровский процесс), соответствующего наблюдению сигнала $f = f(t)$, $t \in (0, 1)$, $f \in L_2(0, 1)$, в гауссовском белом шуме интенсивности ε . Нулевая гипотеза и альтернатива имеют вид $H_0: f \in F_{\varepsilon,0}$, $H_1: f \in F_{\varepsilon,1}$, где

$$F_{\varepsilon,0} = \left\{f \in L_2(0, 1): \|f\|_p \leq \rho_{\varepsilon,0}\right\},$$

$$F_{\varepsilon,1} = \left\{f \in L_2(0, 1): \|f\|_{\sigma,p} \leq C, \|f\|_p \geq \rho_{\varepsilon,1}\right\}.$$

Здесь $\|f\|_p$ — норма в $L_p(0, 1)$, $\|\cdot\|_{\sigma,p}$ — норма Соболева, Никольского или Бесова в пространстве функций гладкости $\sigma > 0$; $1 \leq p < \infty$ — параметр, определяющий L_p -норму для измерения гладкости, $C > 0$ — постоянная, $0 \leq \rho_{\varepsilon,0} < \rho_{\varepsilon,1}$ — заданные числовые семейства.

Мы рассмотрим случай нормы Бесова, $\|\cdot\|_{\sigma,p} = \|\cdot\|_{\sigma,p,h}$, где (мы приводим одно из определений нормы Бесова; см. также [7], [8], [10], [11]):

$$\|f\|_{\sigma,p,h} = \|f\|_p + \left(\int_0^1 \left(\frac{w_{r,p}(f, u)}{u^\sigma} \right)^q \frac{du}{u} \right)^{1/h};$$

$$\|f\|_{\sigma,p,\infty} = \|f\|_p + \sup_{0 < u < 1} \frac{w_{r,p}(f, u)}{u^\sigma}.$$

Здесь $\|f\|_p$ — норма в $L_p(0, 1)$; $w_{r,p}(f, u) = \|\Delta_u^{(r)} f\|_{L_p[0, 1-ru]}$, $u > 0$, есть L_p -норма r -й разности функции f :

$$(\Delta_u^{(r)} f)(t) = \sum_{k=0}^r C_r^k (-1)^k f(t + ku), \quad 0 < t + ru < 1,$$

где $r > \sigma + 1$ и $r \geq \sigma + 2$ при целом σ .

Поскольку сформулированные ниже результаты не зависят от параметра h , аналогичные результаты для шаров Соболева и Никольского вытекают из известных теорем вложения [11].

Нас будут интересовать условия минимаксной различимости ($\gamma_\varepsilon \rightarrow 0$) и неразличимости ($\gamma_\varepsilon \rightarrow 1$) в этой задаче при $\varepsilon \rightarrow 0$ (определения аналогичны задаче 1 с заменой мер $P_{n,v}$ на меры $P_{\varepsilon,f}$, соответствующие случайному процессу X_ε).

Для простой нулевой гипотезы ($\rho_{\varepsilon,0} = 0$) задачи типа 2 (и их модификации для пространства последовательностей l_2 ; шары в квазинорме $\|\cdot\|_{\sigma,p}$ соответствуют l_p -эллипсоидам) изучались в работах [1]–[3]; в работах [4]–[9] изучался также неоднородный случай (норма $\|\cdot\|_{\sigma,p}$ заменяется на норму $\|\cdot\|_{\sigma,q}$). Там же изучались модификации этих задач для пространства l_2 ; при этом шары в норме $\|\cdot\|_{\sigma,q}$ (или квазинорме при $0 < q < 1$) соответствуют l_q -эллипсоидам или телам Бесова.

Для однородного случая $p = q$, который интересует нас в этой работе, при простой нулевой гипотезе условия различимости и неразличимости в задаче 2 имеют вид (см. [3, теорема 2.5]):

$$\gamma_\varepsilon \rightarrow 0 \iff \frac{\rho_{\varepsilon,1}}{\rho_{\varepsilon,1}^*} \rightarrow \infty; \quad \gamma_\varepsilon \rightarrow 1 \iff \frac{\rho_{\varepsilon,1}}{\rho_{\varepsilon,1}^*} \rightarrow 0; \quad (1.1)$$

здесь критические радиусы $\rho_{\varepsilon,1}^*$ имеют вид

$$\rho_{\varepsilon,1}^* = \rho_{\varepsilon,1,p}^* = \begin{cases} \varepsilon^{4\sigma/(4\sigma+1)} & \text{при } p \leq 2, \\ \varepsilon^{2\sigma/(2\sigma+1-1/p)} & \text{при } p > 2. \end{cases} \quad (1.2)$$

По существу, эти результаты выводятся из соответствующих результатов для задачи 1 (см. [3, пп. 4.2, 4.3; 5.2, 5.3]):

$$\gamma_n \rightarrow 0 \iff \frac{R_{n,1}}{R_{n,1}^*} \rightarrow \infty; \quad \gamma_n \rightarrow 1 \iff \frac{R_{n,1}}{R_{n,1}^*} \rightarrow 0, \quad (1.3)$$

где критические радиусы $R_{n,1}^*$ имеют вид

$$R_{n,1}^* = R_{n,1,p}^* = \begin{cases} n^{1/p-1/4} & \text{при } p \leq 2, \\ n^{1/2p} & \text{при } p > 2. \end{cases} \quad (1.4)$$

Нас будет интересовать следующий вопрос: для каких $R_{n,0} > 0$ или $\rho_{\varepsilon,0} > 0$ сохраняются условия различимости и неразличимости вида (1.1), (1.2) в задаче 2 или вида (1.3), (1.4) в задаче 1?

1.2. Основные результаты. Ответ на этот вопрос формулируется в терминах критических радиусов $R_{n,0}^*$ или $\rho_{\varepsilon,0}^*$, вид которых зависит от четности p . Положим

$$R_{n,0}^* = R_{n,0,p}^* = \begin{cases} n^{1/2p} & \text{при } p \leq 2, \\ n^{1/p-1/4k} & \text{при } 2k \leq p < 2(k+1), \quad k = 1, 2, \dots; \end{cases} \quad (1.5)$$

$$\rho_{\varepsilon,0}^* = \rho_{\varepsilon,0,p}^* = \begin{cases} \varepsilon^{(4\sigma-1+2/p)/(4\sigma+1)} & \text{при } p \leq 2, \\ \varepsilon^{(2\sigma+1/2k-1/p)/(2\sigma+1-1/p)} & \text{при } 2k \leq p < 2(k+1). \end{cases} \quad (1.6)$$

Следующая теорема показывает, что условие $R_{n,0}/R_{n,0}^* \rightarrow 0$ необходимо и достаточно для справедливости условия различимости и неразличимости вида (1.3), (1.4) в задаче 1.

Теорема 1.1. 1) Нижние границы. Пусть $R_{n,0}/R_{n,0}^* \rightarrow \infty$ в задаче 1. Тогда существует такая последовательность $R_{n,1}$, что $R_{n,1}/R_{n,1}^* \rightarrow \infty$ и $\gamma_n \rightarrow 1$.

2) Верхние границы. Пусть $R_{n,0}/R_{n,0}^* \rightarrow 0$ в задаче 1. Тогда $\gamma_n \rightarrow 0$ для любой последовательности $R_{n,1}$ такой, что $R_{n,1}/R_{n,1}^* \rightarrow \infty$.

Этот результат переносится и на задачу 2.

Теорема 1.2. 1) Нижние границы. Пусть $\rho_{\varepsilon,0}/\rho_{\varepsilon,0}^* \rightarrow \infty$ в задаче 2. Тогда существует такое семейство $\rho_{\varepsilon,1}$, что $\rho_{\varepsilon,1}/\rho_{\varepsilon,1}^* \rightarrow \infty$ и $\gamma_\varepsilon \rightarrow 1$.

2) Верхние границы. Пусть $\rho_{\varepsilon,0}/\rho_{\varepsilon,0}^* \rightarrow 0$ в задаче 2. Тогда $\gamma_\varepsilon \rightarrow 0$ для любого семейства $\rho_{\varepsilon,1}$ такого, что $\rho_{\varepsilon,1}/\rho_{\varepsilon,1}^* \rightarrow \infty$.

Отметим, что $R_{n,0}^* \asymp R_{n,1}^*$ и $\rho_{\varepsilon,0}^* \asymp \rho_{\varepsilon,1}^*$, лишь если p четно; в противном случае $R_{n,0}^* = o(R_{n,1}^*)$ и $\rho_{\varepsilon,0}^* = o(\rho_{\varepsilon,1}^*)$. Кроме того, показатели степени n и ε в определениях критических радиусов $R_{n,0}^*$ и $\rho_{\varepsilon,0}^*$ как функции от p имеют разрыв слева при четных $p > 2$.

Аналогичные эффекты в задаче оценивания функционала $\Phi(f) = \|f\|_p$, где f есть неизвестный сигнал из липшицевского класса, наблюдаемый в гауссовском белом шуме, были недавно установлены в работе [12]. Именно, в [12] показано, что порядки точности минимаксного оценивания $\|f\|_p$ существенно различаются при $p = 2k$ и при $p \neq 2k$.

Доказательство п. 1) теоремы 1.1 будет дано в разделе 2, а п. 2) теоремы 1.1 — в разделе 3; там же мы опишем структуру состоятельных в минимаксном смысле тестов при выполнении условий различимости. В разделе 4 мы перенесем результаты на задачу 2.

2. Нижние границы в задаче 1

2.1. Метод построения нижних границ. Построение нижних границ основано на асимптотическом варианте байесовского подхода и следует схеме, описанной в [3, пп. 2.1, 4.1] для случая простой гипотезы H_0 (см. также [5], [9]). Чтобы получить соотношение $\gamma_n \rightarrow 1$, достаточно построить такие последовательности вероятностных мер $\pi_n^{(0)}, \pi_n^{(1)}$ на $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}^n)$, что выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} & \text{(i) } \pi_n^{(0)}(V_{n,0}) \rightarrow 1; \quad \text{(ii) } \pi_n^{(1)}(V_{n,1}) \rightarrow 1; \\ & \text{(iii) } \text{var}(\mathbf{P}_{\pi_n^{(0)}}, \mathbf{P}_{\pi_n^{(1)}}) \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\mathbf{P}_{\pi_n^{(l)}}$ — смеси по мерам $\pi_n^{(l)}$, $l = 0, 1$:

$$\mathbf{P}_{\pi_n^{(l)}}(A) = \int \mathbf{P}_{n,v}(A) \pi_n^{(l)}(dv),$$

и

$$\text{var}(\mathbf{P}_{\pi_n^{(0)}}, \mathbf{P}_{\pi_n^{(1)}}) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}_{n,0}} |f_{\pi_n^{(1)}}(x) - f_{\pi_n^{(0)}}(x)|$$

— расстояние по вариации (L_1 -расстояние) между смесями; здесь

$$f_{\pi_n^{(l)}}(x) = \frac{d\mathbf{P}_{\pi_n^{(l)}}}{d\mathbf{P}_{n,0}}(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \exp\left(-\frac{\|v\|^2}{2} + (x, v)\right) \pi_n^{(l)}(dv).$$

Мы будем искать меры $\pi_n^{(l)}$ как произведения одинаковых одномерных мер $\pi_{n,l}$ на $\mathbf{R}^1$: $\pi_n^{(l)}(dv_1 \cdots dv_n) = \pi_{n,l}(dv_1) \times \cdots \times \pi_{n,l}(dv_n)$. При этом

$$f_{\pi_n^{(l)}}(x) = \prod_{i=1}^n f_{\pi_{n,l}}(x_i), \quad f_{\pi_{n,l}}(t) = \frac{d\mathbf{P}_{\pi_{n,l}}}{d\mathbf{P}_{1,0}}(t) = \int_{\mathbf{R}^1} \exp\left(-\frac{u^2}{2} + tu\right) \pi_{n,l}(du),$$

здесь $d\mathbf{P}_{\pi_{n,l}}$ — «одномерная» смесь по мере $\pi_{n,l}$, $f_{\pi_{n,l}}$ — плотности смеси относительно стандартной гауссовской меры $\mathbf{P}_{1,0}$, $l = 0, 1$. Используя неравенство Чебышева, легко видеть, что для проверки условий (i) и (ii) в (2.1) достаточно установить соотношения: для некоторых $C_1 > 1 > C_0 > 0$

$$n\mathbf{E}_{\pi_{n,0}} |t|^p \leq (C_0 R_{n,0})^p; \quad n\mathbf{D}_{\pi_{n,0}} |t|^p = o(R_{n,0}^{2p}); \quad (2.2)$$

$$n\mathbf{E}_{\pi_{n,1}} |t|^p \geq (C_1 R_{n,1})^p; \quad n\mathbf{D}_{\pi_{n,1}} |t|^p = o(R_{n,1}^{2p}), \quad (2.3)$$

где $\mathbf{D}_{\pi}$ — дисперсия по мере π .

З а м е ч а н и е 2.1. Если выполнены соотношения (2.2), (2.3), причем в первых неравенствах имеет место равенство, то меры $\pi_n^{(l)}$ с вероятностью, стремящейся к 1, сосредоточены внутри колец $\{1 - \delta \leq \|v\|_p / C_l R_{n,l} \leq 1 + \delta\}$ для любого $\delta > 0$, $l = 0, 1$.

Для заряда r на $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1)$ обозначим

$$\|r\|^2 = \int_{\mathbb{R}^1} \int_{\mathbb{R}^1} (e^{uv} - 1) r(du) r(dv). \quad (2.4)$$

По поводу полунормы $\|r\|$ на пространстве зарядов см. [5], [9]; для наших целей мы можем считать заряды конечными и финитными.

Для проверки условия (iii) в (2.1) удобно следующее утверждение.

Лемма 2.1. Пусть при достаточно больших n для некоторого $\delta > 0$

$$\inf_{t \in \mathbb{R}^1} f_{\pi_{n,l}}(t) \geq \delta, \quad l = 0 \text{ или } 1. \quad (2.5)$$

Тогда для выполнения условия (iii) в (2.1) достаточно, чтобы

$$n \|\pi_{n,1} - \pi_{n,0}\|^2 = n \mathbb{E}_{\pi_{1,0}} (f_{\pi_{n,1}}(t) - f_{\pi_{n,0}}(t))^2 = o(1). \quad (2.6)$$

Доказательство. В силу симметрии условий можно считать $l = 0$. Используя неравенство $1 + x \leq e^x$, видим, что

$$\begin{aligned} \text{var}^2(P_{\pi_n^{(0)}}, P_{\pi_n^{(1)}}) &\leq \mathbb{E}_{\pi_n^{(0)}} \left(\frac{f_{\pi_n^{(1)}}(x)}{f_{\pi_n^{(0)}}(x)} - 1 \right)^2 = \mathbb{E}_{\pi_n^{(0)}} \left(\frac{f_{\pi_n^{(1)}}(x)}{f_{\pi_n^{(0)}}(x)} \right)^2 - 1 \\ &= \left(\mathbb{E}_{\pi_{n,0}} \left(\frac{f_{\pi_{n,1}}(t)}{f_{\pi_{n,0}}(t)} - 1 \right)^2 + 1 \right)^n - 1 \leq \exp \left(n \mathbb{E}_{\pi_{n,0}} \left(\frac{f_{\pi_{n,1}}(t)}{f_{\pi_{n,0}}(t)} - 1 \right)^2 \right) - 1, \end{aligned}$$

так что для выполнения условия (iii) в (2.1) достаточно, чтобы

$$n \mathbb{E}_{\pi_{n,0}} \left(\frac{f_{\pi_{n,1}}(t)}{f_{\pi_{n,0}}(t)} - 1 \right)^2 = n \mathbb{E}_{\pi_{1,0}} \frac{(f_{\pi_{n,1}}(t) - f_{\pi_{n,0}}(t))^2}{f_{\pi_{n,0}}(t)} = o(1). \quad (2.7)$$

Но при выполнении условия (2.5) соотношение (2.7) вытекает из (2.6). Лемма доказана.

Разлагая подынтегральную функцию (2.4) в ряд по степеням uv , получаем представление:

$$\|r\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\mu_j(r))^2}{j!}; \quad \mu_j(r) = \int_{\mathbb{R}^1} u^j r(du),$$

$\mu_j(r)$ — моменты заряда r , и если меры $\pi_{n,l}$, $l = 0, 1$, симметричны (только такие меры мы будем использовать ниже), то (2.6) можно представить в виде:

$$n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\mu_{2j}(\pi_{n,1}) - \mu_{2j}(\pi_{n,0}))^2}{(2j)!} = o(1). \quad (2.8)$$

Схема построения мер $\pi_{n,l}$, $l = 0, 1$, ниже состоит в том, чтобы при выполнении условий (2.2), (2.3) попытаться обратить в 0 как можно больше первых членов ряда (2.8).

Для меры π на $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1)$ обозначим через $|\pi| = \inf\{T: \pi([-T, T]) = 1\}$ половину длины симметричного носителя меры. Удобно использовать следующее простое утверждение.

Лемма 2.2. Пусть $|\pi_{n,l}| = O(1)$, $l = 0, 1$.

- 1) Пусть меры $\pi_{n,l}$, $l = 0, 1$, симметричны. Тогда выполнено (2.5).
- 2) Пусть выполнены первые условия (2.2), (2.3), причем в них имеет место равенство по порядку, и $R_{n,l} \rightarrow \infty$, $l = 0, 1$. Тогда выполнены и вторые условия (2.2), (2.3).
- 3) Пусть меры $\pi_{n,l}$, $l = 0, 1$, симметричны, $\mu_{2j}(\pi_{n,1}) = \mu_{2j}(\pi_{n,0})$, $j \leq k$, $k \geq 1$, и $n(\mu_{2(k+1)}(\pi_{n,l}))^2 = o(1)$, $l = 0, 1$. Тогда выполнено (2.8).

Доказательство. Утверждение 1) вытекает из следующих оценок: для симметричной вероятностной меры π

$$\begin{aligned} f_{\pi}(t) &= \int_{\mathbf{R}^1} e^{-u^2/2+ut} \pi(du) = \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbf{R}^1} e^{-u^2/2+ut} \pi(du) + \int_{\mathbf{R}^1} e^{-u^2/2-ut} \pi(du) \right) \\ &= \int_{\mathbf{R}^1} e^{-u^2/2} \operatorname{ch}(tu) \pi(du) \geq \int_{\mathbf{R}^1} e^{-u^2/2} \pi(du) \geq e^{-|t|^2/2}. \end{aligned}$$

Утверждения 2) и 3) вытекают из неравенств $\mathbf{E}_{\pi}|t|^{a+b} \leq |\pi|^a \mathbf{E}_{\pi}|t|^b$ при $a > 0, b > 0$, $\mathbf{D}_{\pi}|t|^p \leq \mathbf{E}_{\pi}|t|^{2p}$ и очевидных оценок для суммы ряда в (2.8).

2.2. Случай $p \leq 2$. Проиллюстрируем эту схему для случая $p \leq 2$.

Пусть $R_{n,0} = U_n^{1/p} R_{n,0}^*$, $U_n \rightarrow \infty$, причем можно считать, что $U_n = o(n^a)$ для достаточно малого $a > 0$. Положим

$$\pi_{n,1} = \frac{\delta_{-b_1} + \delta_{b_1}}{2}; \quad \pi_{n,0} = (1-h)\delta_0 + \frac{h(\delta_{-b_0} + \delta_{b_0})}{2};$$

здесь и ниже δ_t есть масса, сосредоточенная в точке $t \in \mathbf{R}^1$, так что меры симметричны и $|\pi_{n,l}| = b_l$, $l = 0, 1$. Пусть $b_l = b_{l,n} = o(1)$; $h = h_n = o(1)$ — положительные последовательности, которые выбираются из условий:

$$b_1^2 = h b_0^2; \quad h = n^{-1/2} A_n, \quad (2.9)$$

$$2A_n b_0^p = U_n, \quad A_n b_0^2 \rightarrow \infty, \quad A_n b_0^2 = o(n^{1/4}), \quad A_n b_0^4 \rightarrow 0$$

(можно положить $2A_n = U_n^{1+p/2}$, $b_0 = U_n^{-1/2}$, $a = \frac{1}{4}$). При этом выполнены условия (2.2), (2.3) для $R_{n,1} = (n/2)^{1/p} b_1 = 2^{-1/p} A_n^{1/2} b_0 R_{n,1}^* \gg R_{n,1}^*$:

$$n \mathbf{E}_{\pi_{n,0}} |t|^p = n h b_0^p = \frac{R_{n,0}^p}{2}; \quad n \mathbf{E}_{\pi_{n,1}} |t|^p = n b_1^p = 2 R_{n,1}^p.$$

Первое условие (2.9) позволяет аннулировать разность вторых моментов в (2.8), а для четвертых моментов имеем:

$$n(\mu_4(\pi_{n,0}))^2 = n h^2 b_0^8 = A_n^2 b_0^8 = o(1); \quad n(\mu_4(\pi_{n,1}))^2 = n b_1^8 = n^{-1} (A_n b_0^2)^4 = o(1).$$

С учетом леммы 2.2 п. 1) теоремы 1.1 при $p \leq 2$ доказан.

2.3. Случай $p \geq 2$. Пусть $2k \leq p < 2(k+1)$, $k = 1, 2, \dots$. Для последовательностей числовых наборов $z_1 > z_2 > \dots > z_{k+1} > 0$, $h_1, h_2, \dots, h_{k+1}$; $z_i = z_{i,n}$, $h_i = h_{i,n} > 0$, $1 \leq i \leq k+1$, таких, что $H = \sum_i h_i \leq 1$, (их вид будет уточнен ниже) положим

$$\begin{aligned} H_1 &= \sum_{i: 1 \leq 2i-1 \leq k+1} h_{2i-1}, \quad H_0 = \sum_{i: 2 \leq 2i \leq k+1} h_{2i}; \quad r(z, h) = \frac{h(\delta_{-z} + \delta_z)}{2}, \\ \pi_{n,1} &= (1-H_1)\delta_0 + \sum_{i: 1 \leq 2i-1 \leq k+1} r(z_{2i-1}, h_{2i-1}), \\ \pi_{n,0} &= (1-H_0)\delta_0 + \sum_{i: 2 \leq 2i \leq k+1} r(z_{2i}, h_{2i}) \end{aligned}$$

(т.е. мера $\pi_{n,1}$ сосредоточена в точках $0, \pm z_1, \pm z_3, \dots$, а мера $\pi_{n,0}$ — в точках $0, \pm z_2, \pm z_4, \dots$ и меры симметричны). Положим $h = h_{k+1} = \text{const} \in (0, 1)$.

Зафиксировав на время наборы $\{z_i\}$, выберем наборы $\bar{h} = \{h_i, i = 1, \dots, k\}$ так, чтобы аннулировать первые k слагаемых в ряде (2.8), т.е. чтобы

$$\mu_{2j}(\pi_{n,1}) = \mu_{2j}(\pi_{n,0}), \quad j = 1, \dots, k.$$

Это приводит к системе уравнений относительно $\bar{h}$:

$$\sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} h_i z_i^{2j} = (-1)^{k+1} h z_{k+1}^{2j}; \quad j = 1, \dots, k. \quad (2.10)$$

Положим

$$Q_i(z) = \frac{z^2}{z_i^2} \prod_{1 \leq s \leq k, s \neq i} \frac{z^2 - z_s^2}{z_i^2 - z_s^2}.$$

Лемма 2.3. При $z_1 > z_2 > \dots > z_{k+1} > 0$ наборы $h_i = (-1)^{k-i} h Q_i(z_{k+1})$, $i = 1, \dots, k$, суть решения системы (2.10) и $h_i > 0$, $i = 1, \dots, k$.

Доказательство. При $0 < z < \min_{1 \leq i \leq k} z_i$ легко непосредственно проверить неравенство $(-1)^{k-i} h Q_i(z) > 0$, $i = 1, \dots, k$. Для проверки того, что величины h_i удовлетворяют системе (2.10), рассмотрим функции

$$P_j(z^2) = \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} h Q_i(z) z_i^{2j} + (-1)^k h z^{2j}, \quad j = 1, \dots, k,$$

как полиномы степени k от $x = z^2$. Полагая $z_0 = 0$, легко проверить, что $Q_j(z_i)$ равно 1 при $i = j$ и 0 при $i \neq j$, $Q_j(z_0) = 0$; $i, j = 1, \dots, k$. Отсюда следует, что $P_j(z_i^2) = 0$ при $i = 0, \dots, k$, так что $P_j(x) = 0$ тождественно при $j = 1, \dots, k$. В частности, $P_j(z_{k+1}^2) = 0$, $j = 1, \dots, k$, что равносильно утверждению леммы.

Вернемся к выбору наборов $\{z_i\}$. Зададимся положительными последовательностями $x = x_n = o(1)$, $y = y_n = o(1)$, $b = b_n = o(1)$ и положим $z_1 = b$; $z_i^2 = b^2 x y^{i-2}$, $2 \leq i \leq k+1$. При этом из леммы 2.3 видим, что

$$h_1 = h x y^{k-1} \frac{(x - x y^{k-1})(x y - x y^{k-1}) \dots (x y^{k-2} - x y^{k-1})}{(1-x)(1-xy) \dots (1-xy^{k-2})} \sim h x^k y^{\phi_1(k)}, \quad (2.11)$$

а при $2 \leq i \leq k$

$$h_i = h \frac{x y^{k-1} (1 - x y^{k-1})(x - x y^{k-1}) \dots (x y^{i-3} - x y^{k-1})(x y^{i-1} - x y^{k-1}) \dots}{x y^{i-2} (1 - x y^{i-2})(x - x y^{i-2}) \dots (x y^{i-3} - x y^{i-2})(x y^{i-2} - x y^{i-1}) \dots} \sim h y^{\phi_i(k)}, \quad (2.12)$$

где

$$\phi_i(k) = \begin{cases} \frac{k(k-1)}{2} & \text{при } i = 1, \\ \frac{k(k-1) - (i-2)(2k-i+1)}{2} & \text{при } 2 \leq i \leq k. \end{cases}$$

Отметим, что $\phi_i(k) > 0$ при $1 \leq i \leq k$, и положим $\phi_1(k) = \phi_2(k) = \phi(k)$, $z = z_n = y^{\phi(k)}$.

В силу (2.11), (2.12) при больших n выполнено условие $H_1 + H_0 \sim h < 1$, так что $\pi_{n,i}$ — вероятностные меры и $|\pi_{n,1}| = b = o(1)$, $|\pi_{n,0}| = b x^{1/2} = o(1)$. Также используя соотношения (2.11), (2.12), имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\pi_{n,1}} |t|^p &= \sum_{j: 1 \leq 2j+1 \leq k+1} h_{2j+1} z_{2j+1}^p \sim h b^p (x^k y^{\phi_1(k)} + x^{p/2} y^{\psi_3(k,p)} + \dots \\ &+ x^{p/2} y^{\psi_{2j+1}(k,p)} + \dots) \sim h b^p x^k z; \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\pi_{n,0}} |t|^p &= \sum_{j: 2 \leq 2j \leq k+1} h_{2j} z_{2j}^p \sim h b^p (x^{p/2} y^{\psi_2(k,p)} + \dots + x^{p/2} y^{\psi_{2j}(k,p)} + \dots) \\ &\sim h b^p x^{p/2} z; \quad \psi_i(k,p) = \phi_i(k) + \frac{p(i-2)}{2}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

поскольку $\psi_i(k,p) = \phi(k) + (p-2k+i-1)(i-2)/2 > \phi(k)$ при $2k \leq p$, $2 \leq i \leq k$, а степень y в последнем члене, входящем в одну из сумм, есть $\psi_{k+1}(k,p) = (k-1)p/2 > \phi(k)$. Аналогичные оценки показывают, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\pi_{n,1}} |t|^{2(k+1)} &= O(b^{2(k+1)} x^k z), \\ \mathbf{E}_{\pi_{n,0}} |t|^{2(k+1)} &= O(b^{2(k+1)} x^{k+1} z). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Пусть $R_{n,0} = U_n^{1/p} R_{n,0}^*$, $U_n \rightarrow \infty$, причем $U_n = o(n^a)$ для достаточно малого $a > 0$. Выберем $x = x_n = o(1)$, $b = b_n = o(1)$, $y = y_n = o(1)$ так, чтобы

$$\begin{aligned} 2h n x^{p/2} b^p z &= R_{n,0}^p, \quad n x^k b^p z \gg (R_{n,1}^*)^p = n^{1/2}, \\ x^k b^{2(k+1)} z &= o(n^{-1/2}). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Полагая $R_{n,1}^p = nhx^k b^p z/2$ и используя (2.13)–(2.15), видим, что

$$n\mathbf{E}_{\pi_{n,1}}|t|^p \geq 2R_{n,1}^p(1+o(1)), \quad 2n\mathbf{E}_{\pi_{n,0}}|t|^p \leq R_{n,0}^p(1+o(1)),$$

$$n(\mathbf{E}_{\pi_{n,1}}|t|^{2(k+1)})^2 = O(nx^{2k}b^{4(k+1)}z^2) = o(1),$$

$$n(\mathbf{E}_{\pi_{n,0}}|t|^{2(k+1)})^2 = O(nx^{2(k+1)}b^{4(k+1)}z^2) = o(x^2) = o(1),$$

и в силу леммы 2.2 последовательность $R_{n,1} \gg R_{n,1}^*$ удовлетворяет условиям п. 1) теоремы 1.1.

Осталось показать возможность выбора величин, удовлетворяющих (2.16). Положим $b = U_n^{-\alpha}$, $x = n^{-1/2k}U_n^\beta$, $2hz = U_n^{-\gamma}$; достаточно выбрать такие $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, чтобы выполнялись соотношения:

$$\beta = 2\alpha + \frac{2(1+\gamma)}{p}, \quad \gamma + p\alpha < k\beta < \gamma + 2(k+1)\alpha.$$

Чтобы удовлетворить этим соотношениям, достаточно выбрать γ так, чтобы $0 < \gamma < 2k/(p-2k)$ (это обеспечивает неравенство $\delta = 2k(1+\gamma)/p - \gamma > 0$), и величину α — так, чтобы $\delta/2 < \alpha < \delta/(p-2k)$. Это возможно при $2k \leq p < 2(k+1)$.

Таким образом, п. 1) теоремы 1.1 доказан.

З а м е ч а н и е 2.2. Фактически мы доказали следующее. Пусть $R_{n,0} = U_n R_{n,0,p}^*$, $U_n \rightarrow \infty$, $U_n = o(n^a)$ для некоторого $0 < a \leq a(p)$. Тогда существует такое $\delta(p) > 0$, что $\gamma_n \rightarrow 1$ при $R_{n,1} = O(U_n^\delta R_{n,1,p}^*)$, $0 < \delta \leq \delta(p)$.

Кроме того, с учетом замечания 2.1, в теореме 1.1 множества $V_{n,l}$ можно заменить кольцами $\{c_l \leq \|v\|_p/R_{n,l} \leq C_l\}$ при любых $0 < c_l < C_l$, $l = 0, 1$.

3. Верхние границы в задаче 1

3.1. Метод построения верхних границ. Пусть $R_{n,0} = o(R_{n,0}^*)$; $R_{n,1} = U_n R_{n,1}^*$, $U_n \rightarrow \infty$. Мы покажем, что в условиях п. 2) теоремы 1.1 состоятельными в минимаксном смысле являются тесты $\psi_{n,p}(x) = 1_{\{L_{n,p}(x) > T_n\}}$, основанные на статистиках $L_n = L_{n,p}(x) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n u_p(x_i)$ и последовательности $T_n = U_n^{p/2} \rightarrow \infty$ (вид функций $u_p(x)$ мы уточним ниже).

Для оценки вероятностей ошибок I рода $\alpha(\psi_{n,p}, v) = \mathbf{P}_{n,v}\{L_n > T_n\}$, $v \in V_{n,0}$, при $T_n > \mathbf{E}_{n,v}(L_n)$ используем неравенство Чебышева:

$$\mathbf{P}_{n,v}\{L_n > T_n\} = \mathbf{P}_{n,v}\{L_n - \mathbf{E}_{n,v}(L_n) > T_n - \mathbf{E}_{n,v}(L_n)\} \leq \frac{\mathbf{D}_{n,v}(L_n)}{(T_n - \mathbf{E}_{n,v}(L_n))^2},$$

так что достаточно показать, что

$$\sup_{v \in V_{n,0}} \mathbf{D}_{n,v}(L_n) = O(1), \quad \sup_{v \in V_{n,0}} \mathbf{E}_{n,v}(L_n) = o(1). \quad (3.1)$$

Оценим вероятности ошибок II рода $\beta(\psi_{n,p}, v) = \mathbf{P}_{n,v}\{L_n \leq T_n\}$, $v \in V_{n,1}$. Также используя неравенство Чебышева при $T_n < \mathbf{E}_{n,v}(L_n)$, имеем

$$\mathbf{P}_{n,v}\{L_n \leq T_n\} = \mathbf{P}_{n,v}\{\mathbf{E}_{n,v}(L_n) - L_n \geq \mathbf{E}_{n,v}(L_n) - T_n\} \leq \frac{\mathbf{D}_{n,v}(L_n)}{(\mathbf{E}_{n,v}(L_n) - T_n)^2},$$

так что достаточно показать, что

$$\inf_{v \in V_{n,1}} \frac{\mathbf{E}_{n,v}(L_n)}{T_n} \rightarrow \infty, \quad \sup_{v \in V_{n,1}} \frac{\mathbf{D}_{n,v}(L_n)}{\mathbf{E}_{n,v}^2(L_n)} = o(1). \quad (3.2)$$

Ниже мы будем использовать неравенства: при $0 \leq a < b$

$$n^{-1} \sum_{i=1}^n |x_i|^a \leq \left(n^{-1} \sum_{i=1}^n |x_i|^b \right)^{a/b}, \quad \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^b \right)^{a/b} \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^a. \quad (3.3)$$

3.2. Случай $p \leq 2$. Положим $u_p(x) = |x|^p - c(p)$, где $c(p) = \mathbf{E}|\xi|^p$, ξ есть стандартная гауссовская случайная величина.

Лемма 3.1. Пусть $p \leq 2$, $h_p(t) = \mathbf{E} u_p(\xi+t)$, $H_p(t) = \mathbf{D} u_p(\xi+t)$, $x_+ = \max(x, 0)$. Существуют такие постоянные $C_i = C_i(p) > 0$, что для любого $t \in \mathbf{R}^1$

$$C_1 \min(t^2, |t|^p) \leq h_p(t) \leq C_2 |t|^p; \quad H_p(t) \leq C_3(1 + |t|^{2(p-1)+}).$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что $h_p(t)$ — четная бесконечно дифференцируемая функция, строго возрастающая по $|t|$, $h_p(0) = 0$, $h_p''(0) > 0$. Поэтому для любого $b > 0$ найдутся такие постоянные $B_i = B_i(p, b) > 0$, что

$$B_1 t^2 \leq h_p(t) \leq B_2 t^2, \quad |t| \leq b. \quad (3.4)$$

С другой стороны, используя неравенство

$$|a+b|^p \leq A(p)(|a|^p + |b|^p), \quad A(p) = 2^{(p-1)+}, \quad (3.5)$$

получим оценки

$$-2c(p) + \frac{|t|^p}{A(p)} \leq h_p(t) \leq (A(p) - 1)c(p) + A(p)|t|^p. \quad (3.6)$$

Из (3.4), (3.6) вытекают требуемые оценки для $h_p(t)$. Далее, используя при $p > 1$ формулу Тейлора:

$$|t + \xi|^p - |t|^p = p|\theta\xi + t|^{p-1}|\xi| \leq p(|\xi|^{p-1} + |t|^{p-1})|\xi|, \quad (3.7)$$

а при $0 < p \leq 1$ — вытекающую из (3.5) оценку $||t + \xi|^p - |t|^p| \leq |\xi|^p$, с учетом неравенства $\mathbf{D}(|t + \xi|^p) \leq \mathbf{E}(|t + \xi|^p - |t|^p)^2$, получим требуемые оценки для $H_p(t)$. Лемма доказана.

Для оценки вероятностей ошибок I рода проверим выполнение соотношений (3.1). Используя лемму 3.1, имеем при $R_{n,0}^* \ll R_{n,0}^* = n^{1/2p}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{n,v}(L_n) &= n^{-1/2} \sum_{i=1}^n h_p(v_i) \leq C_2 n^{-1/2} \sum_{i=1}^n |v_i|^p \leq C_2 n^{-1/2} R_{n,0}^p = o(1), \\ \mathbf{D}_{n,v}(L_n) &= n^{-1} \sum_{i=1}^n H_p(v_i) \leq C_3 \left(1 + n^{-1} \sum_{i=1}^n |v_i|^{2(p-1)+} \right) \\ &\leq C_3(1 + D_n^{2(p-1)+/p}) = O(1), \quad D_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n |v_i|^p \end{aligned} \quad (3.8)$$

(мы использовали также первое неравенство (3.3), поскольку $2(p-1)+ \leq p$ при $0 < p \leq 2$, и соотношения $D_n \leq n^{-1} R_{n,0}^p = o(1)$).

Для оценки вероятностей ошибок II рода проверим выполнение соотношений (3.2). Также используя лемму 3.1, имеем

$$\mathbf{E}_{n,v}(L_n) \geq C_1 n^{-1/2} \left(\sum_{i \in I} v_i^2 + \sum_{i \notin I} |v_i|^p \right), \quad I = I_n(v) = \{i: |v_i| \leq 1\}.$$

Поскольку

$$S_{n,1} + S_{n,2} = \sum_{i \in I} |v_i|^p + \sum_{i \notin I} |v_i|^p \geq R_{n,1}^p$$

при $v \in V_{n,1}$, то одна из сумм $S_{n,1}$, $S_{n,2}$ не меньше $R_{n,1}^p/2$. Если это первая, то, используя первое неравенство (3.3), имеем

$$n^{-1/2} \sum_{i \in I} v_i^2 \geq n^{1/2-2/p} S_{n,1}^{2/p} \geq n^{1/2-2/p} \left(\frac{R_{n,1}^p}{2} \right)^{2/p} \asymp U_n^2;$$

если же это вторая, то

$$n^{-1/2} S_{n,2} \geq n^{-1/2} \left(\frac{R_{n,1}}{2} \right)^p \asymp U_n^p n^{(2-p)/4}.$$

В любом случае выполнено первое из соотношений (3.2).

Далее, из оценок дисперсий, приведенных в (3.8), имеем: $D_{n,v}(L_n) = O(1)$ при $p \leq 1$ или $D_n = O(1)$; если же $1 \leq p \leq 2$ и $D_n = D_{n,1} + D_{n,2} \rightarrow \infty$, то, используя неравенство (3.5), получим:

$$D_{n,v}(L_n) = O\left(D_{n,1}^{2(p-1)/p} + D_{n,2}^{2(p-1)/p}\right);$$

$$D_{n,1} = n^{-1} \sum_{i \in I} |v_i|^p, \quad D_{n,2} = n^{-1} \sum_{i \notin I} |v_i|^p.$$

При этом, если $D_{n,1} \rightarrow \infty$, то, используя первое неравенство (3.3), имеем:

$$D_{n,1}^{2(p-1)/p} \leq \left(n^{-1} \sum_{i \in I} v_i^2\right)^{p-1} \leq n^{-1} \sum_{i \in I} |v_i|^2 = o(\mathbf{E}_{n,v}(L_n)),$$

так как $p-1 \leq 1$; если $D_{n,2} \rightarrow \infty$, то

$$D_{n,2}^{2(p-1)/p} \leq D_{n,2} \ll n^{-1/2} \sum_{i \notin I} |v_i|^p \leq \frac{\mathbf{E}_{n,v}(L_n)}{C_1},$$

так как $2(p-1)/p \leq 1$. В любом случае выполнено второе из соотношений (3.2). Таким образом, п. 2) теоремы 1.1 при $p \leq 2$ доказан.

3.3. Случай $p \geq 2$. Пусть $2k \leq p < 2(k+1)$, $k \geq 1$ и целое. Пусть ξ есть стандартная гауссовская случайная величина, $f_p(t) = \mathbf{E}|\xi + t|^p$ — четная бесконечно дифференцируемая функция. Пусть $c_j(p) = f_p^{(2j)}(0)$ — производные этой функции в точке 0. Рассмотрим такие функции $\phi_j(x)$, что $\mathbf{E}\phi_j(\xi + t) = t^{2j}$, $j = 0, 1, \dots, k-1$ (это полиномы степени $2j$; их явный вид $\phi_j(x) = \mathbf{E}(x + i\xi)^{2j}$, $i = \sqrt{-1}$, см. [12], [13]). Положим

$$u_p(x) = |x|^p - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{c_j(p)\phi_j(x)}{(2j)!} = |x|^p - Q_{k-1}(x^2),$$

Q_{k-1} — полином степени $k-1$.

Лемма 3.2. Пусть $p \geq 2$, $h_p(t) = \mathbf{E}u_p(\xi + t) = f_p(t) - P_{k-1}(t^2)$, P_{k-1} — полином степени $k-1$; $H_p(t) = \mathbf{D}u_p(\xi + t)$. Существуют такие постоянные $C_i = C_i(p) > 0$, что для любого $t \in \mathbf{R}^1$

$$C_1|t|^p \leq h_p(t) \leq C_2(|t|^p + t^{2k}); \quad H_p(t) \leq C_3(1 + |t|^{2(p-1)}).$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что $h_p(t)$ — четная бесконечно дифференцируемая функция, $h_p^{(j)}(0) = 0$, $j = 0, 1, \dots, 2k-1$; $h_p^{(2k)}(0) > 0$. Разлагая $|\xi + t|^p$ по формуле Тейлора в точке ξ и усредняя, получим

$$h_p(t) = d_k \mathbf{E}(|\xi + \theta t|^{p-2k}) t^{2k}, \quad \theta = \theta(t, \xi) \in [0, 1], \quad (3.9)$$

где $d_k = p(p-1) \cdots (p-2k+1)/(2k)! > 0$. Поскольку среднее в (3.9) ограничено и отделено от 0 на любом конечном интервале по t , для любого $b > 0$ найдутся такие постоянные $B_i = B_i(p, b) > 0$, что

$$B_0|t|^p \leq B_1 t^{2k} \leq h_p(t) \leq B_2 t^{2k}, \quad |t| \leq b. \quad (3.10)$$

Используя неравенство (3.5), аналогично (3.6) получаем:

$$\mathbf{E}(|\xi + \theta t|^{p-2k}) \leq A(p-2k) (\mathbf{E}|\xi|^{p-2k} + |t|^{p-2k}). \quad (3.11)$$

Из (3.9)–(3.11) вытекают верхние границы для $h_p(t)$.

Снова используя неравенство (3.5), получим: $|\xi + t|^p \geq |t|^p/A(p) - |\xi|^p$, откуда следует, что для достаточно большого $b > 0$ и некоторого $B > 0$

$$h_p(t) \geq \frac{|t|^p}{A(p)} - |P_{k-1}(t^2)| - \mathbf{E}|\xi|^p \geq B|t|^p \quad \text{при } |t| > b.$$

Таким образом получаем нижние границы для $h_p(t)$.

Используя неравенство, аналогичное (3.7), с учетом неравенств

$$D u_p(\xi + t) = D(u_p(\xi + t) - |t|^p) \leq 2E(|t + \xi|^p - |t|^p)^2 + 2EQ_{k-1}^2((\xi + t)^2),$$

$EQ_{k-1}^2((\xi + t)^2) = O(t^{4(k-1)})$, получим требуемые оценки для $H_p(t)$. Лемма доказана.

Для оценки вероятностей ошибок I рода проверим выполнение соотношений (3.1). Используя лемму 3.2, имеем:

$$E_{n,v}(L_n) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n h_p(v_i) \leq C_2 n^{-1/2} (S_1 + S_2),$$

где в силу первого неравенства (3.3)

$$S_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|^p \leq R_{n,0}^p, \quad S_2 = \sum_{i=1}^n v_i^{2k} \leq n^{1-2k/p} S_1^{2k/p},$$

так что при $R_{n,0} \ll R_{n,0}^* = n^{1/p-1/4k}$

$$\sup_{v \in V_{n,0}} E_{n,v}(L_n) \leq n^{-1/2} (R_{n,0}^p + n^{1-2k/p} R_{n,0}^{2k}) = o(n^{(2k-p)/4k} + 1) = o(1).$$

Далее, используя второе неравенство (3.3) и неравенство $2(p-1) \geq p$, имеем:

$$\begin{aligned} D_{n,v}(L_n) &= n^{-1} \sum_{i=1}^n H_p(v_i) \leq C_3 \left(1 + n^{-1} \sum_{i=1}^n |v_i|^{2(p-1)} \right) \\ &\leq C_3 (1 + n^{-1} S_1^{2(p-1)/p}) = O(1 + n^r) = O(1), \end{aligned} \quad (3.12)$$

так как легко проверить, что $r = 1 - 2/p - (p-1)/2k < 0$ при $p \geq 2k > 1$.

Для оценки вероятностей ошибок II рода проверим выполнение соотношений (3.2). Также используя лемму 3.2, имеем

$$E_{n,v}(L_n) \geq C_1 n^{-1/2} S_1 \geq C_1 n^{-1/2} R_{n,1}^p \asymp U_n^p, \quad (3.13)$$

так что справедливо первое из соотношений (3.2). Из (3.12), (3.13) имеем: $D_{n,v}(L_n) \leq B n^{-1/p} (E_{n,v} L_n)^{2(p-1)/p} = o((E_{n,v} L_n)^2)$, так что справедливо и второе из соотношений (3.2). Это завершает доказательство теоремы 1.1.

4. Доказательство теоремы 1.2

4.1. Нижние границы. Пусть $\varphi(t)$ есть $[\sigma + 2]$ -непрерывно дифференцируемая функция на $\mathbf{R}^1$ с носителем в интервале $(0, 1)$ и такая, что $\|\varphi\|_2 = 1$. Тогда для любого целого $n > 0$ набор функций $\varphi_{i,n}(t) = n^{1/2} \varphi(nt - i + 1)$, $i = 1, \dots, n$, можно рассматривать как ортонормальную систему функций в $L_2(0, 1)$ с непересекающимися носителями, и найдутся такие не зависящие от n постоянные $C_1 \geq C_0 > 0$, что при всех $p \geq 1$, $h \geq 1$, $n > 0$ справедливы неравенства:

$$C_0 \|g_{\theta,n}\|_{\sigma,p,h} \leq \|\theta\|_p n^{\sigma+1/2-1/p} \leq C_1 \|g_{\theta,n}\|_{\sigma,p,h}; \quad \theta \in \mathbf{R}^n, \quad (4.1)$$

где $g_{\theta,n} = \sum_{i=1}^n \theta_i \varphi_{i,n}$, $\|\theta\|_p = (\sum_{i=1}^n |\theta_i|^p)^{1/p}$; аналогичные неравенства при $\sigma = 0$ справедливы для L_p -нормы:

$$C_0 \|g_{\theta,n}\|_p \leq \|\theta\|_p n^{1/2-1/p} \leq C_1 \|g_{\theta,n}\|_p, \quad \theta \in \mathbf{R}^n. \quad (4.2)$$

Обозначим $\phi_l(p)$ показатель степени n в $R_{n,l,p}^*$: $R_{n,l,p}^* = n^{\phi_l(p)}$, и пусть $\psi_l(p) = \frac{1}{2} - 1/p + \phi_l(p)$. Отметим, что $\psi_l(p) > 0$, $l = 0, 1$. Положим $n_\varepsilon^* = n_* = \varepsilon^{-1/(\sigma+\psi_1(p))}$, т.е. $\varepsilon n_*^{\sigma+1/2-1/p} R_{n_*,1,p}^* = 1$. При этом

$$\begin{aligned} \rho_{\varepsilon,1,p}^* &= \varepsilon n_*^{1/2-1/p} R_{n_*,1,p}^* = \varepsilon n_*^{\psi_1(p)}, \\ \rho_{\varepsilon,0,p}^* &= \varepsilon n_*^{1/2-1/p} R_{n_*,0,p}^* = \varepsilon n_*^{\psi_0(p)}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Пусть $\rho_{\varepsilon,0} = W_{\varepsilon} \rho_{\varepsilon,0,p}^*$, $W_{\varepsilon} \rightarrow \infty$, $W_{\varepsilon} = o(n_*^b)$ для малого $b > 0$. Положим $n = n_{\varepsilon} \asymp W_{\varepsilon}^{-\alpha} n_* \rightarrow \infty$, $\alpha > 0$, $U_{\varepsilon} = W_{\varepsilon}^{\beta}$, $\beta = 1 + \alpha \psi_0(p) > 0$. Имеем:

$$\rho_{\varepsilon,0} \asymp U_{\varepsilon} \varepsilon n^{1/2-1/p} R_{n,0,p}^*. \quad (4.4)$$

Выбирая γ : $0 < \gamma < \min(\beta \delta(p) - \alpha \psi_1(p), \sigma \alpha)$, где $\delta(p)$ есть величина из замечания 2.2 (это возможно при малом $\alpha > 0$), положим

$$\rho_{\varepsilon,1} = W_{\varepsilon}^{\gamma} \rho_{\varepsilon,1,p}^* = U_{\varepsilon}^{\delta} \varepsilon n^{1/2-1/p} R_{n,1,p}^*, \quad 0 < \delta < \delta(p). \quad (4.5)$$

При этом

$$\varepsilon U_{\varepsilon}^{\delta} R_{n,1,p}^* n^{\sigma+1/2-1/p} = W^{\gamma} \left(\frac{n}{n_*} \right)^{\sigma} \asymp W^{\gamma-\sigma \alpha} = o(1). \quad (4.6)$$

Покажем, что семейство $\rho_{\varepsilon,1}$ удовлетворяет условиям п. 1) теоремы 1.2. Обозначим G_n линейную оболочку системы $\{\varphi_{i,n}; i = 1, \dots, n\}$. Положим $x = (x_1, \dots, x_n)$, $v = v(f) = (v_1, \dots, v_n)$,

$$x_i = \varepsilon^{-1} \int \varphi_{i,n}(t) dX_{\varepsilon}(t), \quad v_i = \varepsilon^{-1}(f, \varphi_{i,n});$$

$$V_{n,l} = \{v(f): f \in G_n \cap F_{\varepsilon,l}\}, \quad l = 0, 1;$$

$P_{\varepsilon,f}$ -распределения случайных векторов x есть $P_{n,v}$ -распределения на $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}^n)$. В силу неравенств (4.1), (4.2) и соотношений (4.3)–(4.6) множества $V_{n,l}$ содержат кольца $\{C_l \leq \|v\|_p / R_{n,l} \leq C_l\}$ при $R_{n,0} = U_{\varepsilon} R_{n,0,p}^*$, $R_{n,1} = U_{\varepsilon}^{\delta} R_{n,1,p}^*$ и некоторых $0 < C_l < C_l$, $l = 0, 1$. Поэтому утверждение п. 1) теоремы 1.2 вытекает непосредственно из замечания 2.2.

4.2. Верхние границы. Рассмотрим целочисленное семейство $n = n_{\varepsilon} \asymp n_*$, где n_* — величины, определенные в п. 4.1. Пусть

$$\rho_{\varepsilon,0} = \varepsilon n^{1/2-1/p} R_{n,0} \ll \rho_{\varepsilon,0}^* \asymp \varepsilon n^{1/2-1/p} R_{n,0,p}^*, \quad (4.7)$$

$$\rho_{\varepsilon,1} = \varepsilon n^{1/2-1/p} R_{n,1} \gg \rho_{\varepsilon,1}^* \asymp \varepsilon n^{1/2-1/p} R_{n,1,p}^*; \quad (4.8)$$

при этом $\rho_{\varepsilon,1}^* \asymp n^{-\sigma}$ в силу первого соотношения (4.3) и определения n_* . Пусть Δ_n — равномерное разбиение $[0, 1]$ на n интервалов $\delta_{1,n}, \dots, \delta_{n,n}$, $\phi_{i,n} = n^{1/2} 1_{\delta_{i,n}}$ — ортонормальная система в $L_2(0, 1)$, Pr_n есть оператор ортонормального проектирования в $L_2(0, 1)$ на пространство функций, постоянных на интервалах разбиения Δ_n : $\text{Pr}_n(f) = \sum_{i=1}^n (f, \phi_{i,n}) \phi_{i,n}$. Положим $x = x(X_{\varepsilon}) = (x_1, \dots, x_n)$, $v = v(f) = (v_1, \dots, v_n)$,

$$x_i = \varepsilon^{-1} \int \phi_{i,n}(t) dX_{\varepsilon}(t), \quad v_i = \varepsilon^{-1}(f, \phi_{i,n});$$

$$V_{n,l} = \{v(f): f \in F_{\varepsilon,l}\}, \quad l = 0, 1.$$

Ясно, что $P_{\varepsilon,f}$ -распределение векторов x есть $P_{n,v}$ -распределение на $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}^n)$. Легко видеть, что

$$\varepsilon n^{1/2-1/p} \|v(f)\|_p = \|\text{Pr}_n(f)\|_p \leq \|f\|_p, \quad (4.9)$$

и в силу (4.9) множество $V_{n,0}$ лежит в l_p^n -шаре радиуса $R_{n,0} \ll R_{n,0,p}^*$.

Воспользуемся следующим неравенством. Пусть $\|f\|_{\sigma,p,\infty} \leq C$ (это случай наиболее «широкой» альтернативы). Тогда найдутся такие не зависящие от n положительные постоянные B_1, B_2 , что

$$\|\text{Pr}_n f\|_p \geq B_1 \|f\|_p - B_2 n^{-\sigma}. \quad (4.10)$$

Неравенство (4.10) доказано в [3] (см. неравенство (5.16)) для шаров Никольского H_p^{σ} , совпадающих с шарами Бесова при $h = \infty$. Доказательство основано на возможности кусочной аппроксимации функций из шаров Никольского H_p^{σ} полиномами степени, зависящей от σ , с точностью $n^{-\sigma}$ в L_p -норме, где n — число интервалов аппроксимации.

Поскольку $\|f\|_p \geq \rho_{\varepsilon,1} \gg \rho_{\varepsilon,1}^* \asymp n^{-\sigma}$ при $f \in F_{\varepsilon,1}$, в силу неравенства (4.10) множество $V_{n,1}$ лежит вне l_p^n -шара радиуса порядка $R_{n,1} \gg R_{n,1,p}^*$.

Поэтому требуемое утверждение непосредственно следует из п. 2) теоремы 1.1. Состоятельными в минимаксном смысле являются тесты $\psi_{\varepsilon,p}(X_{\varepsilon}) = \psi_{n,p}(x(X_{\varepsilon}))$, где тесты $\psi_{n,p}(x)$ построены при доказательстве п. 2) теоремы 1.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ингстер Ю. И. О минимаксном непараметрическом обнаружении сигнала в гауссовском белом шуме. — Проблемы передачи информации, 1982, т. 18, № 2, с. 61–73.
2. Ingster Yu. I. Asymptotically minimax testing of nonparametric hypothesis. — Proceedings of the Fourth Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics. Vol. 1. Utrecht: VNU Sci. Press, 1987, p. 553–573.
3. Ingster Yu. I. Asymptotically minimax hypothesis testing for nonparametric alternatives. I, II, III. — Math. Methods Statist., 1993, v. 2, № 2, p. 85–114; № 3, p. 171–189; № 4, p. 249–268.
4. Суслина И. А. Минимаксное обнаружение сигнала для l_q -эллипсоидов с удаленным l_p -шаром. — Зап. науч. семин. ПОМИ, 1993, т. 207, с. 127–137.
5. Ингстер Ю. И. Минимаксное обнаружение сигнала при невырожденных функциях потерь и экстремальные выпуклые задачи. — Зап. науч. семин. ПОМИ, 1996, т. 228, с. 162–188.
6. Суслина И. А. Экстремальные задачи, возникающие при минимаксном обнаружении сигнала для l_q -эллипсоидов с удаленным l_p -шаром. — Зап. науч. семин. ПОМИ, 1996, т. 228, с. 312–332.
7. Lepski O. V., Spokoyny V. G. Minimax nonparametric hypothesis testing: the case of an inhomogeneous alternative. — Bernoulli, 1999, v. 5, № 2, p. 333–358.
8. Spokoyny V. G. Adaptive and spatially adaptive testing of nonparametric hypothesis. — Math. Methods Statist., 1998, v. 7, № 3, p. 245–273.
9. Ingster Y. I., Suslina I. A. Minimax nonparametric hypothesis testing for ellipsoids and Besov bodies. Report № 12. Berlin: Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, 1997, 88 p.
10. Donoho D. L., Johnstone I. M., Kerkycharian G., Picard D. Wavelet shrinkage: asymptopia? — J. Roy. Statist. Soc., 1995, v. 57, № 2, p. 301–369.
11. Triebel H. Theory of Function Spaces. II. Basel: Birkhäuser, 1992, 370 p.
12. Lepski O. V., Nemirovski A., Spokoyny V. G. On estimation of non-smooth functionals. Technical Report № 297. Berlin: Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, 1996.
13. Ибрагимов И. А., Немировский А. С., Хасьминский Р. З. Некоторые задачи непараметрического оценивания в гауссовском белом шуме. — Теория вероятн. и ее примен., 1986, т. XXXI, в. 3, с. 451–466.

Поступила в редакцию
16.III.1998

© 2000 г.

МАЛЫШЕВ В. А.*

МАКРОРАЗМЕРНОСТЬ — ИНВАРИАНТ ЛОКАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ

На множестве счетных графов с метками определяется марковский процесс. Переходы в нем — локальные преобразования графа. Определяется макроразмерность бесконечного графа и доказывается, что она является инвариантом такой динамики.

Ключевые слова и фразы: марковский процесс, макроразмерность графа, инвариант динамики.

* INRIA, France; e-mail: Vadim.Malyshev@inria.fr