Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Богачёв, М. Рёкнер, Обобщение теоремы Хасьминского о существовании инвариантных мер для локально интегрируемых сносов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, том 45, выпуск 3, 417–436

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp478>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 13:33:24

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.
Выходит 4 раза в год
Москва • Наука • ТВП

Том 45
Выпуск 3, 2000 год
июль, август, сентябрь

© 1999 г.

БОГАЧЁВ В. И.*, РЁКНЕР М.**

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ХАСЬМИНСКОГО О СУЩЕСТВОВАНИИ ИНВАРИАНТНЫХ МЕР ДЛЯ ЛОКАЛЬНО ИНТЕГРИРУЕМЫХ СНОСОВ¹⁾

Пусть $A = (A^{ij})$ — отображение со значениями в пространстве неотрицательных симметричных операторов на $\mathbf{R}^n$ и $B = (B^i)$ — борелевское векторное поле на $\mathbf{R}^n$, причем A локально равномерно невырожденно, $A^{ij} \in H_{\text{loc}}^{p,1}(\mathbf{R}^n)$, $B^i \in L_{\text{loc}}^p(\mathbf{R}^n)$, где $p > n$. Показано, что существование функции Ляпунова для оператора $L_{A,B}f = \sum A^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} f + \sum B^i \partial_{x_i} f$ достаточно для существования вероятностной меры μ со строго положительной непрерывной плотностью класса $H_{\text{loc}}^{p,1}(\mathbf{R}^n)$, удовлетворяющей уравнению $L_{A,B}^* \mu = 0$ в слабом смысле и являющейся инвариантной мерой диффузии с производящим оператором $L_{A,B}$ на области $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Для произвольных непрерывных невырожденных A и локально ограниченных B установлено существование абсолютно непрерывных решений. Аналогичное обобщение теоремы Хасьминского получено для многообразий.

Ключевые слова и фразы: инвариантная мера, диффузионный процесс.

Известная теорема Хасьминского [1], [2] утверждает, что диффузионный процесс в $\mathbf{R}^n$ (или, более общим образом, в гладком многообразии) с локально липшицевыми коэффициентами обладает инвариантной вероятностью при условии существования некоторой функции Ляпунова

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия; e-mail: vbogach@mech.math.msu.su

**Universität Bielefeld, Fakultät für Mathematik, D-33501 Bielefeld, Germany; e-mail: roeckner@mathematik.uni-bielefeld.de

¹⁾ Работа написана при частичной поддержке грантов РФФИ 96-15-96865, РФФИ 97-01-00932, DFG 436 RUS 113/343/0(R), INTAS 94-0378, INTAS-RFBR 95-0099, SFB-343 и EU-TMR-Project ERB-FMRX-CT96-0075.

для производящего оператора этой диффузии. Одним из наиболее известных в приложениях является случай, когда коэффициент сноса коэрцитивен. В последние годы возрастает интерес к диффузионным процессам с более общими, возможно сингулярными, коэффициентами сноса. Было обнаружено, что эта более общая ситуация сохраняет многие существенные черты локально липшицева случая. Обобщение теоремы Хасьминского было получено в [3, §4.3] для невырожденных диффузионных процессов с непрерывными коэффициентами и некоторых классов функций Ляпунова. Дальнейшие расширения найдены в [4]–[6], где существование инвариантных вероятностей установлено для диффузионных процессов с невырожденными непрерывными коэффициентами диффузии, удовлетворяющими некоторым равномерным оценкам, и локально ограниченными коэрцитивными сносами. В [7, гл. II] теорема Хасьминского распространена на случай, когда коэффициент диффузии — единичный оператор, а снос B имеет вид $B = B_1 + B_2$, где B_1 — липшицево отображение, а B_2 — ограниченное отображение. С другой стороны, в работах [8], [9] было показано, что всякая инвариантная мера невырожденной диффузии в $\mathbf{R}^n$ (или в гладком n -мерном многообразии) со сносом, локально интегрируемым в степени выше n , обладает локально соболевской плотностью из того же самого класса, что и в локально липшицевом случае; при этих же условиях в работе [10] доказана гипотеза Варадана относительно единственности инвариантных вероятностей. Цель данной работы состоит в применении методов, использованных в [8]–[10], для замены локальной липшицевости (или локальной ограниченности) сноса в упомянутой выше теореме Хасьминского локальной интегрируемостью. Формулировки и доказательства наших результатов в значительной мере являются аналитическими, что представляется естественным с точки зрения рассматриваемых задач; однако они имеют непосредственную вероятностную интерпретацию. Хорошо известно, что в случае локально липшицевых коэффициентов всякая инвариантная мера μ диффузии ξ , задаваемой стохастическим дифференциальным уравнением

$$d\xi_t = \sqrt{2A(\xi_t)} dw_t + B(\xi_t) dt,$$

где $A = (A^{ij})_{i,j=1}^n$ — отображение со значениями в пространстве неотрицательных симметричных операторов на $\mathbf{R}^n$, $B = (B^i)_{i=1}^n$ — векторное поле на $\mathbf{R}^n$, удовлетворяет эллиптическому уравнению

$$L_{A,B}^* \mu = 0, \quad (0.1)$$

где

$$L_{A,B} f = \text{trace}(A f'') + (B, \nabla f), \quad f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n), \quad (0.2)$$

в следующем слабом смысле:

$$\int_{\mathbf{R}^n} L_{A,B} f d\mu = 0, \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n), \quad (0.3)$$

где всегда неявно предполагается, что $B^i, A^{ij} \in L_{\text{loc}}^1(\mu)$.

Во многих приложениях оказывается более удобным работать со слабым эллиптическим уравнением (0.3) вместо собственно инвариантности мер в смысле полугрупп. Однако, как будет упомянуто ниже, при широких условиях (включающих условия, используемые в нашей работе) обе формулировки оказываются эквивалентными.

Для всякого $R > 0$ положим $U_R := \{x \in \mathbf{R}^n: |x| \leq R\}$. Если Ω — открытое множество в $\mathbf{R}^n$, то через $H^{p,1}(\Omega)$ будем обозначать класс Соболева всех функций, которые вместе со своими обобщенными производными первого порядка принадлежат $L^p(\Omega)$. Класс $H^{p,1}(\Omega)$ наделяется соболевской нормой

$$\|f\|_{H^{p,1}(\Omega)} = \|f\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|\partial_{x_i} f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Символ $C_0^\infty(\Omega)$ используется для обозначения класса всех бесконечно дифференцируемых функций на Ω с компактными носителями в Ω . Аналогичным образом вводится класс $C_0^\infty(M)$ для гладкого конечномерного многообразия M . Через $H_{\text{loc}}^{p,1}(\Omega)$ обозначается множество всех таких функций f на Ω , что $\zeta f \in H^{p,1}(\Omega)$ для всех $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$. Нормы векторов обозначаются посредством $|\cdot|$, а нормы операторов — посредством $\|\cdot\|$.

1. Инвариантные меры в $\mathbf{R}^n$. В доказательствах ниже мы будем использовать следующий результат, полученный в [8] в случае $A^{ij} \in C^\infty$ (см. теорему 1 цитированной работы и последующие замечания), а затем распространенный в [9] на случай $A^{ij} \in H_{\text{loc}}^{\gamma,1}(\Omega)$, где $\gamma > n$.

Будем говорить, что конечная (возможно, знакопеременная) борелевская мера μ на открытом множестве Ω удовлетворяет (0.1) на Ω , если $B^i, A^{ij} \in L_{\text{loc}}^1(\mu)$ и равенство в (0.3) верно для всех $f \in C_0^\infty(\Omega)$.

Теорема 1.1. Пусть μ — конечная мера (возможно, знакопеременная) на открытом множестве $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, удовлетворяющая уравнению $L_{A,B}^* \mu = 0$ в Ω в объясненном выше смысле, $A = (A^{ij})$ — непрерывное отображение со значениями в пространстве неотрицательных симметричных линейных операторов на $\mathbf{R}^n$ такое, что $A^{ij} \in H_{\text{loc}}^{\gamma,1}(\Omega)$ и $\det A \neq 0$, а $B: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ удовлетворяет одному из следующих двух условий: либо $|B| \in L_{\text{loc}}^\gamma(\Omega, dx)$, либо $|B| \in L_{\text{loc}}^\gamma(\Omega, \mu)$, где $\gamma > n$. Тогда μ имеет плотность $F \in H_{\text{loc}}^{\gamma,1}(\Omega)$. В частности, функция F локально гёльдерова порядка $1 - n/\gamma$.

Отметим, что если

$$\kappa := \|B\|_{L^\gamma(\Omega, \mathbf{R}^n)} + \sum_{i,j=1}^n \|A^{ij}\|_{H^{\gamma,1}(\Omega)} + \sup_{x \in \Omega} \|A(x)^{-1}\| < \infty, \quad (1.1)$$

то для всякой области K с компактным замыканием в Ω существует такое число $\lambda(K, \kappa)$, что всякого решения $\mu = Fdx$ уравнения $L_{A,B}^* \mu = 0$ (в нашем смысле) справедлива оценка

$$\|F\|_{H^{\gamma,1}(K)} \leq \lambda(K, \kappa) \sup_{x \in K} |F(x)|, \quad (1.2)$$

при условии, что выбрана непрерывная версия F . Эта оценка вытекает из теоремы 1.1 и [11, теорема 5.5.5]. Подробности можно найти в [9, замечание 2.14].

Лемма 1.1. Пусть $\{\mu_k\}$ — последовательность вероятностных мер на $\mathbf{R}^n$ таких, что

$$L_{A_k, B_k}^* \mu_k = 0$$

в смысле (0.3), где $A_k = (A_k^{ij})$ являются непрерывными отображениями на $\mathbf{R}^n$ со значениями в пространстве неотрицательных симметричных операторов на $\mathbf{R}^n$, а $B_k = (B_k^i)$ — борелевские отображения на $\mathbf{R}^n$, причем $|B_k| \in L_{\text{loc}}^1(\mu_k)$. Предположим, что для всякого $R > 0$ существуют $\alpha_R > n$, $\beta_R > 0$ и $\gamma_R > 0$ такие, что $A_k^{ij} \in H^{\alpha_R, 1}(U_R)$ и

$$\kappa_R := \sup_k \int_{U_R} \left[|B_k(x)|^{\alpha_R} + \|\nabla A_k(x)\|^{\alpha_R} \right] dx < \infty, \quad (1.3)$$

$$\beta_R I \leq A_k(x) \leq \gamma_R I, \quad \forall k, \forall x \in U_R. \quad (1.4)$$

Предположим, кроме того, что существует такая функция $V \in C^2(\mathbf{R}^n)$, что

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty, \quad (1.5)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \sup_k L_{A_k, B_k} V(x) = -\infty. \quad (1.6)$$

Тогда:

(i) меры μ_k допускают непрерывные плотности p_k такие, что для всякого $R > 1$ функции $p_k|_{U_{R-1}}$ равномерно ограничены, равномерно гёльдеровы и равномерно ограничены по соболевской норме в $H^{\alpha_R, 1}(U_{R-1})$;

(ii) последовательность мер $\{\mu_k\}$ относительно слабо компактна;

(iii) $\inf_k \inf_{x \in U_R} p_k(x) > 0$ для всякого $R > 0$.

Далее, утверждения (i)–(iii) остаются справедливыми для всех $k > R$, если для каждого k мера μ_k обращается в нуль вне U_k и удовлетворяет уравнению $L_{A_k, B_k}^* \mu_k = 0$ лишь в U_k .

Доказательство. Как уже отмечалось, существование непрерывных плотностей p_k таких, что $p_k \in H_{\text{loc}}^{\alpha_{R'},1}(U_R)$, доказано в [8], [9]. В частности, функции p_k локально гёльдеровы. Теперь утверждение (i) вытекает из [12] (или из аналогичных результатов в [13]; см. также [14]). Действительно, пусть $V = 6U_R$. Согласно [12, следствие 5.2] (см. также [15, теорема 8.20 и замечание на с. 197]), для заданных $0 < R < R'$ существует $C(R, R') > 0$ (зависящее лишь от $R, R', \beta_{R'}, \gamma_{R'}$ и $\kappa_{R'}$) такое, что для всякой неотрицательной функции g_k из $H_{\text{loc}}^{\alpha_{6R},1}(\mathbf{R}^n)$, удовлетворяющей уравнению

$$\partial_{x_i} (A_k^{ij}(x) \partial_{x_j} g_k - B_k^i g_k + \partial_{x_j} A_k^{ij} g_k) = 0$$

в $U_{R'}$ в слабом смысле, справедлива оценка

$$\sup_{U_R} g_k \leq C(R, R') \inf_{U_R} g_k. \quad (1.7)$$

Применяя это утверждение к p_k , заключаем, что

$$\sup_{U_R} p_k \leq C(R, R+1) \inf_{U_R} p_k \leq \frac{C(R, R+1)}{\text{Vol}(U_R)} \int_{U_R} p_k dx \leq \frac{C(R, R+1)}{\text{Vol}(U_R)}.$$

Таким образом, последовательность $\{p_k\}$ равномерно ограничена на U_R . Кроме того, применяя [16, теорема 14.1, гл. 3, с. 201] или [12, следствие 5.5], получаем, что функции p_k равномерно гёльдеровы на U_R , т.е. существуют такие $\delta > 0$ и $K > 0$, что для всех k имеем $|p_k(x) - p_k(y)| \leq K|x - y|^\delta$, $\forall x, y \in U_R$. Согласно сказанному выше (см. (1.2)), последовательность $\{p_k|_{U_{R-1}}\}$ равномерно ограничена в $H^{\alpha_{R'},1}(U_{R-1})$.

Для доказательства утверждения (ii) возьмем такой шар $U = U_\tau$, что $L_{A_k, B_k} V(x) \leq -1$, $\forall k, \forall x \notin U$. Выберем функцию $\psi \in C^2(\mathbf{R}^1)$ так, что $\psi(t) = t$ при $t \leq 1$, $\psi(t) = 2$ при $t \geq 3$, $\psi'(t) \geq 0$ и $\psi''(t) \leq 0$. Положим $\psi_j(t) = j\psi(t/j)$, $j \in \mathbf{N}$. Заметим, что

$$\int_{\mathbf{R}^n} L_{A_k, B_k}(\psi_j \circ V) d\mu_k = 0, \quad \forall k, j. \quad (1.8)$$

В самом деле, из условия и теоремы Лебега о мажорируемой сходимости вытекает, что $\int L_{A_k, B_k} \varphi d\mu_k = 0$ для всех $\varphi \in C_0^2(\mathbf{R}^n)$. Значит, то же самое верно и для всех $\varphi \in C^2(\mathbf{R}^n)$ таких, что $\varphi = \text{const}$ вне некоторого шара (поскольку $\varphi - \text{const}$ имеет компактный носитель и $L_{A_k, B_k} 1 = 0$). Замечая, что $\psi_j \circ V = 2j$ вне шара U_{m_j} , где $m_j > \tau$ выбрано таким образом, что $V(x) \geq 3j$ при $x \notin U_{m_j}$, приходим к (1.8). Ввиду утверждения (i) и условия имеем

$$S := \sup_k \int_U |L_{A_k, B_k} V| d\mu_k < \infty. \quad (1.9)$$

Зафиксируем такое j_0 , что $j_0 > \max_{x \in U} V(x)$. Ниже мы будем иметь дело лишь с $j \geq j_0$. Отметим, что

$$L_{A_k, B_k}(\psi_j \circ V) = \psi'_j(V) L_{A_k, B_k} V + \psi''_j(V) (A_k \nabla V, \nabla V). \quad (1.10)$$

Следовательно, для всех $j \geq j_0$ имеем

$$L_{A_k, B_k}(\psi_j \circ V) \leq \psi'_j(V) L_{A_k, B_k} V(x) \leq 0, \quad \text{если } V(x) \geq j.$$

Если $V(x) \leq j$, то $L_{A_k, B_k}(\psi_j \circ V)(x) = L_{A_k, B_k} V(x)$. Наконец,

$$L_{A_k, B_k}(\psi_j \circ V)(x) = 0, \quad \text{если } x \notin U_{m_j}.$$

Пусть

$$R_j = \max \left\{ R > 0: \sup_{x \in U_R} V(x) \leq j \right\},$$

т.е. U_{R_j} есть максимальный шар U_R , содержащийся в $\{V \leq j\}$. Ясно, что $R_j \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$ ввиду условия (1.5). Заметим, что нулевой интеграл $L_{A_k, B_k}(\psi_j \circ V)$ по $\mathbf{R}^n$ в (1.8) равен сумме интегралов по множествам $U \cap \{V \leq j\}$, $U_{m_j} \cap \{V \leq j\} \setminus U$ и $U_{m_j} \cap \{V > j\}$. Поскольку $L_{A_k, B_k}(\psi_j \circ V) = L_{A_k, B_k} V$ на $\{V \leq j\}$, мы получаем из (1.9) оценку

$$\left| \int_{U \cap \{V \leq j\}} L_{A_k, B_k}(\psi_j \circ V) d\mu_k \right| \leq S.$$

Два других интеграла неположительны, ибо $L_{A_k, B_k}(\psi_j \circ V) \leq 0$ на множестве $\{V > j\}$ и $L_{A_k, B_k}(\psi_j \circ V) = L_{A_k, B_k} V \leq -1$ на множестве $\{V \leq j\} \setminus U$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \int_{U_{m_j} \cap \{V \leq j\} \setminus U} L_{A_k, B_k}(\psi_j \circ V) d\mu_k \right| &\leq S, \\ \left| \int_{U_{m_j} \cap \{V > j\}} L_{A_k, B_k}(\psi_j \circ V) d\mu_k \right| &\leq S. \end{aligned}$$

Учитывая, что $U_{R_j} \subset U_{m_j} \cap \{V \leq j\}$ и что $L_{A_k, B_k}(\psi_j \circ V) = L_{A_k, B_k} V \leq 0$ на множестве $U_{m_j} \cap \{V \leq j\} \setminus U$, получаем

$$0 \leq \int_{U_{R_j} \setminus U} (-L_{A_k, B_k} V) d\mu_k \leq S, \quad \forall k, \forall j \geq j_0. \quad (1.11)$$

Следовательно,

$$\sup_k \int_{\mathbf{R}^n} |L_{A_k, B_k} V| d\mu_k \leq 2S. \quad (1.12)$$

Принимая во внимание (1.6), заключаем, что последовательность мер $\{\mu_k\}$ равномерно плотна (т.е. для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое число $R > 0$, что $\mu_k(\mathbf{R}^n \setminus U_R) < \varepsilon$ для всех k), а значит, она относительно слабо компактна.

Покажем теперь (iii), т.е. что последовательность $\{p_k\}$ равномерно отделена от нуля на U_R . Поскольку p_k не является тождественным нулем на $\mathbb{R}^n$, из (1.7) вытекает, что функция p_k строго положительна. Предположим, что $\lim_{j \rightarrow \infty} \inf_{U_R} p_{k_j} = 0$. Как доказано выше, $\{p_{k_j}\}$ содержит подпоследовательность, которая равномерно сходится на каждом шаре. Применяя (1.7), заключаем, что она сходится локально равномерно к нулю. Это противоречит тому факту, что последовательность вероятностных мер $\{\mu_k\}$ относительно слабо компактна.

Докажем последнее утверждение. Как и выше, функции p_k , $k \geq m$, равномерно ограничены в $H^{\alpha_m, 1}(U_{m-1})$ и равномерно гёльдеровы. Рассуждения, использованные для доказательства (1.8), дают равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} L_{A,B}(\psi_j \circ V) d\mu_k = 0, \quad \forall j, \forall k > m_j. \quad (1.13)$$

Таким же образом, как и выше, (1.13) приводит к оценке

$$\left| \int_{U_{R_j} \setminus U} L_{A,B} V d\mu_k \right| \leq S, \quad \forall j \geq j_0, \forall k > m_j, \quad (1.14)$$

где $U = U_r$ таково, что $LV(x) \leq -1$, $\forall x \notin U$. Поскольку $LV(x) \rightarrow -\infty$ при $|x| \rightarrow \infty$, заключаем ввиду (1.14), что последовательность $\{\mu_k\}$ равномерно плотна. Утверждение (iii) следует из тех же рассуждений, что и в первой части этой леммы.

Следствие 1.1. В ситуации леммы 1.1 последовательность $\{\mu_k\}$ относительно компактна по вариации.

Доказательство. Из леммы 1.1 следует, что всякая подпоследовательность этой последовательности имеет подпоследовательность $\{\nu_k\}$ такую, что $\{\nu_k\}$ слабо сходится к некоторой вероятностной мере ν , а непрерывные плотности p_k мер ν_k сходятся локально равномерно к непрерывному пределу p . Ясно, что p служит плотностью для ν . По теореме Шеффе (см. [17, с. 306, приложение II])

$$\int_{\mathbb{R}^n} |p_k(x) - p(x)| dx \rightarrow 0,$$

в чем и состоит наше утверждение.

Следствие 1.2. Предположим, что меры μ_k удовлетворяют условиям, указанным в лемме 1.1, кроме условия (1.6), которое замещается на

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \sup_k (B_k(x), x) = -\infty. \quad (1.15)$$

Предположим дополнительно, что $\sup_R \gamma_R < \infty$. Тогда для каждого $p \geq 1$ имеем

$$M_p := \sup_k \int_{\mathbb{R}^n} (x, x)^p \mu_k(dx) < \infty. \quad (1.16)$$

Доказательство. Можно считать, что $p \in \mathbf{N}$. Функция $V(x) = (x, x)^p$ удовлетворяет условиям предыдущей леммы, поскольку

$$\begin{aligned} L_{A_k, B_k} V(x) &= 4p(p-1)(x, x)^{p-2} \sum_{i,j=1}^n A_k^{ij}(x) x_i x_j \\ &\quad + 2p(x, x)^{p-1} \operatorname{tr} A_k(x) + 2p(x, x)^{p-1} (x, B_k(x)) \\ &\leq (x, x)^{p-1} \left[4p(p-1) n^2 \|A_k(x)\| \right. \\ &\quad \left. + 2pn \|A_k(x)\| + 2p(x, B_k(x)) \right]. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Следовательно, в силу (1.12) получаем $\sup_k \int_{\mathbf{R}^n} |L_{A_k, B_k} V(x)| \mu_k(dx) < \infty$. Ввиду (1.15), (1.17) и равномерной ограниченности $\|A_k(x)\|$ получаем, что $M_{p-1} < \infty$. Следствие доказано.

З а м е ч а н и е 1.1. (i) Заметим, что доказательство плотности $\{\mu_k\}$ использовало лишь (1.5) и (1.6). Следовательно, утверждение (ii) леммы 1.1 справедливо при выполнении (1.5) и (1.6) для мер μ_k , удовлетворяющих уравнениям $L_{A_k, B_k}^* \mu_k = 0$ с произвольными коэффициентами A_k и B_k , которые локально μ_k -интегрируемы.

(ii) Ясно, что условия (1.3) и (1.4) могут быть наложены локально, т.е. для каждой точки x существует ее окрестность W и числа $\alpha_W > n$, $\beta_W > 0$, $\gamma_W > 0$ такие, что (1.3) и (1.4) справедливы для W , α_W , β_W и γ_W вместо U_R , α_R , β_R и γ_R соответственно.

(iii) Из доказательства ясно, что условие $V \in C^2(\mathbf{R}^n)$ можно заменить на локальную ограниченность V и существование локально интегрируемых первых и вторых обобщенных производных V , т.е. принадлежность V ко второму соболевскому классу $H_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbf{R}^n)$. В этом случае (1.6) должно выполняться на множестве полной меры. При обосновании (1.8) достаточно заметить, что функция $\psi_j \circ V - 2j$ имеет компактный носитель и приближается функциями класса $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ по норме $L^1(\mathbf{R}^n)$ вместе с первыми и вторыми производными.

Теорема 1.2. *Предположим, что $A = (A^{ij})$ — отображение на $\mathbf{R}^n$ со значениями в пространстве неотрицательных симметричных линейных операторов в $\mathbf{R}^n$, а B — борелевское отображение в $\mathbf{R}^n$, причем для всякого шара U_R существуют такие числа $\alpha_R > n$ и $\beta_R > 0$, что $\beta_R I \leq A(x)$ при всех $x \in U_R$ и $A^{ij}|_{U_R} \in H^{\alpha_R, 1}(U_R)$, $|B|_{U_R} \in L^{\alpha_R}(U_R)$. Кроме того, предположим, что существует такая функция $V \in C^2(\mathbf{R}^n)$, что*

$$V(x) \rightarrow +\infty \quad \text{и} \quad L_{A, B} V(x) \rightarrow -\infty \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (1.18)$$

Тогда найдется такая вероятностная мера μ , что

$$|B| \in L_{\text{loc}}^1(\mu) \quad \text{и} \quad L_{A, B}^* \mu = 0$$

в смысле (0.3). Более того, μ допускает непрерывную строго положительную плотность p такую, что $p|_{U_R} \in H_{\text{loc}}^{\alpha_R, 1}(U_{R-1})$ при $R > 1$.

Доказательство. Найдем сначала последовательность неотрицательных функций p_k , отличных от тождественного нуля и являющихся решениями (в слабом смысле) нашего уравнения в шарах U_{k-1} , $k > 1$. Согласно [12, теорема 3.2 и замечание в конце §3], для всякого $k > 1$ существует непрерывная внутри U_k неотрицательная функция $p_k \in H^{\alpha_{k+1}, 1}(U_k)$ такая, что $p_k = 1$ на границе U_k (в смысле, объясненном в [12]), а внутри U_k выполняется равенство

$$\partial_{x_i} (A^{ij}(x) \partial_{x_j} p_k - B^i p_k + \partial_{x_j} A^{ij} p_k) = 0 \quad (1.19)$$

в слабом смысле. Тот факт, что эти решения неотрицательны, вытекает из слабого принципа максимума [18, теорема 7]. Наш случай соответствует условию $\gamma = b^i = b = 0$ в цитированной теореме (см. также [12, задача 8.1]). Стоит отметить, что существование функций p_k с упомянутыми выше свойствами может быть выведено из разрешимости краевой задачи для гладких коэффициентов. Действительно, найдется последовательность гладких отображений $A_m = (A_m^{ij})_{i,j=1}^n$ на U_{k+1} со значениями в пространстве симметричных линейных операторов на $\mathbb{R}^n$ такая, что A_m равномерно невырождены и сходятся к A по норме соболевского класса $H^{\alpha_{k+1}, 1}(U_{k+1})$. Кроме того, существует последовательность гладких отображений $B_m = (B_m^i)_{i=1}^n$, сходящаяся к B в $L^{\alpha_{k+1}}(U_{k+1}, \mathbb{R}^n)$. Обозначим через f_m решения краевых задач

$$\partial_{x_i} (A_m^{ij}(x) \partial_{x_j} f_m - B_m^i f_m + \partial_{x_j} A_m^{ij} f_m) = 0$$

с граничным условием $f_m = 1$ на границе U_{k+1} . Такие решения существуют согласно [15, теорема 8.3 и замечание в конце §8.2]. В силу неравенства Харнака (см. (1.7)) полученная последовательность решений f_m равномерно ограничена. При этом равномерно ограничены и величины в правой части (1.1), соответствующие коэффициентам A_m и B_m . Значит, ввиду (1.2), последовательность $\{f_m\}$ ограничена и в $H^{\alpha_{k+1}, 1}(U_k)$. Выбрав из $\{f_m\}$ равномерно сходящуюся на U_k подпоследовательность, получим, что ее предел может быть взят в качестве p_k , ибо он удовлетворяет уравнению (1.19) в U_k в слабом смысле. Из наших рассуждений вытекает, что $p_k \in H^{\alpha_{k+1}, 1}(U_k)$. Наконец, отметим, что $\inf_{U_k} p_k > 0$, поскольку $\inf_m \inf_{U_k} f_m > 0$ в силу (1.7).

Умножая решения p_k на положительные числа и полагая $p_k = 0$ вне U_k , получаем вероятностные меры μ_k , удовлетворяющие эллиптическому уравнению $L_{A,B}^* \mu_k = 0$ в U_k . По лемме 1.1 функции p_k , $k \geq m$, равномерно ограничены в $H^{\alpha_m, 1}(U_{m-1})$ и равномерно гёльдеровы. Кроме того, последовательность $\{\mu_k\}$ содержит подпоследовательность $\{\mu_{k_i}\}$,

сходящуюся по вариации к вероятностной мере μ со строго положительной непрерывной плотностью p такой, что $p \in H^{\alpha_{R-1}}(U_{R-1})$ для всех $R > 1$. Следовательно, для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости получаем

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^n} L_{A,B} \varphi(x) p_k(x) dx = \int_{\mathbf{R}^n} L_{A,B} \varphi(x) p(x) dx.$$

Теорема 1.2 доказана.

З а м е ч а н и е 1.2. Ясно, что измеримость по Борелю отображения B можно заменить измеримостью по Лебегу, причем наше решение не зависит от выбора лебеговски эквивалентной версии B . Кроме того, условие $V \in C^2(\mathbf{R}^n)$ можно заменить на локальную ограниченность функции V и локальную интегрируемость ее первых и вторых обобщенных производных. Это вытекает из замечания 1.1(iii).

Следствие 1.3. Предположим, что $A = (A^{ij})$ — непрерывное отображение на $\mathbf{R}^n$ со значениями в пространстве неотрицательных симметричных линейных операторов на $\mathbf{R}^n$ и что существует функция $V \in C^2(\mathbf{R}^n)$ такая, что выполнено (1.18). Тогда:

(i) если B непрерывно, то существует такая вероятностная мера μ , что $L_{A,B}^* \mu = 0$ в смысле (0.3);

(ii) если A невырожденно, а B измеримо и локально ограничено, то существует такая вероятностная мера μ с плотностью класса $L_{\text{loc}}^{n/(n-1)}(\mathbf{R}^n)$, что $L_{A,B}^* \mu = 0$ в смысле (0.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко видеть, что существует последовательность гладких отображений A_k со значениями в пространстве невырожденных неотрицательных симметричных операторов на $\mathbf{R}^n$ такая, что условие (1.6) выполнено с нашей функцией V и отображения A_k сходятся к A равномерно на компактных множествах. Для этого гладкие невырожденные отображения A_k выбираются так, что выполняется оценка

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in U_m \setminus U_{m-1}} |A^{ij}(x) - A_k^{ij}(x)| \\ & \leq k^{-1} \left(\sup_{x \in U_m \setminus U_{m-1}} |\partial_{x_i} \partial_{x_j} V(x)| + 1 \right)^{-1}, \quad \forall m \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Пусть μ_k — вероятностная мера, удовлетворяющая уравнению $L_{A_k, B}^* \mu_k = 0$. Согласно замечанию 1.1, последовательность $\{\mu_k\}$ равномерно плотна. Значит, она содержит подпоследовательность, которая слабо сходится к некоторой вероятностной мере μ на $\mathbf{R}^n$. В случае непрерывного B получаем $L_{A,B}^* \mu = 0$. Докажем утверждение (ii). В силу локальной ограниченности B для каждого шара Ω найдется такое чис-

ло C , что для всех μ_k

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n A^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} \varphi d\mu_k \leq C \sup_{\Omega} |\nabla \varphi|, \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Как следует из доказательства в [9, теорема 2.1(i)], для каждого шара U плотности ρ_k мер μ_k равномерно ограничены по норме $L^{n/(n-1)}(U)$. Из этого вытекает, что мера μ имеет плотность ρ класса $L_{\text{loc}}^{n/(n-1)}(U)$, причем функции ρ_k на U сходятся к функции ρ в слабой топологии пространства $L^{n/(n-1)}(U)$. Для всякой функции $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ в силу равномерной сходимости A_k к A на носителе φ получаем, что $L_{A_k, B} \varphi \rightarrow L_{A, B} \varphi$ равномерно на носителе φ , откуда заключаем, что $L_{A, B}^* \mu = 0$. Следствие 1.3 доказано.

Следствие 1.4. Пусть A — равномерно ограниченное измеримое отображение со значениями в пространстве неотрицательных симметричных операторов на $\mathbb{R}^n$, B — локально ограниченное измеримое отображение, причем

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (B(x), x) = -\infty.$$

Тогда утверждение (i) предыдущего следствия справедливо при условии, что A и B непрерывны, а утверждение (ii) справедливо при условии, что A локально равномерно невырожденно.

Доказательство. Возьмем $V(x) = (x, x)$. В случае непрерывных A и B применимо предыдущее следствие. Заметим, что существует последовательность гладких отображений A_k со значениями в пространстве неотрицательных симметричных операторов на $\mathbb{R}^n$ такая, что $A_k(x) \rightarrow A(x)$ почти всюду,

$$\sup_{x, k} \|A_k(x)\| < \infty \quad \text{и} \quad A_k(x) \geq \alpha_R I \quad \text{при} \quad |x| \leq R$$

для всех k и $R > 0$, где $\alpha_R > 0$. Тогда $\sup_{k, x} \sum_{i, j \leq n} A_k^{ij}(x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} V(x) < \infty$. Согласно предыдущему следствию, существуют вероятностные меры μ_k с плотностями ρ_k , для которых $L_{A_k, B}^* \mu_k = 0$. Поскольку выполнено условие (1.6), то в силу замечания 1.1 последовательность $\{\mu_k\}$ равномерно плотна. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\{\mu_k\}$ слабо сходится к некоторой вероятностной мере μ . Ввиду равномерной ограниченности отображений A_k и их локально равномерной невырожденности, в силу тех же рассуждений, что и в предыдущем следствии, мера μ обладает плотностью ρ , причем на каждом шаре U последовательность $\{\rho_k\}$ сходится к ρ в слабой топологии пространства $L^{n/(n-1)}(U)$. Поскольку функции A_k^{ij} равномерно ограничены и сходятся почти всюду к A^{ij} , то получаем равенство $L_{A, B}^* \mu = 0$. Следствие 1.4 доказано.

Например, теорема 1.2 применима также в ситуации, когда $A = I$ и $B(x) = -k(x)x$, где $k \in L_{\text{loc}}^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ — такая функция, что

$$k(x)|x|^2 \rightarrow +\infty \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty.$$

Более общим образом, если $A = I$, то достаточно иметь более слабую оценку

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} (x, x)^{\gamma-1} [2(\gamma-1) + n + (B(x), x)] = -\infty$$

для некоторого $\gamma \geq 1$ (тогда можно использовать функцию $V(x) = (x, x)^{\gamma}$). Из доказательства ясно, что условие равномерной ограниченности A в следствии 1.4 можно существенно ослабить в терминах убывания $(B(x), x)$.

Другой пример, охватываемый теоремой 1.2, таков: $A = I$ и для некоторого $\gamma \geq 1$ имеем $(B(x), x) \leq -r < -n + 2 - 2\gamma$ вне некоторого шара (разумеется, мы предполагаем, что функция $|B|$ локально интегрируема в степени выше n). Тогда можно взять функцию $V(x) = (x, x)^{\gamma}$. Такое же условие коэрцитивности предполагалось в [5] для локально ограниченного B (чтобы получить уравнение из [5], следует взять $A = I/2$ в нашем случае). Заметим, что в [5] к этому случаю сводился более общий случай (также охватываемый следствиями 1.3 и 1.4), когда диффузионный член непрерывен, невырожден и удовлетворяет некоторым равномерным оценкам, при условии, что снос локально ограничен и коэрцитивен и что соответствующее стохастическое дифференциальное уравнение имеет единственное слабое решение.

З а м е ч а н и е 1.3. (i) Пусть μ — вероятностная мера, построенная в теореме 1.2. С использованием результатов [19] в работе [20] (см. [20, теорема 2.12, предложение 2.9]) было показано, что замыкание $L_{A,B}$ в $L^1(\mu)$ порождает сильно непрерывную полугруппу $(T_t^{\mu})_{t \geq 0}$ на $L^1(\mu)$, причем μ инвариантна для $(T_t^{\mu})_{t \geq 0}$ в обычном смысле, т.е.

$$\int_{\mathbb{R}^n} T_t f d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu, \quad \forall f \in L^1(\mu).$$

Кроме того, существует марковский процесс, ассоциированный (в некотором смысле) с этой полугруппой (см. [19]). Однако в случае локально неограниченного сноса такой процесс может быть определен не для всякой начальной точки (см. [21] о связях между марковскими полугруппами и диффузиями). Таким образом, в нашем случае существование инвариантной вероятности дает существование соответствующего диффузионного процесса в отличие от [3] и [4]–[6], где в случае невырожденного непрерывного диффузионного члена и локально ограниченного сноса существование и единственность процесса в классическом смысле предполагались заранее. Отметим, что в [2], [4]–[6] неравенство Харнака использовалось для параболических уравнений. Уместно отметить,

что, согласно [19], и без условия существования функции Ляпунова для всякой вероятностной меры μ , удовлетворяющей уравнению $L_{A,B}^* \mu = 0$ в слабом смысле, $L_{A,B}$ имеет расширение, которое порождает сильно непрерывную полугруппу $(T_t)_{t \geq 0}$ на $L^1(\mu)$ с генератором G , равным $L_{A,B}$ на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, причем μ является субинвариантной мерой для этой полугруппы, т.е.

$$\int_{\mathbb{R}^n} T_t f(x) \mu(dx) \leq \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mu(dx)$$

для всех неотрицательных ограниченных измеримых функций f (ср. [19, теорема 1.5a]). Однако в общем случае, как показано в [19, пример 1.12], мера μ может не быть инвариантной для $(T_t)_{t \geq 0}$. Таким образом, наши слабые решения уравнения (0.1) оказываются более общим объектом, чем инвариантные меры в классическом смысле, но это различие не проявляется при сделанном нами предположении о существовании функций Ляпунова.

(ii) В [20, следствие 3.3] показано, что в ситуации теоремы 1.2 существует лишь одна вероятностная мера μ , для которой $L_{A,B}^* \mu = 0$. Если $\alpha_R > n + 2$, то, согласно [9, следствие 4.3], μ — единственная инвариантная вероятность упомянутой выше полугруппы $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$. Если A бесконечно дифференцируемо, то это же верно без предположения $\alpha_R > n + 2$, что можно показать с помощью рассуждений, доказывающих теорему 1.3(iv) в [10].

Если стохастическое уравнение записывать в форме

$$d\xi_t = A(\xi_t) dw_t + B(\xi_t) dt,$$

где отображение A принимает значения в пространстве положительно определенных операторов, то соответствующий эллиптический оператор приобретает вид

$$Lf(x) = \frac{1}{2} \operatorname{trace} (A^2(x) f''(x)) + (\nabla f, B).$$

Благодаря условиям дифференцируемости, наложенным на A , этот оператор можно записать в форме Хермандера

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n X_j^2 + X_0, \quad (1.20)$$

где $X_0, X_1, \dots, X_n$ — векторные поля, $|X_0|$ локально интегрируемо в степени выше n , а $X_j, j \geq 1$, входят в класс Соболева $H_{\text{loc}}^{\alpha,1}$ с $\alpha > n$. Однако наш оператор (0.2) также может быть записан в форме Хермандера (1.20) с условиями того же типа на X_j . Для этой цели достаточно показать, что если $A = (A^{ij})$ — отображение со значениями в пространстве симметричных положительно определенных операторов, причем A локально равномерно невырожденно и $A^{ij} \in H_{\text{loc}}^{\alpha,1}(\mathbb{R}^n)$, где

$\alpha > n$, то $\sqrt{A} = (C^{ij})$ является отображением того же типа. Действительно, $\sqrt{A}$ локально равномерно невырожденно. Проверим, что $C^{ij} \in H_{\text{loc}}^{\alpha,1}(\mathbb{R}^n)$. В силу теоремы вложения Соболева отображение A обладает непрерывной версией, с которой мы и будем работать дальше. Поскольку свойство, которое нужно проверить, носит локальный характер, можно считать (поделив на положительную постоянную), что норма A принадлежит промежутку $[c, 1]$, где $c > 0$. Напомним, что $\sqrt{A}$ можно получить в виде суммы ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (I - A)^n$, абсолютно сходящегося по норме, где коэффициенты c_n даны абсолютно сходящимся разложением $\sqrt{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $z \in [0, 1]$, т.е. $c_n = (n!)^{-1} (\sqrt{1 - z})^{(n)}|_{z=0}$. Заметим, что если T — матричнозначное отображение с компонентами из $H^{\alpha,1}(U_R)$, то $\partial_{x_i} T^n$ является суммой произведений $T^k (\partial_{x_i} T) T^{n-k-1}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Таким образом, $\|\partial_{x_i} T^n\| \leq n \|T\|^{n-1} \|\partial_{x_i} T\|$. Полагая $T = I - A$ и используя условие $\|I - A\| \leq 1 - c$, заключаем, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \|c_n \partial_{x_i} (I - A)^n\|$ сходится в $L^\alpha(U_R)$, откуда вытекает наше утверждение.

2. Инвариантные меры на многообразиях. Как уже мог заметить читатель, наши предыдущие результаты распространяются с теми же самыми доказательствами и на случай конечномерного гладкого многообразия M . В этом случае уравнение $L^* \mu = 0$ понимается по-прежнему в слабом смысле

$$\int L\varphi d\mu = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(M), \quad (2.1)$$

при условии, что μ — локально конечная борелевская мера на M и L — эллиптический дифференциальный оператор такой, что $L\varphi \in L^1(\mu)$ при всех $\varphi \in C_0^\infty(M)$. Относительно диффузионных процессов на гладких многообразиях, порожденных эллиптическими операторами второго порядка, мы отсылаем к [22]–[26].

Приведем обобщения результатов, полученных в предыдущем пункте, на случай многообразия. Начнем с соответствующего аналога леммы 1.1, скомбинированной с ее следствием. В этом пункте M — связное n -мерное гладкое многообразие без края.

Лемма 2.1. Пусть $\{\mu_k\}$ — последовательность вероятностных мер на M таких, что

$$L_k^* \mu_k = 0,$$

в смысле (2.1), где операторы L_k имеют в локальных координатах такой же вид, как L_{A_k, B_k} в лемме 1.1, и удовлетворяют равномерным локальным оценкам (1.3) и (1.4) для каждого множества U_R , имеющего компактное замыкание в локальной карте. Предположим, что существуют последовательность открытых множеств $U_j \subset M$ с компактными замыканиями $\bar{U}_j \subset U_{j+1}$ и $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$, а также неотрица-

тельная функция $V \in C^2(M)$ такие, что

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \inf_{x \notin U_j} V(x) &= +\infty, \\ \lim_{j \rightarrow \infty} \sup_k \sup_{x \notin U_j} L_k V(x) &= -\infty. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Тогда: (i) меры μ_k обладают непрерывными плотностями p_k относительно фиксированного римановского объема на M , причем для всякой достаточно малой координатной окрестности W функции $p_k|_W$ равномерно ограничены, равномерно гёльдеровы и равномерно ограничены в пространстве Соболева $H^{\alpha_W, 1}(W)$ при некотором $\alpha_W > n$;

(ii) последовательность $\{\mu_k\}$ относительно компактна по вариации;

(iii) $\inf_k \inf_{x \in V} p_k(x) > 0$ для всякой достаточно малой координатной окрестности W .

Далее, утверждения (i)–(iii) остаются справедливыми, если для всякого k мера μ_k обращается в нуль вне U_k и удовлетворяет уравнению $L_k^* \mu_k = 0$ лишь в U_k .

Доказательство. Все эти утверждения доказываются теми же рассуждениями, что и в случае $\mathbf{R}^n$; единственное отличие состоит в том, что вместо шаров U_k рассматриваются открытые множества U_k с компактными замыканиями. Соотношение (1.10) имеет смысл и справедливо в локальных координатах, что достаточно для последующих оценок, которые вовлекают лишь $L_k V$, $L_k(\psi_j \circ V)$ и V и потому записываются без ссылки на локальные координаты. Следует подчеркнуть, что если записывать операторы L_k в форме Хермандера (1.20), то соотношение (1.10) приобретает следующий бескоординатный вид:

$$L_k(\psi_j \circ V) = \psi_j'(V) L_k V + \psi_j''(V) \sum_{i=1}^n (\partial_{X_i} V)^2.$$

Ясно, что правая часть оценивается через $\psi_j'(V) L_k V$. Теперь рассуждения, следующие за (1.10), могут быть применены к предыдущему соотношению. Лемма 2.1 доказана.

З а м е ч а н и е 2.1. Отметим, что если M наделено римановой метрикой и λ — соответствующий римановский объем, то $\mu_k = \varrho_k \cdot \lambda$, где функции ϱ_k равномерно гёльдеровы на каждой области U с компактным замыканием в M и, кроме того, последовательность $\{\varrho_k\}$ равномерно ограничена в пространстве Соболева $H^{\alpha, 1}(U)$ для некоторого $\alpha = \alpha(U) > n$. Другими словами, имеет место такая же картина, как и в плоском случае.

Теорема 2.1. Пусть M есть n -мерное связное гладкое многообразие и L — эллиптический оператор второго порядка на M , который

в локальных координатах имеет вид, указанный в теореме 1.2, включая выполнение аналогичных условий локальной интегрируемости, т.е. всякая точка x обладает такой окрестностью U , что в локальных координатах имеем (1.3) и (1.4), где U_R , α_R , β_R и γ_R заменяются соответственно на U , $\alpha_U > n$, $\beta_U > 0$ и $\gamma_U > 0$. Предположим, что существуют последовательность открытых множеств $U_j \subset M$ с компактными замыканиями $\bar{U}_j \subset U_{j+1}$ и $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$, а также неотрицательная функция $V \in C^2(M)$ такие, что

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \inf_{x \notin U_j} V(x) = +\infty \quad \text{и} \quad \limsup_{j \rightarrow \infty} \sup_{x \notin U_j} LV(x) = -\infty. \quad (2.3)$$

Тогда существует такая борелевская вероятностная мера μ на M , что $L^*\mu = 0$. Кроме того, во всякой достаточно малой окрестности W в локальных координатах μ обладает непрерывной строго положительной плотностью класса $H^{\alpha_W, 1}(W)$ с $\alpha_W > n$.

Доказательство. Проходит то же доказательство, что и в теореме 1.2, ввиду того факта, что результаты о локальной регулярности из [8], [9], [12] и [18], на которых основаны наши рассуждения, автоматически переносятся на случай многообразия. Чтобы применить результат о существовании решений краевых задач для относительно компактных областей в M , следует выбрать открытые множества $D_j \subset M$ с гладкими границами так, что $\bar{U}_j \subset D_j \subset \bar{D}_j \subset D_{j+1} \subset U_{j+1}$ (это необходимо для того, чтобы найти решения с граничным условием 1 на ∂D_j). Ясно, что это возможно, поскольку U_j покрывается конечным числом замкнутых областей $W_i \subset U_{j+1}$, $i = 1, \dots, d$, которые диффеоморфны замкнутым шарам в $\mathbb{R}^n$. Используя гладкое разбиение единицы и стандартное сглаживание (см., например, [27] и [25]), можно заключить $\bigcup_{i=1}^d W_i$ в область, которая имеет гладкую границу и компактное замыкание в U_{j+1} .

Существование вероятностных мер μ_k , удовлетворяющих уравнению $L^*\mu_k = 0$ в D_k , доказывается аналогично плоскому случаю. А именно, при фиксированном k приблизим L эллиптическими операторами L_m с гладкими коэффициентами таким образом, что в конечном числе карт, покрывающих $\bar{D}_{k+1}$, коэффициенты второго порядка операторов L_m невырождены и сходятся к коэффициентам второго порядка оператора L по соответствующим $H^{\alpha, 1}$ -нормам, а коэффициенты первого порядка операторов L_m сходятся к коэффициентам первого порядка оператора L по L^α -норме, где $\alpha > n$. Можно считать, что M наделено римановой метрикой. Пусть λ — соответствующий риманов объем. Обозначим через $\hat{L}_m$ оператор, формально сопряженный к L_m в $L^2(\lambda)$. Тогда $\hat{L}_m$ — такой эллиптический оператор второго порядка, что

$$\int_M \varphi L_m \psi \, d\lambda = \int_M \psi \hat{L}_m \varphi \, d\lambda$$

для всех гладких функций φ и ψ с компактными носителями. Кроме того, части второго порядка оператора $\hat{L}_m$ невырожденных в локальных координатах. Краевая задача на D_{k+1}

$$\hat{L}_m f = 0, \quad f|_{\partial D_{k+1}} = 1, \quad (2.4)$$

имеет гладкое решение f_m (заметим, что множество ∂D_{k+1} непусто, поскольку M связно). В самом деле, как показано в [28, раздел 3.1.1] (в частности, см. [28, 3.1.1, замечание 8]), оператор L_m между подходящим образом выбранными соболевскими пространствами является фредгольмовым с нулевым индексом. Краевая задача $\hat{L}_m f = 0$, $f|_{\partial D_{k+1}} = 0$, имеет лишь тривиальное решение. Это вытекает из слабого принципа максимума, который справедлив в силу тех же рассуждений, что и в плоском случае в [18] (отметим, что в локальных координатах оператор $\hat{L}_m$ имеет вид (1.19) ввиду гладкости и положительности плотностей меры λ относительно соответствующих мер Лебега). Следовательно, для всякой гладкой функции g на M краевая задача $\hat{L}_m f = g$, $f|_{\partial D_{k+1}} = 0$, разрешима, откуда следует разрешимость задачи (2.4). Применяя оценку (1.7), которая распространяется и на случай многообразия, заключаем, как и в плоском случае, что $\inf_m \inf_{U_k} f_m > 0$. По аналогии со случаем $\mathbb{R}^n$ получаем p_k в виде равномерного предела на D_k подпоследовательности из $\{f_m\}$. Поскольку функция f_m — гладкая, получаем для каждого $\varphi \in C_0^\infty(D_k)$ равенство

$$\int_M L_m \varphi f_m d\lambda = \int_M \varphi \hat{L}_m f_m d\lambda,$$

т.е. мера $\nu_m := f_m \cdot \lambda$ на D_k удовлетворяет эллиптическому уравнению $L_m^* \nu_m = 0$ в слабом смысле. Теперь положим $p_k = 0$ вне D_k и возьмем вероятностные меры $\mu_k = c_k p_k \cdot \lambda$ с подходящими постоянными c_k . Теорема 2.1 доказана.

З а м е ч а н и е 2.2. Для многообразий справедлив аналог следствия 1.3.

Отметим, что если M не связно, то доказанная выше теорема применима к его связным компонентам.

Ясно, что условие теоремы 2.1 показывает, что M не компактно (иначе функция V была бы ограниченной). Для компактных многообразий положение проще.

Теорема 2.2. Пусть M — компактное n -мерное гладкое многообразие и L — эллиптический оператор второго порядка на M , который в локальных координатах имеет член второго порядка $A = (A^{ij})$ и член первого порядка $B = (B^i)$, причем A локально равномерно невырожденно, $A^{ij} \in H_{\text{loc}}^{\alpha,1}$ и $B^i \in L_{\text{loc}}^\alpha$, где $\alpha > n$. Тогда существует такая борелевская вероятностная мера μ на M , что $L^* \mu = 0$. Кроме того, в

локальных координатах μ задается плотностью класса $H^{\alpha,1}$, которая непрерывна и строго положительна.

Доказательство. Достаточно приблизить L последовательностью эллиптических операторов L_k таким образом, что соответствующие операторы $A_k = (A_k^{ij})$ равномерно невырождены, $A_k^{ij} \rightarrow A^{ij}$ по соболевской норме и $B_k^i \rightarrow B^i$ в L^α (отметим, что ввиду компактности M мы в действительности имеем дело с конечным набором карт). Для всякого k существует вероятностная мера μ_k на M с гладкой плотностью p_k в локальных координатах такая, что $L_k^* \mu_k = 0$ (см. [24, предложение V.4.5]). Тогда в силу того же рассуждения, что и в плоском случае, последовательность $\{p_k\}$ ограничена в $H^{\alpha,1}(M)$. Следовательно, она содержит подпоследовательность, слабо сходящуюся в $H^{\alpha,1}(M)$ к некоторой вероятностной плотности $p \in H^{\alpha,1}(M)$. Ясно, что $L^* \mu = 0$. Теорема 2.2 доказана.

Отметим, что если M — риманово многообразие размерности n и L имеет вид (1.20) с некоторыми векторными полями $X_0, \dots, X_n$, то локальные условия в теореме 2.1 можно записать без ссылок на локальные координаты. А именно, требуется, чтобы поле X_0 входило в $L_{\text{loc}}^\alpha(\lambda, TM)$, а поля $X_j, j = 1, \dots, n$, были элементами класса $H_{\text{loc}}^{\alpha,1}(M, TM)$, где $\alpha > n$, λ — риманов объем, а TM — касательное расслоение.

З а м е ч а н и е 2.3. Как отмечено В. Штаннатом, аналогично замечанию 1.3, если μ — вероятностная мера, построенная в теореме 2.1, то, обобщая результаты работ [19], [20] на случай многообразия, получаем, что замыкание L в $L^1(\mu)$ порождает сильно непрерывную полугруппу $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$ в $L^1(\mu)$ такую, что мера μ инвариантна для $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$ в обычном смысле и, кроме того, существует марковский процесс, ассоциированный с этой полугруппой.

В некоторых случаях, имея дело с римановым многообразием, можно в качестве функции Ляпунова V использовать функцию $r(x) = (d(x, a))^k$, где a — фиксированная точка и d — расстояние в M (см., например, [23, гл. IX, §6]). Однако в общем случае множества $\{r \leq c\}$ могут не быть компактными для такой функции. Кроме того, r может не быть дифференцируемой всюду. Если M имеет кривизну Риччи, ограниченную снизу, то последняя трудность преодолевается рассмотрением r вне ее точек сингулярности (см. [23, гл. IX, §6], [26], [29], где близкие идеи использовались при изучении отсутствия взрыва и рекуррентности диффузий на многообразиях). В частности, достаточное условие существования решения нашего уравнения состоит в соотношении $\limsup_{r \rightarrow \infty} r^p Lr < 0$ для некоторого $p > 0$ (тогда может быть использована функция $V = r^{2p+2}$). Если $L = \Delta + X_0$, где Δ — оператор Лапласа–Бельтрами на M , то в качестве некоторого аналога следствия 1.4 можно использовать следующее условие: $\lim_{r \rightarrow \infty} \partial_{X_0} r = -\infty$. Действительно, поскольку M имеет

ограниченную снизу кривизну Риччи, то функция Δt ограничена сверху (в смысле обобщенных функций) в силу результата Яу. Эти вопросы исследованы в работах [32], [33]. Бесконечномерные обобщения рассмотрены в [30]–[33].

З а м е ч а н и е 2.4. Относительно других условий существования инвариантных мер (также и в бесконечномерном случае) см., например, [34]–[37]. Мы отсылаем также к монографии [38] и приведенным в ней ссылкам.

Мы благодарим А. Ю. Веретенникова, Н. В. Крылова и В. Штанната за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хасьминский Р. З. Эргодические свойства возвратных диффузионных процессов и стабилизация решений задачи Коши для параболических уравнений. — Теория вероятн. и ее примен., 1960, т. V, в. 2, с. 196–214.
2. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969, 368 с.
3. Скороход А. В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. Киев: Наукова думка, 1987.
4. Веретенников А. Ю. Оценки скорости перемешивания в теории стохастических уравнений. — Теория вероятн. и ее примен., 1987, т. XXII, в. 2, с. 273–281.
5. Veretennikov A. Yu. On polynomial mixing bounds for stochastic differential equations. — Stochastic Process. Appl., 1997, v. 70, p. 115–127.
6. Веретенников А. Ю. О полиномиальном перемешивании и скорости сходимости для стохастических дифференциальных и разностных уравнений. — Теория вероятн. и ее примен., 1999, т. 44, в. 2, с. 313–327.
7. Bensoussan A. Perturbation Methods in Optimal Control. New York/Paris: Wiley/Gauthier-Villars, 1988, 573 p.
8. Bogachev V. I., Krylov N. V., Röckner M. Elliptic regularity and essential self-adjointness of Dirichlet operators. — Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 1997, v. 24, № 3, p. 451–461.
9. Bogachev V. I., Krylov N. V., Röckner M. On regularity of transition probabilities and invariant measures of singular diffusions under minimal conditions. Preprint SFB 343 № 99-141. Bielefeld: Univ. Bielefeld, 1999.
10. Albeverio S., Bogachev V., Röckner M. On uniqueness of invariant measures for finite and infinite dimensional diffusions. — Comm. Pure Appl. Math., 1999, v. 52, p. 325–362.
11. Morrey C. B. Jr. Multiple Integrals in the Calculus of Variations. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1966, 506 p.
12. Trudinger N. S. Linear elliptic operators with measurable coefficients. — Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Sci. Fis. Mat. (3), 1973, v. 27, № 3, p. 265–308.
13. Stampacchia G. Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. Montréal: Les Presses de l'Université de Montréal, 1966.
14. Hervé R. M., Hervé M. Les fonctions surharmoniques associées à un opérateur elliptique du second ordre à coefficients discontinus. — Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 1968, v. 19, p. 305–359.
15. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989, 464 с.
16. Ладыженская О. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
17. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 352 с.

18. *Trudinger N. S.* Maximum principles for linear, non-uniformly elliptic operators with measurable coefficients. — *Math. Z.*, 1977, v. 156, p. 291–301.
19. *Stannat W.* (Nonsymmetric) Dirichlet operators on L^1 : existence, uniqueness and associated Markov processes. — *Ann. Scuola Norm. Sup. Cl. Sci.* (4), 1999, v. 28, № 1, p. 99–144.
20. *Bogachev V. I., Röckner M., Stannat W.* Uniqueness of invariant measures and maximal dissipativity of diffusion operators on L^1 . Preprint SFB 343 № 99-119. Bielefeld: Bielefeld Univ., 1999.
21. *Ma Z.-M., Röckner M.* Introduction to the theory of (non-symmetric) Dirichlet forms. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1992, 209 p.
22. *Azencott R.* Behavior of diffusion semi-groups at infinity. — *Bull. Soc. Math. France*, 1974, v. 102, p. 193–240.
23. *Elworthy D.* Stochastic differential equations on manifolds. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1982, 326 p.
24. *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Мир, 1986, 446 с.
25. *Молчанов С. А.* Сильное феллеровское свойство диффузионных процессов на гладких многообразиях. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1968, т. XIII, в. 3, с. 493–498.
26. *Varopoulos N. T.* Potential theory and diffusion on Riemannian manifolds. — Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund (Chicago, 1981). V. II. Pacific Grove, CA: Wadsworth, 1983, p. 821–837.
27. *Хирш М.* Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979, 280 с.
28. *Ремпель Ш., Шульце Б.-В.* Теория индекса эллиптических краевых задач. М.: Мир, 1986, 576 с.
29. *Yau S.-T.* On the heat kernel of a complete Riemannian manifold. — *J. Math. Pures Appl.*, 1978, v. 57, p. 191–201.
30. *Bogachev V. I., Röckner M.* Elliptic equations for infinite dimensional probability distributions and Lyapunov functions. — *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.*, 1999, t. 329, p. 705–710.
31. *Bogachev V. I., Röckner M.* Elliptic equations for measures on infinite dimensional spaces and applications. Preprint SFB 343 № 99-142. Bielefeld: Univ. Bielefeld, 1999. Probab. Theory Relat. Fields (to appear).
32. *Bogachev V. I., Röckner M., Wang F.-Y.* Elliptic equations for invariant measures on Riemannian manifolds: regularity and existence results. Preprint SFB 343 № 99-089, Bielefeld: Univ. Bielefeld, 1999; *C. R. Acad. Sci. Paris* (to appear).
33. *Bogachev V. I., Röckner M., Wang F.-Y.* Elliptic equations for invariant measures on manifolds and applications to Gibbs distributions. Preprint SFB 343, Bielefeld: Univ. Bielefeld, 2000.
34. *Bogachev V. I., Röckner M.* Regularity of invariant measures on finite and infinite dimensional spaces and applications. — *J. Funct. Anal.*, 1995, v. 133, p. 168–223.
35. *Bogachev V. I., Röckner M., Zhang T. S.* Existence and uniqueness of invariant measures: an approach via sectorial forms. — *Appl. Math. Optim.*, 2000, v. 41, p. 87–109.
36. *Leha G., Ritter G., Wakolbinger A.* An improved Lyapunov-function approach to the behavior of diffusion processes in Hilbert spaces. — *Stochastic Anal. Appl.*, 1997, v. 15, № 1, p. 59–89.
37. *Shigekawa I.* Existence of invariant measures of diffusions on an abstract Wiener space. — *Osaka J. Math.*, 1987, v. 24, № 1, p. 37–59.
38. *Da Prato G., Zabczyk J.* Ergodicity for infinite dimensional systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996, 339 p.

Поступила в редакцию
5.VIII.1998