Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

R. Zieliński, A reparametrization of the symmetric α -stable distributions and their dispersive ordering, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, том 45, выпуск 2, 410–411

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp475>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 18:00:14

© 2000 г.

ZIELIŃSKI R.*

A REPARAMETRIZATION OF THE SYMMETRIC α -STABLE DISTRIBUTIONS AND THEIR DISPERSIVE ORDERING

Для симметричных α -устойчивых законов предложена репараметризация, позволяющая упорядочить по степени рассеяния их функции распределения в зависимости от параметра устойчивости α . Рассмотрено одно статистическое приложение.

Ключевые слова и фразы: симметричные устойчивые распределения, характеристическая экспонента, индекс устойчивости, упорядочение по степени рассеяния, оценка Фама-Ролла.

For a symmetric α -stable random variable X we shall write $X \sim S(\alpha, \sigma)$ if the characteristic function of X is $\exp\{-|\sigma t|^\alpha/\alpha\}$, $0 < \alpha \leq 2$, $\sigma > 0$.

Theorem. If $X \sim S(\alpha, \sigma)$ and $Y \sim S(\alpha', \sigma)$, $0 < \alpha' < \alpha \leq 2$, then $Y \succ X$ in dispersive ordering.

P r o o f. Due to symmetry around zero and unimodality, it is enough to prove that $P\{X \leq t\} > P\{Y \leq t\}$ for all $t > 0$. Consider a positive random variable V , independent of X , with the Laplace transform $Ee^{-tV} = \exp\{-\alpha^{\lambda-1}t^\lambda/\lambda\}$, $t > 0$, $\lambda = \alpha'/\alpha$. Then Y may be written as $Y = V^{1/\alpha}X$ (Lemma 1 below). Let F_X and F_Y denote the distribution functions of X and Y , respectively. Now, for $t > 0$,

$$F_Y(t) = P\{Y \leq t\} = P\{V^{1/\alpha}X \leq t\} = E\left[F_X\left(\frac{t}{V^{1/\alpha}}\right) \middle| V\right] = EF_X\left(\frac{t}{V^{1/\alpha}}\right) < F_X\left(tE\left(\frac{1}{V}\right)^{1/\alpha}\right) \quad (\text{by concavity of } F_X(t) \text{ for } t > 0).$$

By Lemma 2 below, $E(1/V)^{1/\alpha} < 1$, $0 < \alpha \leq 2$, and hence $F_Y(t) < F_X(t)$.

Lemma 1. If $X \sim S(\alpha, \sigma)$ and V is a random variable, independent of X , with the Laplace transform $Ee^{-tV} = \exp\{-\alpha^{\lambda-1}t^\lambda/\lambda\}$, $t > 0$, $\lambda = \alpha'/\alpha$, $0 < \alpha' < \alpha \leq 2$, then $V^{1/\alpha}X \sim S(\alpha', \sigma)$.

P r o o f. See [1, Proposition 1.3.1] with trivial modifications.

Lemma 2. If V is a random variable with the Laplace transform $Ee^{-tV} = \exp\{-Ct^\lambda\}$, $0 < \lambda < 1$, $C = \alpha^{\lambda-1}/\lambda$, $0 < \alpha \leq 2$, then $E(1/V)^{1/\alpha} < 1$.

P r o o f. For $\alpha \in (1, 2]$, see [2, Theorem 2.6.3 and Theorem 3.4.3]. After an appropriate change of the scale parameter, Zolotarev's results give us

$$E\left(\frac{1}{V}\right)^{1/\alpha} = \alpha^{(1/\lambda-1)/\alpha} \lambda^{1/(\lambda\alpha)} \frac{\Gamma(1+1/(\lambda\alpha))}{\Gamma(1+1/\alpha)}. \quad (1)$$

Now, however, the Mellin transform involved, i.e. $E v^s$, is a holomorphic function for $\operatorname{Re} s < \lambda$ and the conclusion holds for all $\alpha \in (0, 2)$.

It is interesting that for $\alpha_n = 1/n$, $n = 1, 2, \dots$, the result may be obtained directly:

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{V}\right)^{1/\alpha_n} &= E\left(\frac{1}{V}\right)^n = \int_0^\infty dx_{n-1} \int_{x_{n-1}}^\infty dx_{n-2} \cdots \int_{x_1}^\infty dt Ee^{-tV} \\ &= C^{-n/\lambda} \frac{\Gamma(1+1/(\lambda\alpha))}{\Gamma(1+1/\alpha)}. \end{aligned}$$

To complete the proof, observe that, for every fixed α , (1) is an increasing function in $\lambda \in (0, 1)$ and for $\lambda = 1$ it is equal to 1.

* Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, P. O. Box 137, 00-950 Warsaw, Poland; e-mail: rziel@impan.gov.pl

Comment. Under the usual parametrization with the characteristic function $\exp\{-|\sigma t|^\alpha\}$ the result does not hold. Additionally, a nice property of the reparametrization is that $S(2, \sigma) = N(0, \sigma^2)$ while $S(1, \sigma)$ is the Cauchy distribution with σ as the scale parameter.

An application. Let $F_\alpha(x)$ denote the distribution function of $X \sim S(\alpha, 1)$. Given $q \in (\frac{1}{2}, 1)$ and the q th quantile x_q , the equation $F_\alpha(x_q) = q$ with respect to α has the unique solution. This enables one to estimate α by estimating x_q which states behind the Fama-Roll [3] estimator. Now however no restrictions on q are needed.

REFERENCES

1. *Samorodnitsky G., Taqqu M. S.* Stable Non-Gaussian Random Processes. New York-London: Chapman & Hall, 1994.
2. *Золотарев В. М.* Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983, 304 с.
3. *Fama E., Roll R.* Parameter estimates for symmetric stable distributions. — J. Amer. Statist. Assoc., 1971, v. 66, p. 331-338.

Поступила в редакцию
16.IV.1999

Письмо в редакцию

В нашей совместной с А. Ло работе [1] была получена оценка близости двух функций распределения ω^2 -статистик фон Мизеса, одна из которых отвечает наблюдениям с непрерывной функцией распределения, а другая — наблюдениям с равномерным распределением на конечном числе точек. Как следствие было показано, что функция распределения ω^2 -статистики фон Мизеса отклоняется от функции распределения ее бутстрэп-аппроксимации не более, чем на $c(\epsilon)n^{-1+\epsilon}$, где n — число наблюдений, каково бы ни было $\epsilon > 0$. Доказательства были основаны, в частности, на одной оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме в гильбертовом пространстве из [2]. Если использовать более совершенную, чем в [2], оценку, полученную впоследствии В. Бенткусом и Ф. Гетце в [3], то рассуждения из [1] приводят к следующим более точным результатам: правые части оценок в теореме и ее следствии в [1] могут быть заменены, соответственно, на $c(n_1^{-1} + m^{-1} + n^{-1})$ и $c'n^{-1}$, где c, c' суть абсолютные постоянные.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lo A. Y., Sazonov V. V.* Von Mises ω^2 -statistic and the bootstrap. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 4, с. 850-858.
2. *Залесский Б. А., Сазонов В. В., Ульянов В. В.* Нормальная аппроксимация в гильбертовом пространстве, I. — Теория вероятн. и ее примен., 1988, т. 33, в. 2, с. 225-245.
3. *Bentkus V., Götze F.* Uniform rates of convergence in the CLT for quadratic forms in multidimensional spaces. — Probab. Theory Relat. Fields, 1997, v. 109, p. 367-416.

13.IV.2000 г.

В. В. Сазонов