Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Молчан, О максимуме устойчивых процессов Леви,
Теория вероятн. и ее примен., 2000, том 45, выпуск 2, 380–
386

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp471>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 15:33:02

В заключение авторы выражают благодарность Х. Ю. Энгельберту за указание задачи Т. Селсбери и за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крылов Н. В. Управляемые процессы диффузионного типа. М.: Наука, 1977, 399 с.
2. Cinlar E., Jacod J., Protter P., Sharpe M. J. Semimartingales and Markov processes. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1980, v. 54, p. 161–218.
3. Meyer P. A. Un cours sur les intégrales stochastiques. — Lecture Notes in Math., 1976, v. 511, p. 245–400.
4. Chitashvili R., Mania M. On functions transforming a Wiener process into a semimartingale. — Probab. Theory Relat. Fields, 1997, v. 109, № 1, p. 57–76.
5. Chitashvili R., Mania M. Generalized Itô's formula and derivation of Bellman's equation. — Stochastics Monographs (London: Gordon & Breach), 1995, v. 10, p. 1–21.
6. Mania M. Semimartingale characterization of generalized derivatives. — Stochastics Stochastics Rep., 1997, v. 61, p. 35–66.
7. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Теория мартингалов. М.: Наука, 1986, 512 с.
8. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967, 736 с.
9. Jakubowski A., Memin J., Pages G. Convergence en loi des suites d'intégrales stochastiques sur l'espace D^1 de Skorokhod. — Probab. Theory Relat. Fields, 1989, v. 81, № 1, p. 111–137.
10. Knight F. B. On a Brownian motion problem of T. Salisbury. — Canad. Math. Bull., 1997, v. 40, p. 67–71.

Поступила в редакцию
6.IV.1998

© 2000 г.

МОЛЧАН Г. М.*

О МАКСИМУМЕ УСТОЙЧИВЫХ ПРОЦЕССОВ ЛЕВИ¹⁾

Пусть G и S — положение и величина максимума устойчивого процесса Леви X на отрезке $[0, a]$. Показано, что безразмерное отношение S/G^h , где h — параметр автомодельности X , не зависит от G . Это позволяет анализировать величину G для траекторий X с высоким и низким максимумом.

Ключевые слова и фразы: экстремальные значения, процессы Леви, автомодельные процессы.

* Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН, Варшавское шоссе, д. 79, корп. 2, 113556 Москва, Россия; Observatoire de la Côte d'Azur, Nice, France; e-mail: molchan@mitp.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Министерства высшего образования Франции и частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 99-01-00314).

1. Введение. Ниже рассматриваются устойчивые процессы Леви $x(t)$, $t \geq 0$, т.е. процессы с однородными независимыми приращениями и характеристической экспонентой $x(1)$ вида:

$$\psi(\lambda | \alpha, \beta, c) = c|\lambda|^\alpha \left(1 - i\beta \cdot \text{sign } \lambda \cdot \text{tg } \pi \frac{\alpha}{2} \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}^1,$$

где $c > 0$, $|\beta| \leq 1$, $\alpha \in (0, 1) \cup (1, 2]$ или $(\alpha, \beta) = (1, 0)$. Процесс $x(t)$ автомоделен с параметром $h = 1/\alpha$, т.е.

$$x(\lambda t) \stackrel{d}{=} |\lambda|^h x(t), \quad (1)$$

где $\stackrel{d}{=}$ означает равенство конечномерных распределений. Поэтому коэффициент асимметрии процесса $P\{x(t) > 0\} = \rho$ не зависит от t . Согласно [1], $\rho \in [0, 1]$ при $\alpha \leq 1$ и $\rho \in [1 - 1/\alpha, 1/\alpha]$ при $\alpha \geq 1$, т.е. $\rho\alpha \leq 1$.

Рассмотрим статистики

$$S_a = \sup \{0 \vee x(t) : 0 \leq t \leq a\}, \quad G_a = \sup \{0 \leq t \leq a : x(t) = S_a\}.$$

Они определяют максимум и положение максимума процесса $x(t)$ в интервале $[0, a]$. Известно [2], что G_1 при $0 < \rho < 1$ подчиняется обобщенному закону арксинуса с плотностью

$$p_G(x) = c_\rho^{-1} x^{\rho-1} (1-x)^{-\rho}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

где $c_\rho = \Gamma(\rho) \Gamma(1-\rho)$.

Распределение S_1 за исключением специальных случаев не выражается в элементарных функциях. Однако для него хорошо изучены асимптотики вблизи 0 и ∞ [3], [2]. Ниже мы показываем, что совместное распределение (G_a, S_a) эффективно определяется одномерными распределениями G_a и S_a благодаря независимости величин $S_a/G_a^{1/\alpha}$ и G_a . Это свойство устойчивых процессов Леви осталось незамеченным в литературе. Ниже оно используется для анализа положения максимума для траекторий $x(t)$ с низким ($S_a < \varepsilon$) и высоким ($S_a > 1/\varepsilon$) значениями S_a при $\varepsilon \downarrow 0$. В первом случае положение максимума локализуется вблизи 0, а во втором либо локализуется вблизи точки $t = a$ ($\alpha\rho = 1$, $\rho \neq 1$), либо «размазано» на всем интервале $(0, a)$ (случай $0 < \alpha\rho < 1$). Локальность низкого максимума была отмечена недавно автором [4], [5] для гауссовских автомодельных процессов с однородными приращениями. Это свойство в определенной степени является неожиданным для тех процессов Леви, которые имеют положительные скачки.

2. Результаты.

Утверждение 1. Для устойчивых процессов Леви с $\rho > 0$ случайные величины $S_a/G_a^{1/\alpha}$ и G_a независимы. При этом

$$P\{S_1 > s, G_1 \in dg\} = \int_s^\infty \left[1 - \left(\frac{s}{v} \right)^\alpha \right]^{\rho-1} dF_S\left(\frac{v}{g^{1/\alpha}}\right) p_G(g) dg, \quad (3)$$

где $F_S(\cdot)$ — распределение S_1 .

Доказательство. Пусть $\tau = \tau(q)$ — экспоненциально распределенная случайная величина с параметром q , не зависящая от $x(\cdot)$. Совместное распределение (G_τ, S_τ) определяется преобразованием Лапласа

$$E e^{-aG_\tau - bS_\tau} = \exp \left\{ E(e^{-a\tau - bx(\tau)} - 1) (q\tau)^{-1} 1_{(x(\tau) > 0)} \right\} \quad (4)$$

(см. [2, теорема 5, гл. VI]). Из автомодельности (1) процесса $x(\cdot)$ следует, что при фиксированном t

$$(G_t, S_t) \stackrel{d}{=} (tG_1, t^{1/\alpha} S_1). \quad (5)$$

Отсюда с учетом (4) получаем уравнение на совместное распределение $p(g, s) dg ds$ вектора (G_1, S_1) :

$$\mathcal{L}p := \int_0^1 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ag\tau - b\tau^{1/\alpha}s - q\tau} qp(g, s) dg ds d\tau = \exp I, \quad (6)$$

где

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty [e^{-q^* \tau - b \tau^{1/\alpha} x} - e^{-q \tau}] \tau^{-1} p_1(x) dx d\tau$$

и $p_1(x)$ — плотность распределения $x(1)$, а $q^* = q + a$.

Преобразуем правую часть (6):

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty [e^{-q^* \tau - b \tau^{1/\alpha} x} - e^{-q^* \tau}] \tau^{-1} p_1(x) dx d\tau + \int_0^\infty [e^{-q^* \tau} - e^{-q \tau}] \tau^{-1} d\tau \cdot \int_0^\infty p_1(x) dx = \ln E \exp(-b S_\tau(q^*)) + \rho \ln \frac{q}{q^*}. \quad (7)$$

Здесь второе слагаемое включает известный интеграл Фруллани и параметр $\rho = P\{x(1) > 0\}$.

Если $R = S_1/G_1^{1/\alpha}$ и G_1 независимы, то плотность распределения (G_1, S_1) должна иметь вид

$$p(g, s) = \varphi\left(\frac{s}{g^{1/\alpha}}\right) g^{-1/\alpha} p_G(g), \quad (8)$$

где $\varphi(x) dx$ — распределение R , а $p_G(g)$ определено в (2). Очевидно, верно и обратное. Заметим, что в исключенных случаях $\rho = 0$ и $\rho = 1$ распределение G_1 сосредоточено в 0 и 1 соответственно. Таким образом, само утверждение в этих случаях тривиально: $S_1 = G_1 = 0$ при $\rho = 0$ и $S_1 = x(1)$, $G_1 = 1$ при $\rho = 1$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $0 < \rho < 1$.

Из (8) следует, что плотность распределения S_1 должна иметь вид

$$p_S(x) = \int_0^1 p(g, x) dg = \int_0^1 \varphi\left(\frac{x}{g^{1/\alpha}}\right) g^{-1/\alpha} p_G(g) dg.$$

Учитывая (2), после элементарных преобразований получаем связь $p_S(x)$ и $\varphi(x)$:

$$p_S(x) = \alpha c_\rho^{-1} \int_x^\infty (u^\alpha - x^\alpha)^{-\rho} \varphi(u) du \cdot x^{\rho\alpha-1}. \quad (9)$$

Интегральная операция в (9) с точностью до замены переменных $u^\alpha \rightarrow v$, $x^\alpha \rightarrow y$ есть дробное интегрирование порядка $\eta = 1 - \rho$. Поэтому (9) допускает обращение

$$v^{1/\alpha-1} \varphi(v^{1/\alpha}) = -\frac{d}{dv} \int_v^\infty y^{1/\alpha-\rho} p_S(y^{1/\alpha}) (y-v)^{\rho-1} dy \quad (10)$$

или

$$P\{R > v\} = \int_v^\infty \left(1 - \left(\frac{v}{y}\right)^\alpha\right)^{\rho-1} dF_S(y). \quad (10a)$$

Теперь займемся левой частью (6). Подставим ожидаемое решение (8) в левую часть (6) и заменим s на $xg^{1/\alpha}$. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{L}p &= \int_0^1 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ag\tau - b(g\tau)^{1/\alpha} x - q\tau} \varphi(x) p_G(g) dx dg d\tau \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-au - bu^{1/\alpha} x - q\tau} \varphi(x) dx d\tau \cdot c_\rho^{-1} u^{\rho-1} (\tau - u)_+^{-\rho} du. \end{aligned}$$

Здесь сделана замена $g \rightarrow u/\tau$. Теперь можно проинтегрировать по τ , и тогда, учитывая (7), уравнение (6) приобретает вид

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-q^* u - bu^{1/\alpha} x) \varphi(x) (q^* u)^{\rho-1} / \Gamma(\rho) du dx \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-q^* \tau - b\tau^{1/\alpha} s) p_S(s) ds d\tau. \end{aligned}$$

В полученном соотношении сделаем замены $q^* u \rightarrow u$, $q^* v \rightarrow v$ и тогда придем к уравнению

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-\theta u^{1/\alpha} x) \varphi(x) e^{-u} u^{\rho-1} / \Gamma(\rho) du dx \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-\theta u^{1/\alpha} s) p_S(s) ds e^{-v} dv, \quad \text{где } \theta = \frac{b}{q^{*1/\alpha}} \geq 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Предположение о независимости R и G_1 непротиворечиво, если (10) обращает (11) в тождество.

Докажем это. Соотношение (11) означает, что

$$\int_{u^{1/\alpha} x = z} \varphi(x) dx \cdot e^{-u} u^{\rho-1} \frac{1}{\Gamma(\rho)} du = \int_{v^{1/\alpha} s = z} p_S(s) ds e^{-v} dv.$$

Для φ из (10) это равенство легко проверяется непосредственно или с помощью преобразования Меллина. Однако в обоих случаях требуется анализ $p_S(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$ на ∞ и в 0. Поэтому перейдем к функциям

$$\bar{\varphi}(x) = \int_x^\infty \varphi(u) du, \quad \bar{F}_S(x) = \int_x^\infty p_S(y) dy,$$

для которых эти трудности снимаются. Известно (см. [2], [3]), что

$$\bar{F}_S(x) \sim kx^{-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (12)$$

если спектральная мера Леви для $x(t)$ не равна 0 на $(0, \infty)$, $0 < \alpha\rho < 1$. В противном случае ($\alpha\rho = 1$, $\rho \neq 1$) $\bar{F}_S(x)$ убывает быстрее любой отрицательной степени x . Следовательно, $x^{\sigma-1} \bar{F}_S(x) \in L^1(0, \infty)$, $\text{Re } \sigma \in (0, \alpha)$. То же самое верно и для $\bar{\varphi}(x)$. Действительно,

$$\hat{\varphi}(\sigma) := \int_0^\infty \bar{\varphi}(v) v^{\sigma-1} dv = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \bar{\varphi}(u^{1/\alpha}) u^{\sigma/\alpha-1} du.$$

С учетом (10)

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\sigma) &= \alpha^{-1} \int_0^\infty \left[\int_0^y u^{\sigma/\alpha-1} (y-u)^{\rho-1} du \right] y^{1-\rho} dF_S(y^{1/\alpha}) \\ &= \alpha^{-1} \int_0^\infty y^{\sigma/\alpha} dF_S(y^{1/\alpha}) \frac{\Gamma(\sigma/\alpha)\Gamma(\rho)}{\Gamma(\sigma/\alpha + \rho)}. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, имеем

$$\hat{\varphi}(\sigma) = \mathcal{F}(\sigma) \frac{\Gamma(\sigma/\alpha + 1)\Gamma(\rho)}{\Gamma(\sigma/\alpha + \rho)}, \quad (13)$$

где $\mathcal{F}(\sigma) = \int_0^\infty y^{\sigma-1} \bar{F}_S(y) dy$ — преобразование Меллина для $\bar{F}_S$. Отсюда видно, что $\hat{\varphi}(\sigma)$ конечно вместе с $\mathcal{F}(\sigma)$.

Итак, надо проверить равенство двух мультипликативных свертков:

$$\int_0^\infty \phi\left(\frac{x}{u}\right) e^{-u^\alpha} u^{\rho\alpha-1} \frac{1}{\Gamma(\rho)} du = \int_0^\infty \bar{F}_S\left(\frac{x}{u}\right) e^{-u^\alpha} u^{\alpha-1} du. \quad (14)$$

Применим к обеим частям равенства преобразование Меллина. Законность его следует из того, что все компоненты этого равенства принадлежат $L_\mu^1(0, \infty)$ с весом $\mu = x^{\sigma-1}$, $\sigma \in (0, \alpha)$ (см. [6]). В частности,

$$\int_0^\infty u^{\sigma-1} e^{-u^\alpha} u^{\rho\alpha-1} \frac{1}{\Gamma(\rho)} du = \frac{\alpha^{-1} \Gamma(\rho + \sigma/\alpha)}{\Gamma(\rho)}.$$

Отсюда левая часть (14) преобразованием Меллина приводится к виду

$$\hat{\varphi}(\sigma) \frac{\alpha^{-1} \Gamma(\rho + \sigma/\alpha)}{\Gamma(\rho)} = \mathcal{F}(\sigma) \alpha^{-1} \Gamma\left(1 + \frac{\sigma}{\alpha}\right). \quad (15)$$

Здесь мы учли (13). Очевидно, что преобразование Меллина правой части (14) в точности совпадает с полученным выражением (15).

Остается заметить, что вероятностное решение $p(y, s)$ уравнения (6) единственно. Действительно, (6) однозначно определяет распределение $F_q(x, y)$ величин

$$(G_{\tau(q)}, S_{\tau(q)}) \stackrel{d}{=} (\tau(q) G_1, \tau(q)^{1/\alpha} S_1),$$

где $\tau(q)$ не зависит от (G_1, S_1) и имеет плотность $q e^{-q^\alpha}$. Искомое распределение $F(y, s)$ для (G_1, S_1) связано с параметрическим семейством $F_q(x, y)$ соотношением

$$q \int_0^\infty F\left(\frac{x}{\tau}, y \tau^{-1/\alpha}\right) e^{-q^\alpha \tau} d\tau = F_q(x, y),$$

т.е. $q \rightarrow q^{-1} F_q(x, y)$ является преобразованием Лапласа функции $\tau \rightarrow F(x/\tau, y/\tau^{1/\alpha}) \geq 0$, что однозначно определяет распределение $F(y, s)$.

Вторая часть утверждения — равенство (3) — очевидно следует из (8), (10а).

Следствие 1 (положение низкого максимума). Пусть $x(t)$ — устойчивый процесс Леви с параметром $\rho \neq 0; 1$. Тогда распределение G_T при условии $S_T < 1$ имеет нетривиальный предел при $T \rightarrow \infty$ с плотностью вероятностей

$$\bar{p}_G(t) = \frac{c(\alpha, \rho)}{\Gamma(\rho)} \left[t^{\rho-1} - \int_0^t (t-y)^{\rho-1} d\bar{F}_S(y^{-1/\alpha}) \right], \quad (16)$$

где $c(\alpha, \rho)$ определено ниже, см. (18).

В силу (5) распределение $\bar{p}_G(t) dt$ описывает также предел

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P\{G_\varepsilon \varepsilon^{-\alpha} \in dt \mid S_\varepsilon < \varepsilon\}.$$

Иначе говоря, положение низкого максимума $\{x(t), t \in (0, a)\}$ локализуется вблизи 0, если $S_a < \varepsilon \downarrow 0$ и $x(\cdot)$ не является субординатором.

Доказательство. Согласно (3),

$$\begin{aligned} P\{G_T \in dg, S_T < 1\} &= P\left\{G_1 \in \frac{dg}{T}, S_1 < T^{-1/\alpha}\right\} \\ &= p_G\left(\frac{g}{T}\right) T^{-1} dg \left(1 - g^{1-\rho} \int_0^g (g-y)^{\rho-1} d\bar{F}_S(y^{-1/\alpha})\right). \end{aligned}$$

Остается учесть, что, согласно (2), $p_G(g/T) T^{-1} \sim c_\rho^{-1} g^{\rho-1} T^{-\rho}$, $T \rightarrow \infty$, и (см. [3])

$$P\{S_1 < T^{-1/\alpha}\} \sim k_1^{-1} T^{-\rho}, \quad T \rightarrow \infty, \quad (17)$$

где $k_1 = |c / \cos((\rho - \frac{1}{2})\pi\alpha)|^\rho \Gamma(1-\rho) \Gamma(1+\alpha\rho)$. Это дает (16) с константой

$$c(\alpha, \rho) = c_\rho^{-1} k_1 \cdot \Gamma(\rho) = c^\rho \Gamma(1+\alpha\rho) \left| \cos\left(\rho - \frac{1}{2}\right) \pi\alpha \right|^{-\rho}. \quad (18)$$

Заметим, что $0 < c(\alpha, \rho) < \infty$ при $\rho \neq 0; 1$, поскольку (см. [1]) $\rho = \frac{1}{2} + (\alpha\pi)^{-1} \arctg(\beta \operatorname{tg}(\alpha\pi/2))$.

Следствие 2 (положение высокого максимума). а) Пусть $0 < \alpha\rho < 1$ и распределение S_1 имеет монотонно убывающую плотность на ∞ . Тогда условное распределение G_1 при условии $S_1 > M$ имеет собственный предел при $M \uparrow \infty$ с плотностью

$$k_\rho \tau^\rho (1-\tau)^{-\rho}, \quad 0 < \tau < 1, \quad (19)$$

где k_ρ — нормирующая константа.

б) Пусть $\alpha\rho = 1$, $\rho \neq 1$. Тогда в условиях $S_1 > M$, $M \rightarrow \infty$ имеет место сходимость по распределению

$$k_2(1-G_1) M^{1/\bar{\rho}} \xrightarrow{d} \gamma_{\bar{\rho}}, \quad \bar{\rho} = 1-\rho, \quad (20)$$

где $\gamma_{\bar{\rho}}$ — случайная величина с гамма-распределением, отвечающим параметру $\bar{\rho}$. При этом

$$k_2 = \rho \left| \rho c^{-1} \cos \frac{\pi\alpha}{2} \right|^{\rho/\bar{\rho}}. \quad (21)$$

Таким образом, условное распределение высокого максимума устойчивого процесса Леви $x(t)$ ($x(t)$ не есть субординатор) либо концентрируется в правом конце интервала $(0, a)$, либо «размазано» в $(0, a)$. Это связано с тем обстоятельством, что в первом случае распределение S_a убывает на ∞ как $\exp(-x^\eta)$, $\eta > 1$, а во втором — как отрицательная степень.

Доказательство. а) Чтобы вывести (19) из (3), достаточно показать, что

$$I := \lim_{M \uparrow \infty} \rho \int_M^\infty \left(1 - \frac{M^\alpha}{v^\alpha}\right)^{\rho-1} dF_S\left(\frac{v}{g^{1/\alpha}}\right) \frac{1}{g\bar{F}_S(M)} = 1.$$

Согласно (12), $\bar{F}_S(M) \sim kM^{-\alpha}$, $M \rightarrow \infty$. Поэтому после замен $M^\alpha/g \rightarrow m^{-1}$, $v^\alpha/g \rightarrow u^{-1}$ получим $I = \lim_{m \rightarrow 0} I(m) [m^\rho / \Gamma(\rho+1)]^{-1}$, где

$$I(m) = \frac{1}{k} \int_0^m \frac{(m-u)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)} d\bar{F}_S(u^{-1/\alpha}).$$

Поскольку распределение F_S имеет монотонную на ∞ плотность, то $F'_S(x) \sim k\alpha x^{-\alpha-1}$, $x \rightarrow \infty$. Отсюда

$$I(m) \sim \int_0^m \frac{(m-u)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)} du = \frac{m^\rho}{\Gamma(\rho+1)}, \quad m \rightarrow 0,$$

а $I = 1$.

б) Пусть $\alpha\rho = 1$, $\rho \neq 1$. Согласно [3], [7], $\bar{F}_S(x) = F(c_1 x^{-\alpha} | \rho, 1)$, где $F(\cdot | \alpha, \beta)$ — безгранично делимое распределение с характеристической экспонентой $\psi(\cdot | \alpha, \beta, c = 1)$ (см. выше), причем $c_1 = c/|\cos(\pi\alpha/2)|$. Поэтому (см. [1]) плотность распределения S_1 имеет асимптотику на ∞ :

$$F'_S(x) \sim a_\rho x^{1/(2\bar{\rho})-1} \exp(-b_\rho x^{1/\bar{\rho}}), \quad x \rightarrow \infty, \quad (22)$$

где $b_\rho = \bar{\rho}(\rho/c_1)^{\rho/\bar{\rho}}$. Соответственно, [7],

$$\bar{F}_S(x) \sim \tilde{a}_\rho x^{-1/(2\bar{\rho})} \exp(-b_\rho x^{1/\bar{\rho}}), \quad x \rightarrow \infty, \quad (23)$$

где $a_\rho/\tilde{a}_\rho = b_\rho/\bar{\rho}$.

Докажем (20). Положим в (3) $g = 1 - x/Z$, $Z = M^{1/\bar{\rho}}$. Очевидно, что равномерно по $0 < a \leq x \leq b < \infty$

$$p_G(g) dg \sim c_\rho^{-1} x^{-\rho} dx \cdot Z^{\rho-1}, \quad M \rightarrow \infty.$$

Поэтому надо показать, что

$$\frac{1}{F_S(M)} \int_M^\infty \left[Z \left(1 - \frac{M^\alpha}{v^\alpha} \right) \right]^{\rho-1} dF_S \left(\frac{v}{g^{1/\alpha}} \right) \sim r e^{-dx}, \quad M \rightarrow \infty,$$

где r и $d > 0$ — некоторые константы.

Сделаем замену: $v = M(1 + y/Z)$ и разобьем интеграл на два. Один берется по интервалу $y \in (0, \sqrt{Z})$, а второй по его дополнению, $(\sqrt{Z}, \infty)$. Нетрудно видеть, что второй интеграл есть $o(1)$ при $M \rightarrow \infty$ равномерно по x на компактах в $(0, \infty)$. Это следует из (22), (23). Поэтому займемся первым интегралом $I(Z)$:

$$I(Z) \sim \int_0^{\sqrt{Z}} (\alpha y)^{\rho-1} dF_S \left(M \left(1 + \frac{y}{Z} \right) \left(1 - \frac{x}{Z} \right)^{-\rho} \right) \frac{1}{\bar{F}_S(M)}.$$

Здесь мы учли, что $Z(1 - (1 + y/Z)^{-\alpha}) \sim \alpha y$. Используя (23) и (22), получим

$$I(Z) \sim \int_0^\infty (\alpha y)^{\rho-1} dy \exp(-b_\rho \bar{\rho}^{-1}(y + \rho x)) = k_2^{1-\rho} \exp(-k_2 x) \Gamma(\rho),$$

где $k_2 = \rho b_\rho / \bar{\rho}$, что совпадает с (21).

З а м е ч а н и е. Утверждение 1 позволяет объяснить неслучайность совпадения индексов в степенных асимптотиках $\mathbf{P}\{S_T < 1\}$ и $\mathbf{P}\{G_T < 1\}$ при $T \rightarrow \infty$. Аналогичный факт верен для дробного броуновского движения и был использован в [4], [5] для получения асимптотики $\mathbf{P}\{S_T < 1\}$.

Поясним замечание. Если $\rho \neq 0; 1$, то

$$\mathbf{P}\{S_T < 1\} = \int_0^\infty \mathbf{P}\{G_1 < x^{-\alpha} T^{-1}\} \varphi(x) dx,$$

где φ есть плотность распределения $R = S_1 G_1^{-1/\alpha}$. Учитывая (2), имеем

$$\mathbf{P}\{S_T < 1\} \sim \rho^{-1} c_\rho^{-1} \mathbf{E} R^{-\rho\alpha} T^{-\rho} \sim \mathbf{E} R^{-\rho\alpha} \mathbf{P}\{G_T < 1\}, \quad T \rightarrow \infty,$$

если $\mathbf{E} R^{-\rho\alpha} < \infty$. Конечность указанного момента следует из асимптотик F_S вблизи 0 и ∞ , см. (12) и (17).

Автор выражает признательность Ж. Бертоину за консультацию по рассмотренным вопросам и У. Фришу за предоставленную возможность работать в Обсерватории г. Ниццы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Золотарев В. М. Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983, 304 с.
2. Bertoin J. Lévy Processes. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996, 260 p.
3. Bingham N. H. Maxima of sums of random variables and suprema of stable processes. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1973, v. 26, p. 273–296.
4. Молчан Г. М. О максимуме дробного броуновского движения. — Теория вероятн. и ее примен., 1999, т. 44, в. 1, с. 111–115.
5. Molchan G. M. Maximum of fractional Brownian motion: probabilities of small values. — Comm. Math. Phys., 1999, v. 205, № 1, p. 97–111.
6. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961, 524 с.
7. Heyde C. C. On the maximum of sums of random variables and the supremum functional for stable processes. — J. Appl. Probab., 1969, v. 6, p. 419–429.

Поступила в редакцию
15.IX.1999

© 2000 г.

BOROVKOV K. A.*, PFEIFER D.**

ESTIMATES FOR THE SYRACUSE PROBLEM VIA A PROBABILISTIC MODEL

В статье с помощью простой стохастической модели для «сиракузской проблемы» (известной так же как « $(3x+1)$ -проблема») получены оценки «среднего поведения» траекторий исходной детерминированной динамической системы. Использование этой модели оправдывается не только некоторым сходством между управляющими правилами систем, но и качественной оценкой скорости аппроксимации (теорема 2). Из модели мы выводим явные формулы для асимптотических плотностей некоторых множеств, характеризующих исходную последовательность. Также получены аппроксимации асимптотических распределений для «моментов остановки» (времени до поглощения в единственном известном цикле $\{1, 2\}$) исходной системы и приведены численные иллюстрации результатов.

Ключевые слова и фразы: «сиракузская задача», итерации дискретных функций, динамическая система, случайное блуждание.

1. Introduction. The Syracuse problem, also known as $3x+1$ problem, Collatz' problem, Kakutani's problem, Ulam's problem, and Hasse's algorithm, has been drawing attention of many mathematicians for more than 40 years. The problem belongs to the class of questions which can be explained to anybody, but which are very difficult to answer. For its history, details, references and prizes for its solution see [6] and [7].

The Syracuse problem is concerned with the behaviour of a simply defined discrete time dynamical system. In general, such a system is given by the relation

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \geq 0, \quad f: \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}, \quad (1)$$

which defines the sequence $\{x_n\}_{n \geq 0}$ in the phase space $\mathcal{X}$ of the system, starting with some initial point $x_0 \in \mathcal{X}$. Such systems arise in a very natural way in many fields of

* Department of Mathematics & Statistics, The University of Melbourne, Parkville 3052, Australia; e-mail: kostya@ms.unimelb.edu.au

** Institut für Mathematische Stochastik, Universität Hamburg, Bundesstraße 55, D-20146 Hamburg, Germany.