Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Маниа, Р. Н. Тевзадзе, Семимартингальные функции класса диффузионных процессов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, том 45, выпуск 2, 374–380

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp470>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 02:36:05

событие, что только вершины Υ_0 не принадлежат $R(0)$. Пусть D_k — все кластеры, с которыми Υ имеет непустое пересечение. Тогда условная вероятность

$$\mathbf{P}\left\{|\cup_k D_k| > NC \mid \Upsilon_0\right\} < \beta \sum |D_k \setminus D_k \cap \Upsilon_0| \quad (20)$$

для некоторого $\beta < 1$. Тогда

$$P(x, N) = \sum_{\Upsilon_0} \sum_{\{D_k\}} \mathbf{P}(\Upsilon_0) \mathbf{P}\left\{|\cup_k D_k| > NC \mid \Upsilon_0\right\} < \beta^{NC/2} = \beta_1^{NC}. \quad (21)$$

Заметим, что вероятность $P(N)$ того, что $|O_N(0)| \geq |O_{NC}(t, \omega)|$, ограничена сверху посредством

$$P(N) \leq \sum_x P(x, N) \leq C(\gamma) N^{d+\gamma} \beta_1^{NC} \quad (22)$$

для любого $\gamma > 0$ и некоторого $C(\gamma) > 0$. Второе неравенство леммы следует тогда из леммы Бореля–Кантелли. Для доказательства первого неравенства мы используем результат, двойственный лемме 2.

Лемма 6. *Предположим, что грамматика локальна, локально ограничена, локально обратима и что $G(0) \in GC_n$ для некоторого достаточно большого n . Тогда она метрически ограничена снизу, т.е. существует константа $C = C(n) > 0$ такая, что для любого G и любой пары вершин $x, y \in V(G)$*

$$d_{TG}(x, y) \geq d_G(x, y) - C \quad (23)$$

для произвольного преобразования $T = T(\text{Sub}_i, \psi)$, где мы пишем TG вместо $T\alpha$.

Первое неравенство леммы 5 следует из последней леммы аналогично.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Novotny Th., Requardt M.* Dimension Theory of Graphs and Networks. Preprint. Göttingen: Göttingen University, 1997; <http://xxx.lanl.org/hep-th/9707082>.
2. *Малышев В. А.* Случайные графы и грамматики на графах. — Дискретн. матем., 1998, т. 10, в. 2, с. 31–44.
3. *Malyshev V. A.* Random infinite spin graph evolution. — On Dobrushin's Way. From Probability Theory to Statistical Physics. Ed. by R. Minlos et al. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2000 (в печати).

Поступила в редакцию
16.XII.1999

© 2000 г.

МАНИЯ М., ТЕВЗАДЗЕ Р.**

СЕМИМАРТИНГАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ КЛАССА ДИФфуЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ¹⁾

Получены необходимые и достаточные условия на функцию $f = (f(t, x), t \geq 0, x \in \mathbf{R})$, для которой преобразованный процесс $f = f(t, \xi_t)$ будет семимартингалом (или процессом Ито) для любого диффузионного процесса ξ с измеримыми ограниченными коэффициентами и с гёльдеровой, равномерно невырожденной диффузией.

* Математический институт им. А. Размадзе АН Грузии, ул. М. Алексидзе, 1, 380093 Тбилиси, Грузия; e-mail: mania@imath-srv.mi.acnet.ge

** Институт кибернетики, ул. Еули, 5, 380086 Тбилиси, Грузия.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Академии наук Грузии (гранты 1.10 и 1.26) и гранта INTAS-97-30204.

Ключевые слова и фразы: семимартингальные функции, диффузионный процесс, обобщенные производные.

Пусть S^2 — класс непрерывных семимартингалов X , определенных на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, F = (\mathcal{F}_t, t \geq 0), P)$ с разложением $X = M + A$, $M \in \mathcal{M}_{loc}$, $A \in \mathcal{A}_{loc}$, таким, что

$$\sup_{t \leq T} E M_t^2 < \infty, \quad E \int_0^T |dA_t| < \infty$$

для любого $T \geq 0$. Обозначим I класс процессов Ито, и пусть $I^2 = I \cap S^2$.

Пусть $(W_t, t \geq 0)$ — стандартный винеровский процесс. Обозначим $\mathcal{C}$ класс всех диффузионных процессов

$$d\xi_t = b(t, \xi_t) dt + \sigma(t, \xi_t) dW_t, \quad \xi_0 = 0, \quad (1)$$

коэффициенты которых удовлетворяют условию

(C) функции $b: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ и $\sigma: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ измеримы и ограничены, а σ гёльдерова и равномерно невырождена.

Из результатов Н. В. Крылова [1] следует, что если $f = (f(t, x), t \geq 0, x \in \mathbf{R})$ принадлежит пространству Соболева $W_p^{1,2}$, $p \geq 2$, то преобразованный процесс $(f(t, \xi_t), t \geq 0)$ будет процессом Ито для любого $\xi \in \mathcal{C}$ (а также для более общих процессов Ито) и справедлива формула Ито

$$f(t, \xi_t) = f(0, 0) + \int_0^t f_t(s, \xi_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(s, \xi_s) \sigma^2(s, \xi_s) ds + \int_0^t f_x(s, \xi_s) d\xi_s \quad (2)$$

с обобщенными производными f_x, f_t, f_{xx} .

Цель данной работы — исследовать также обратную задачу и получить необходимые и достаточные условия (в терминах обобщенных производных) на функцию $f = (f(t, x), t \geq 0, x \in \mathbf{R})$, для которой преобразованный процесс $f = f(t, \xi_t)$ будет процессом Ито (семимартингалом) для любого диффузионного процесса ξ из класса $\mathcal{C}$.

В работе [2] для фиксированного марковского процесса X дано описание всех семимартингальных функций (т.е. функций, для которых процесс $f(X_t)$ является семимартингалом) процесса X как разности двух эксцессивных функций. В частности, было показано, что любая семимартингальная функция одномерного винеровского процесса представима в виде разности двух выпуклых функций на каждом компактном интервале. Поэтому из результатов Мейера [3] следует, что любая семимартингальная функция винеровского процесса будет также семимартингальной функцией для всего класса семимартингалов. Отметим, что аналогичное утверждение не верно в случае функций, зависящих от временного параметра (например, из того, что $f(t, \xi_t)$ есть семимартингал для одного диффузионного процесса, вообще говоря, не следует, что $f(t, \xi_t)$ будет семимартингалом для другого диффузионного процесса ξ). Описание всех семимартингальных функций (зависящих от временного параметра) данного класса диффузионных процессов удобно для установления аналитических свойств функции цены в задаче оптимального управления в марковских диффузионных процессах, поскольку, как известно, в довольно общих условиях цена является семимартингалом по всем процессам, соответствующим допустимым управлениям. Описание зависящих от временного параметра семимартингальных функций винеровского процесса дано в [4]. В работе [5] было показано, что если ξ — данный диффузионный процесс из класса $\mathcal{C}$, то $f(t, \xi_t)$ является процессом Ито тогда и только тогда, когда функция f принадлежит классу V^L , где V^L — класс функций, имеющих обобщенную первую производную по x и обобщенный L -оператор. В данном случае обобщенная производная по t и вторая обобщенная производная по x могут отдельно не существовать и класс V^L , хотя не зависит от сноса, но зависит от коэффициента диффузии процесса ξ . Поэтому этот результат применим только к задаче управления сносом диффузионного процесса (см. [5]). Теоремы 1 и 2, приводимые в работе, имеют применения в задаче оптимального управления, когда управляется как снос, так и коэффициент диффузии управляемого процесса.

Определим меру μ^σ на пространстве $(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}))$, полагая

$$\mu^\sigma(ds, dx) = \rho^\sigma(s, x) ds dx, \quad \text{где} \quad \rho^\sigma(s, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s \sigma}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2s\sigma^2} \right\}.$$

Для функций $f \in C^{1,2}$ определены операторы L_σ и L_σ^* :

$$(L_\sigma f)(s, x) = f_t(s, x) + \frac{\sigma^2}{2} f_{xx}(s, x), \quad (L_\sigma^* f)(s, x) = -f_t(s, x) + \frac{\sigma^2}{2} f_{xx}(s, x),$$

где f_t и f_{xx} — частные производные функции f .

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что функция $f = (f(t, x), t \geq 0, x \in \mathbf{R})$ принадлежит классу $\widehat{W}^{1,2}(\sigma)$, если существуют последовательность функций $(f^n, n \geq 1)$ из $C^{1,2}$, квадратично μ^σ -интегрируемая функция f_x и σ -конечные знакопеременные меры ν_t, ν_{xx} с

$$\iint_{[0, T] \times \mathbf{R}} \rho^\sigma(t, x) |\nu_t|(dt, dx) < \infty, \quad \iint_{[0, T] \times \mathbf{R}} \rho^\sigma(t, x) |\nu_{xx}|(dt, dx) < \infty$$

при каждом $T \geq 0$ такие, что

$$1) \sup_{(t, x) \in D} |f^n(t, x) - f(t, x)| \rightarrow 0 \text{ на любом компакте } D \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R},$$

$$2) \iint_{[0, T] \times \mathbf{R}} (f_x^n(t, x) - f_x(t, x))^2 \mu^\sigma(dt, dx) \rightarrow 0,$$

$$3) \iint_{[0, T] \times \mathbf{R}} \psi(t, x) f_t^n(t, x) \mu^\sigma(dt, dx) \rightarrow \iint_{[0, T] \times \mathbf{R}} \psi(t, x) \rho^\sigma(t, x) \nu_t(dt, dx),$$

$$4) \iint_{[0, T] \times \mathbf{R}} \psi(t, x) f_{xx}^n(t, x) \mu^\sigma(dt, dx) \rightarrow \iint_{[0, T] \times \mathbf{R}} \psi(t, x) \rho^\sigma(t, x) \nu_{xx}(dt, dx),$$

$T \geq 0, n \rightarrow \infty$, для любой непрерывной, ограниченной функции ψ .

Если соотношения 3) и 4) заменить соответственно соотношениями

$$3') \iint_{[0, T] \times \mathbf{R}} |f_t^n(t, x) - f_t(t, x)| \mu^\sigma(dt, dx) \rightarrow 0, \quad T \geq 0, n \rightarrow \infty,$$

$$4') \iint_{[0, T] \times \mathbf{R}} |f_{xx}^n(t, x) - f_{xx}(t, x)| \mu^\sigma(dt, dx) \rightarrow 0, \quad T \geq 0, n \rightarrow \infty,$$

то будем говорить, что функция f принадлежит классу $W^{1,2}(\sigma)$.

Из неравенства Гёльдера следует, что для любого $p \geq 2$

$$W_p^{1,2} \subset \bigcap_{\sigma^2 > 0} W^{1,2}(\sigma).$$

Теорема 1. Пусть $f = (f(t, x), t \geq 0, x \in \mathbf{R})$ — непрерывная функция.

а) Пусть σ_1 и σ_2 — отличные от нуля действительные числа такие, что $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$. Тогда если процессы $f(t, \sigma_1 W_t)$ и $f(t, \sigma_2 W_t)$ принадлежат классу S^2 , то $f \in \widehat{W}^{1,2}(\sigma_2)$. Если $f \in \widehat{W}^{1,2}(\sigma_1)$, то $f(t, \sigma_1 W_t)$ и $f(t, \sigma_2 W_t)$ принадлежат классу S^2 .

б) $f(t, \xi_t) \in S^2$ для всех $\xi \in \mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда $f \in \widehat{W}^{1,2}(\sigma)$ при всех $\sigma \neq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о п. а). **Необходимость.** Если $f(t, \sigma W_t) \in S^2$ для некоторого $\sigma \neq 0$, то из результатов [4], [6] следует, что для любого $T > 0$ функция f абсолютно непрерывна по x для почти всех $t \in (0, T]$ (по мере Лебега), f допускает слабый обобщенный L -оператор (являющийся знакопеременной мерой, конечной на $[0, T] \times \mathbf{R}$ для каждого $T \geq 0$, и обозначаемый далее через ν_L^σ) и

$$f(t, \sigma W_t) = f(0, 0) + \int_0^t f_x(s, \sigma W_s) \sigma dW_s + A_t^\sigma, \quad (3)$$

где процесс A_t^σ однозначно определяется соотношением

$$\mathbf{E} \int_0^T \psi(s, \sigma W_s) dA_s^\sigma = \iint_{[0, T] \times \mathbf{R}} \psi(s, x) \nu_L^\sigma(ds, dx), \quad T \geq 0, \quad (4)$$

справедливым для любой непрерывной ограниченной функции ψ .

Обозначим C_0 класс функций $\psi = (\psi(s, x), s \geq 0, x \in \mathbf{R}) \in C^{1,2}$ таких, что $\psi(t, x) = 0$ при всех $(t, x) \notin (0, T) \times K$ для некоторого компакта $K \in \mathbf{R}$ и некоторого $T > 0$.

Применяя (3) и формулу Ито, имеем

$$\begin{aligned} & f(T, \sigma W_T) \psi(T, \sigma W_T) - f(0, 0) \psi(0, 0) \\ &= \int_0^T \psi(s, \sigma W_s) dA_s^\sigma + \int_0^T f_x(s, \sigma W_s) \psi_x(s, \sigma W_s) \sigma^2 ds \\ &+ \int_0^T f(s, \sigma W_s) \left(\psi_t(s, \sigma W_s) + \frac{\sigma^2}{2} \psi_{xx}(s, \sigma W_s) \right) ds \\ &+ \int_0^T f(s, \sigma W_s) \psi_x(s, \sigma W_s) \sigma dW_s + \int_0^T f_x(s, \sigma W_s) \psi(s, \sigma W_s) \sigma dW_s. \end{aligned} \quad (5)$$

Так как $\psi \in C_0$ и $f(t, \sigma W_t) \in S^2$, беря математические ожидания в (5), получаем

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \int_0^T f(s, \sigma W_s) \left(\psi_t(s, \sigma W_s) + \frac{\sigma^2}{2} \psi_{xx}(s, \sigma W_s) \right) ds \\ &+ \mathbf{E} \int_0^T f_x(s, \sigma W_s) \psi_x(s, \sigma W_s) \sigma^2 ds + \mathbf{E} \int_0^T \psi(s, \sigma W_s) dA_s^\sigma = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Согласно формуле интегрирования по частям,

$$\mathbf{E} \int_0^T f_x(s, \sigma W_s) \psi_x(s, \sigma W_s) \sigma^2 ds = - \int \int_{[0, T] \times \mathbf{R}} f(s, x) (\psi_x(s, x) \rho^\sigma(s, x))_x \sigma^2 dx ds.$$

Поэтому, пользуясь равенством $\rho_t^\sigma(s, x) = (\sigma^2/2) \rho_{xx}^\sigma(s, x)$, из (6) получаем

$$\int \int_{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}} f(s, x) L_\sigma^*(\psi \rho^\sigma)(s, x) dx ds = \mathbf{E} \int_0^\infty \psi(s, \sigma W_s) dA_s^\sigma \quad (7)$$

для любой функции $\psi \in C_0$.

Определим меру $\tilde{\nu}_L^\sigma$ на $\mathcal{B}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R})$ следующим образом:

$$\tilde{\nu}_L^\sigma(dt, dx) = (\rho^\sigma(t, x))^{-1} \nu_L^\sigma(dt, dx).$$

Очевидно, мера $\tilde{\nu}_L^\sigma$ σ -конечна на $\mathcal{B}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R})$, и из соотношений (4) и (7) следует, что для любой функции $\psi \in C_0$

$$\int \int_{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}} f(s, x) L_\sigma^*(\psi \rho^\sigma)(s, x) dx ds = \int \int_{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}} \psi(s, x) \rho^\sigma(s, x) \tilde{\nu}_L^\sigma(ds, dx). \quad (8)$$

Для любых отличных от нуля σ_1 и σ_2 с $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ функция

$$\frac{\rho^{\sigma_2}(t, x)}{\rho^{\sigma_1}(t, x)} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \exp \left\{ -\frac{x^2 \sigma_1^2 - \sigma_2^2}{2t \sigma_1^2 \sigma_2^2} \right\} \leq \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad (9)$$

бесконечно дифференцируема и ограничена, следовательно, если $\psi \in C_0$, то $\varphi = (\rho^{\sigma_2}/\rho^{\sigma_1}) \psi \in C_0$.

Поэтому, подставляя в соотношение (8) при $\sigma = \sigma_1$ вместо $\psi \in C_0$ выражение $(\rho^{\sigma_2}/\rho^{\sigma_1}) \psi$, получаем

$$\int \int_{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}} f(t, x) L_{\sigma_1}^*(\psi \rho^{\sigma_2})(t, x) dx dt = \int \int_{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}} \psi(t, x) \rho^{\sigma_2}(t, x) \tilde{\nu}_L^{\sigma_1}(dt, dx) \quad (10)$$

для всех $\psi \in C_0$.

Беря разность между равенством (10) и равенством (8) для $\sigma = \sigma_2$, имеем

$$\begin{aligned} & \int \int_{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}} f(t, x) \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{2} (\psi \rho^{\sigma_2})_{xx}(t, x) dx dt \\ &= \int \int_{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}} \psi(t, x) \rho^{\sigma_2}(t, x) (\tilde{\nu}_L^{\sigma_1} - \tilde{\nu}_L^{\sigma_2})(dt, dx). \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, в силу (4) и (11) существует σ -конечная мера $\nu_{xx} = (2/(\sigma_1^2 - \sigma_2^2))(\tilde{\nu}_L^{\sigma_1} - \tilde{\nu}_L^{\sigma_2})$ с $\iint_{[0,T] \times \mathbf{R}} \rho^{\sigma_2}(s, x) |\nu_{xx}|(ds, dx) < \infty$ (для всех $T \geq 0$) такая, что

$$\iint_{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}} f(t, x) (\psi \rho^{\sigma_2})_{xx}(t, x) dx dt = \iint_{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}} \psi(s, x) \rho^{\sigma_2}(s, x) \nu_{xx}(ds, dx) \quad (12)$$

для любого $\psi \in C_0$. Но это эквивалентно существованию слабой обобщенной производной по x второго порядка относительно меры μ^{σ_2} (эквивалентность (12) и соотношений 1), 4) определения 1 доказывается стандартным образом). Ввиду существования слабого обобщенного L_{σ_2} -оператора, функция f будет дифференцируемой по t в слабо обобщенном смысле (по мере μ^{σ_2}), следовательно, $f \in \widehat{W}^{1,2}(\sigma_2)$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Из [6] (теорема 2) следует, что если $f \in \widehat{W}^{1,2}(\sigma_1)$, то процесс $f(t, \sigma_1 W_t)$ принадлежит классу S^2 . Аналогично, с учетом неравенства (9) доказывается, что если $f \in \widehat{W}^{1,2}(\sigma_1)$, то $f(t, \sigma_2 W_t) \in S^2$ для любого σ_2 с $\sigma_2^2 < \sigma_1^2$. Для полноты приведем доказательство. Пусть $(f^n, n \geq 1)$ — последовательность гладких функций, для которых выполняются соотношения 1)–4) определения 1 для $\sigma = \sigma_1$.

Очевидно, для каждого $n \geq 1$ процесс $(f^n(t, \sigma_2 W_t), t \geq 0)$ есть семимартингал с разложением

$$f^n(t, \sigma_2 W_t) = f^n(0, \sigma_2 W_0) + \int_0^t f_x^n(s, \sigma_2 W_s) \sigma_2 dW_s + A_t^n, \quad (13)$$

где $A_t^n = \int_0^t (L^{\sigma_2} f^n)(s, \sigma_2 W_s) ds$.

Рассмотрим процесс

$$A_t = f(t, \sigma_2 W_t) - f(0, \sigma_2 W_0) - \int_0^t f_x(s, \sigma_2 W_s) \sigma_2 dW_s. \quad (14)$$

Из соотношения 1) (определение 1) следует, что для любого $T \geq 0$

$$\sup_{s \leq T} |f^n(s, \sigma_2 W_s) - f(s, \sigma_2 W_s)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (15)$$

по вероятности. Так как соотношение 2) (определение 1) выполняется для $\sigma = \sigma_1$, из неравенства (9) будем иметь сходимость

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\int_0^T (f_x^n - f_x)(s, \sigma_2 W_s) dW_s \right)^2 \\ \leq \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \int_0^T \int_{\mathbf{R}} (f_x^n(t, x) - f_x(t, x))^2 \mu^{\sigma_1}(dt, dx) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Поэтому из (14), (15) и (16), имея в виду неравенство Дэвиса (см., например, [7]), получаем

$$\sup_{s \leq T} |A_s^n - A_s| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (17)$$

по вероятности для всех $T \geq 0$.

В силу неравенства (9) и определения процесса A^n

$$\begin{aligned} \sup_n \mathbf{E}(\text{Var } A^n)_{[0,T]} &= \sup_n \iint_{[0,T] \times \mathbf{R}} |(Lf^n)(s, x)| \mu^{\sigma_2}(ds, dx) \\ &\leq \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \sup_n \iint_{[0,T] \times \mathbf{R}} |(Lf^n)(s, x)| \mu^{\sigma_1}(ds, dx) < \infty, \end{aligned} \quad (18)$$

где последнее неравенство следует из соотношений 3), 4) определения 1. Следовательно, в силу предложений 2–9 из [9], $A = (A_t, t \geq 0)$ есть процесс интегрируемой вариации на каждом интервале $[0, T]$ и процесс $(f(t, \sigma W_t), t \geq 0)$ будет семимартингалом класса S^2 .

Таким образом, $f \in \widehat{W}^{1,2}(\sigma_1) \implies \{f(t, \sigma_1 W_t), f(t, \sigma_2 W_t) \in S^2\} \implies f \in \widehat{W}^{1,2}(\sigma_2)$ для $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$. В частности, отсюда следует, что $\widehat{W}^{1,2}(\sigma_1) \subset \widehat{W}^{1,2}(\sigma_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о п. б). Н е о б х о д и м о с т ь следует из первого утверждения части а) теоремы, так как для произвольного $\sigma \neq 0$ и некоторого σ_1 с $\sigma_1^2 > \sigma^2$ из $f(t, \sigma W_t), f(t, \sigma_1 W_t) \in S^2$ следует, что $f \in \widehat{W}^{1,2}(\sigma)$.

Достаточность. Пусть $f \in \widehat{W}^{1,2}(\sigma)$ для любого $\sigma \neq 0$. Доказательство того, что $f(t, \xi_i) \in S^2$ для любого $\xi \in \mathcal{C}$ с нулевым сносом, проходит аналогично доказательству части а) теоремы, если в соотношениях (16) и (18) вместо неравенства (9) использовать оценку (см., например, [8])

$$|\rho^\xi(s, x, t, y)| \leq k(t-s)^{-1/2} \exp \left[-\frac{\beta|y-x|^2}{t-s} \right], \quad 0 \leq s < t \leq T, \quad x, y \in \mathbf{R}, \quad (19)$$

которая справедлива для некоторых констант k и β . Общий случай следует из теоремы Гирсанова [7], так как $b\sigma^{-1}$ ограничено. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть $f = (f(t, x), t \geq 0, x \in \mathbf{R})$ — непрерывная функция.

а) Пусть σ_1 и σ_2 — отличные от нуля действительные числа такие, что $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$. Тогда если процессы $f(t, \sigma_1 W_t)$ и $f(t, \sigma_2 W_t)$ принадлежат классу I^2 процессов Ито, то $f \in W^{1,2}(\sigma_2)$. Если $f \in W^{1,2}(\sigma_1)$, то $f(t, \sigma_1 W_t)$ и $f(t, \sigma_2 W_t)$ принадлежат классу I^2 .

б) $f(t, \xi_i) \in I^2$ для всех $\xi \in \mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда $f \in W^{1,2}(\sigma)$ для всех $\sigma \neq 0$. В этих условиях справедливо разложение (2).

Доказательство следует из теоремы 1 и теоремы 2 из [4], согласно которой если $f(t, \sigma W_t) \in I^2$, то $\nu_\sigma^\sigma(ds, dx) = (L_\sigma f)(s, x) \rho^\sigma(s, x) ds dx$ для некоторой μ^σ -интегрируемой функции $L_\sigma f$. Поэтому в данном случае равенство (11) принимает вид

$$\iint_{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}} f(t, x) (\psi \rho^{\sigma^2})_{xx}(t, x) dx dt = \iint_{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}} f_{xx}(s, x) \psi(s, x) \rho^{\sigma^2}(s, x) ds dx \quad (20)$$

для некоторой μ^{σ^2} -интегрируемой функции f_{xx} , что эквивалентно существованию второй обобщенной производной по x (по мере μ^{σ^2}). Формула Ито (2) доказывается так же, как в [1], учитывая оценку (19).

Следствие 1. Пусть $f = (f(t, x), t \geq 0, x \in \mathbf{R})$ — непрерывная функция. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(i) $f(t, \sigma_1 W_t) \in \mathcal{M}^2$ и $f(t, \sigma_2 W_t) \in \mathcal{M}^2$ для некоторых $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq 0$,

(ii) $f(t, M_t) \in \mathcal{M}^2$ для всех $M \in \mathcal{M}^2$,

(iii) $f(t, x) = kx + b$ для некоторых констант k и b ,

где $\mathcal{M}^2$ — класс мартингалов с $\sup_{t \leq T} \mathbf{E} M_t^2 < \infty$ для всех $T \geq 0$.

Доказательство. Очевидно, (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i). Докажем (i) $\Rightarrow$ (iii). Пусть $f(t, \sigma_i W_t) \in \mathcal{M}^2$ для $\sigma_i \neq 0, i = 1, 2$. Тогда $f(t, \sigma_i W_t) \in I^2$ и $f \in W^{1,2}(\sigma_i)$ для $i = 1, 2$ согласно теореме 2. Применяя формулу Ито, получаем, что

$$f_t(t, x) + \frac{\sigma_i^2}{2} f_{xx}(t, x) = 0 \quad \mu^{\sigma_i}\text{-п.в.} \quad (21)$$

Так как $\mu^{\sigma_1} \ll \mu^{\sigma_2}$ для $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$, беря разность в равенствах (21) для $\sigma = \sigma_1$ и $\sigma = \sigma_2$, имеем $((\sigma_1^2 - \sigma_2^2)/2) f_{xx}(t, x) = 0$ μ^{σ_2} -п.в., следовательно, $f_t = 0$, $f_{xx} = 0$ μ^{σ_2} -п.в. Поэтому, учитывая непрерывность f и принадлежность f_t, f_{xx} классу $L^1([0, T] \times \mathbf{R}, \mu^{\sigma_2})$, получаем, что $f(t, x) = f(0, 0) + kx$. Следствие доказано.

В недавней работе [10] Ф. Найт рассмотрел следующую задачу, исходящую от Т. Селсбери: показать, что если $f: \mathbf{R} \times [0, \infty[\rightarrow \mathbf{R}$ — непрерывная функция и если преобразованный процесс $f(t, W_t)$ почти наверное есть процесс конечной вариации, то f будет функцией только временного аргумента. В [10] доказано, что если $f(t, W_t)$ — процесс интегрируемой вариации, то f действительно функция только от t . Мы покажем, что этот результат является простым следствием теоремы 1 из [4].

Предложение 1. Пусть $f(t, x)$ — непрерывная функция двух переменных, и пусть

$$\mathbf{E} \operatorname{var} (f(\cdot, W_\bullet))_{[0, t]} < \infty, \quad \forall t \in \mathbf{R}_+. \quad (22)$$

Тогда $f(t, x) = f(t, 0)$.

Доказательство. Если для $f(t, W_t)$ выполняется (22), то $f(t, W_t)$ — семимартингал из класса S^2 , и из [4] (следствие 1 теоремы 1) следует, что f абсолютно непрерывна по x для почти всех t (по мере Лебега) и справедлива формула (3) для $\sigma = 1$. Поэтому $\int_0^t f_x(s, W_s) dW_s = 0$ и $f_x = 0$ $ds dx$ -п.в., следовательно, $f(t, x) = f(t, 0)$.

В заключение авторы выражают благодарность Х. Ю. Энгельберту за указание задачи Т. Селсбери и за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крылов Н. В. Управляемые процессы диффузионного типа. М.: Наука, 1977, 399 с.
2. Cinlar E., Jacod J., Protter P., Sharpe M. J. Semimartingales and Markov processes. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1980, v. 54, p. 161–218.
3. Meyer P. A. Un cours sur les intégrales stochastiques. — Lecture Notes in Math., 1976, v. 511, p. 245–400.
4. Chitashvili R., Mania M. On functions transforming a Wiener process into a semimartingale. — Probab. Theory Relat. Fields, 1997, v. 109, № 1, p. 57–76.
5. Chitashvili R., Mania M. Generalized Itô's formula and derivation of Bellman's equation. — Stochastics Monographs (London: Gordon & Breach), 1995, v. 10, p. 1–21.
6. Mania M. Semimartingale characterization of generalized derivatives. — Stochastics Stochastics Rep., 1997, v. 61, p. 35–66.
7. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Теория мартингалов. М.: Наука, 1986, 512 с.
8. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967, 736 с.
9. Jakubowski A., Memin J., Pages G. Convergence en loi des suites d'intégrales stochastiques sur l'espace D^1 de Skorokhod. — Probab. Theory Relat. Fields, 1989, v. 81, № 1, p. 111–137.
10. Knight F. B. On a Brownian motion problem of T. Salisbury. — Canad. Math. Bull., 1997, v. 40, p. 67–71.

Поступила в редакцию
6.IV.1998

© 2000 г.

МОЛЧАН Г. М.*

О МАКСИМУМЕ УСТОЙЧИВЫХ ПРОЦЕССОВ ЛЕВИ¹⁾

Пусть G и S — положение и величина максимума устойчивого процесса Леви X на отрезке $[0, a]$. Показано, что безразмерное отношение S/G^h , где h — параметр автомодельности X , не зависит от G . Это позволяет анализировать величину G для траекторий X с высоким и низким максимумом.

Ключевые слова и фразы: экстремальные значения, процессы Леви, автомодельные процессы.

* Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН, Варшавское шоссе, д. 79, корп. 2, 113556 Москва, Россия; Observatoire de la Côte d'Azur, Nice, France; e-mail: molchan@mitp.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Министерства высшего образования Франции и частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 99-01-00314).