Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ватутин, Рецензия на книгу Kolchin V. F. “Random Graphs”, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, том 45, выпуск 2, 412–414

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp477>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 03:30:42

© 2000 г.

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

Kolchin V. F. *Random Graphs*. Encyclopedia of Mathematics and Applications, v. 53. Cambridge: Cambridge University Press, 1999, xi, 252 p. £ 50, \$US 80, ISBN 0 521 44081 5 hardback.

Со времен Муавра и Лапласа и до начала 30-х годов XX века комбинаторика играла важную роль в становлении и развитии теории вероятностей. Однако в середине уходящего века с переходом теории вероятностей на новый уровень под влиянием аксиоматики Колмогорова произошло определенное охлаждение интереса специалистов-вероятностников к комбинаторным проблемам. Относительно простые задачи были решены, а обращение к новым проблемам не вызывалось практической необходимостью: исследовать свойства непрерывных случайных величин с произвольными законами распределения было гораздо интереснее и естественнее, чем свойства различных характеристик комбинаторных объектов, выбранных случайно и равновероятно из множества объектов той или иной структуры. Однако компьютерная революция вдохнула новую жизнь в союз комбинаторики и теории вероятностей. Появилось огромное число важных для практики перечислительных задач, задач теории графов, случайных размещений и отображений, решение которых трудно себе представить (если это вообще возможно) без применения теории вероятностей. Поэтому в настоящее время глубокие вероятностные понятия и методы (принцип инвариантности, мартингалы, локальные предельные теоремы, броуновское движение и экскурсия, локальные времена и многие другие) стали неотъемлемыми атрибутами при решении комбинаторных задач.

Создателем и пропагандистом одного из таких методов — обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам — является автор рецензируемой книги В.Ф. Колчин. Идея метода, основанного на обобщенной схеме размещения частиц по ячейкам, такова. Пусть проводится n независимых опытов, каждый из которых имеет N равновероятных исходов, $1, 2, \dots, N$. Пусть ν_i обозначает количество опытов, закончившихся исходом i . Если $k_1, \dots, k_N$ — неотрицательные целые такие, что $k_1 + \dots + k_N = n$, то

$$P\{\nu_1 = k_1, \dots, \nu_N = k_N\} = \frac{n!}{k_1! \dots k_N! N^n}. \quad (1)$$

Ясно, что описанную выше последовательность опытов можно рассматривать как последовательное размещение n частиц в N ящиков, предполагая, что вероятность попадания i -й частицы в любую из n ячеек равна N^{-1} . При этом ν_j есть число частиц, оказавшихся в j -й ячейке после завершения всех опытов.

Рассмотрим теперь последовательность $\xi_1, \dots, \xi_N$ независимых случайных величин, каждая из которых имеет распределение Пуассона с параметром λ :

$$P\{\xi_i = k\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Легко проверить, что

$$P\{\nu_1 = k_1, \dots, \nu_N = k_N\} = P\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N | \xi_1 + \dots + \xi_N = n\}. \quad (2)$$

Таким образом, свойства распределения (1) можно изучать, исследуя свойства правой части (2). Именно это соображение является ключевым в методе В.Ф. Колчина, который широко и не без успеха применяется в следующей ситуации.

Откажемся от предположений независимости, равновероятности и последовательности при размещении частиц по ячейкам. Тогда любое множество $\nu_1, \dots, \nu_N$ целочисленных неотрицательных случайных величин, удовлетворяющих соотношению $\nu_1 + \dots + \nu_N = n$, можно рассматривать как схему размещения n частиц по N ячейкам, при этом величины ν_i , $i = 1, \dots, N$, интерпретируются как числа заполнения соответствующих ячеек.

Оказывается, что для большого числа комбинаторно-вероятностных задач можно подобрать независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_N$ такие, что

$$P\{\nu_1 = k_1, \dots, \nu_N = k_N\} = P\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N | \xi_1 + \dots + \xi_N = n\}.$$

Для таких задач проблема нахождения совместного распределения величин $\nu_1, \dots, \nu_N$ сводится к доказательству соответствующих утверждений для независимых и одинаково распределенных случайных величин, при условии фиксации их суммы. В частности, требуется доказать локальную предельную теорему для распределения суммы $\xi_1 + \dots + \xi_N$ при различных соотношениях между параметрами n и N .

Реализации этой идеи для широкого круга задач и посвящена рецензируемая монография. Остановимся на содержании книги несколько подробнее.

В первой главе книги, названной «Обобщенная схема размещения и компоненты случайных графов», дана сводка вероятностных утверждений (теоремы о сходимости производящих функций и функций распределения, теоремы обращения, интегральная и локальная предельные теоремы), необходимых для дальнейшего изложения, описана обобщенная схема размещения частиц по ячейкам и на многочисленных утверждениях (для лесов из некорневых деревьев, деревьев фиксированного размера в случайном лесе, графов, имеющих только одноцикловые компоненты, и ряда других) продемонстрировано, как можно применять обобщенную схему размещения при решении такого рода задач.

Вторая глава посвящена классическому направлению в исследовании случайных комбинаторных объектов — изучению фазовых переходов в случайных эволюционирующих графах. Показано, что если граф выбирается случайно и равновероятно из множества всех графов с n помеченными вершинами и T ребрами, то при $n, T \rightarrow \infty$ его свойства существенно зависят от того, равен предел величины $n(1 - 2T/n)^3$ нулю, константе или бесконечности. Проанализирована также ситуация, когда граф строится при помощи следующей процедуры. Первоначально имеется граф, состоящий из n изолированных вершин. Затем проводится T независимых испытаний, в каждом из которых наудачу (с возвращением) выбираются две вершины графа, скажем i и j (быть может, совпадающие), и проводится ребро, соединяющее их. В конце главы затронута проблема изучения свойств графов, построение которых проводится по описанной выше схеме за тем исключением, что при каждом испытании вероятность соединения вершин i и j равна $2p_i p_j$, если $i \neq j$, и p_i^2 , если $i = j$.

Следует сказать, что в изучении неравновероятных случайных графов сделаны лишь первые шаги, и, на мой взгляд, это интересное направление заслуживает большего внимания исследователей, которое, возможно, будет стимулировано появлением данной книги.

В третьей главе анализируются свойства систем линейных уравнений

$$x_{i_1(t)} + \dots + x_{i_r(t)} = \beta_t, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad r \geq 2,$$

над полем $GF(2)$, в которых $x_i \in \{0, 1\}$,

$$P\{\beta_t = 1\} = 1 - P\{\beta_t = 1\} = \frac{1}{2},$$

а $i_j(t)$, $j = 1, \dots, r$, являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, принимающими значения из множества $\{1, 2, \dots, n\}$. При этом

основное внимание уделено случаю $r = 2$ и произвольному распределению величин $i_j(t)$ на множестве $\{1, \dots, n\}$, и случаю $r > 2$ и равномерному распределению величин $i_j(t)$ на указанном множестве. Решается также задача оценки минимального числа уравнений T , необходимых для нахождения с вероятностью, близкой к единице, истинного решения $X^* = (X_1^*, \dots, X_n^*)$ заведомо совместной системы $AX^* = B^*$ такой, что

1) матрица A имеет размер $T \times n$, каждая ее строка содержит две единицы и $n - 2$ нуля, причем места, на которых стоят единицы, выбираются случайно и равновероятно из множества пар $\{(i, j), i < j, i, j = 1, \dots, n\}$;

2) вместо вектора $B^* = (b_1^*, \dots, b_T^*)$ известен лишь искаженный 0-1 вектор $B = (b_1, \dots, b_T)$, в котором $P\{b_j = b_j^*\} > \frac{1}{2}$.

Следует заметить, что столь систематическое и полное изложение теории случайных уравнений над конечными полями, которое сделано в данной главе, появляется в монографической литературе впервые.

В четвертой главе при помощи обобщенной схемы размещения исследуются свойства случайных равновероятных перестановок. Дано исчерпывающее описание асимптотического поведения распределения числа циклов ν_n в случайной перестановке порядка n . Для ряда подмножеств $R \subset \{1, \dots, n\}$ исследовано асимптотическое поведение числа циклов в перестановке порядка n , взятой случайно и равновероятно из множества всех перестановок $S_{n,R}$ порядка n , длины циклов которых лежат в множестве R .

Пятая, последняя глава монографии посвящена исследованию асимптотического поведения числа решений уравнения $X^d = e$, где e — единичная перестановка порядка n , а X — искомая перестановка того же порядка.

Каждая глава заканчивается комментарием, в котором, наряду с библиографическими ссылками, приведена сводка результатов, не вошедших в соответствующую главу, но тесно связанных с ее содержанием.

Монография В. Ф. Колчина безусловно интересна и будет полезна как тем, кто интересуется вероятностными задачами комбинаторики, так и представителям «числой» комбинаторики. Однако в русском варианте этой книги, который, как я надеюсь, не заставит себя ждать, следует, на мой взгляд, расширить список литературы, который в рецензируемой монографии обрывается (если не принимать во внимание статьи автора и его учеников) на работах 1993 года, а также уделить больше внимания чисто вероятностным конструкциям (например, связи случайных отображений, плоских случайных корневых деревьев и лесов со случайными блужданиями).

В. А. Ватутин