Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Боровков, Д. А. Коршунов, Вероятности больших уклонений одномерных цепей Маркова. Часть 2. Достац-ионарные распределения в экспоненциальном случае, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, том 45, выпуск 3, 437–468

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp479>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 18:13:06

© 2000 г.

БОРОВКОВ А. А.*, КОРШУНОВ Д. А.*

ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ
ОДНОМЕРНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА.
ЧАСТЬ 2. ДОСТАЦИОНАРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
В ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМ СЛУЧАЕ¹⁾

Работа является продолжением статьи [5]. Рассматривается однородная во времени и асимптотически однородная в пространстве цепь Маркова $\{X(n)\}$ со значениями на вещественной прямой и со скачками, обладающими некоторым экспоненциальным моментом. Изучается асимптотическое поведение вероятности $P\{X(n) \geq x\}$ при $x \rightarrow \infty$ как при фиксированных, так и при растущих значениях времени n . В частности, выделяются зоны значений времени n , в которых эта вероятность асимптотически эквивалентна хвосту стационарного распределения $\pi(x)$ (последнее весьма полно изучено в [5], [12, § 27]).

Ключевые слова и фразы: цепь Маркова, грубая и точная асимптотики вероятностей больших уклонений, переходные явления, инвариантная мера.

§ 1. Введение

Пусть $X(n) = X(y, n) \in \mathbf{R}$, $n = 0, 1, \dots$, — однородная во времени цепь Маркова со значениями на вещественной прямой $\mathbf{R}$ и с начальным значением $y \equiv X(y, 0)$. Переходную вероятность цепи обозначим $P\{y, B\} = P\{X(y, 1) \in B\}$, где B — борелевское множество в $\mathbf{R}$.

Пусть $\xi(y)$ — приращение за один шаг цепи X в точке $y \in \mathbf{R}$, т.е. $\xi(y) = X(y, 1) - y$. В настоящей работе изучается *асимптотически однородная (в пространстве) цепь*, т.е. цепь, для которой распределение $\xi(y)$ слабо сходится при $y \rightarrow \infty$ к распределению F некоторой случайной величины ξ . Всюду предполагается, что $m = E\xi < 0$ (значение $m = -\infty$ из рассмотрения не исключается) и $P\{\xi > 0\} > 0$.

Преобразование Лапласа $\varphi(\lambda) \equiv Ee^{\lambda\xi}$ случайной величины ξ есть функция выпуклая, поэтому множество $\{\lambda: \varphi(\lambda) \leq 1\}$ представляет собой

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, просп. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: borovkov@math.nsc.ru, korschuno@math.nsc.ru

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке грантами Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-01-01939), CRDF Cooperative Grants Program (Award # RM1-226) и INTAS (Project № 93-10820).

отрезок вида $[0, \beta]$, где $\beta = \sup\{\lambda: \varphi(\lambda) \leq 1\}$. Поскольку $P\{\xi > 0\} > 0$, число β конечно. Возможны три случая:

- (а) $\beta > 0$, $\varphi(\beta) = 1$ — этот случай назовем *крамеровским*;
- (б) $\beta > 0$, $\varphi(\beta) < 1$ — этот случай назовем *промежуточным*;
- (в) $\beta = 0$ — к этому случаю относятся, в частности, распределения с правильно меняющимися на бесконечности хвостами.

В первой части работы предполагалось, что цепь X обладает инвариантной мерой π , т.е. мерой, доставляющей решение уравнению

$$\pi(\cdot) = \int_{\mathbf{R}} \pi(dy) P(y, \cdot), \quad \pi(\mathbf{R}) = 1. \quad (1.1)$$

Весьма полно была изучена асимптотика $\pi(x) = \pi([x, \infty))$ при $x \rightarrow \infty$ во всех трех случаях (а), (б) и (в). При этом рассматривался в основном случай асимптотически однородной цепи.

Во второй (настоящей) части работы изучается асимптотическое поведение $\pi_n(x) = P\{X(n) \geq x\}$ при $x \rightarrow \infty$ в крамеровском и промежуточном случаях. При этом нас будут интересовать как фиксированные значения временного параметра n , так и случай неограниченно возрастающего n . Случай $\beta = 0$ будет рассмотрен в третьей части работы.

Пусть $\{\xi_n\}$ — набор независимых копий величины ξ . Следуя [5], цепь Маркова X в $\mathbf{R}^+ = [0, \infty)$, определяемую соотношениями

$$X(n+1) = (X(n) + \xi_n)^+,$$

мы будем называть *однородной в пространстве*.

Положим $S_0 = 0$, $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$ и $M_n = \max_{0 \leq k \leq n} S_k$. Хорошо известно (см., например, [10, гл. VI, § 9]), что распределение однородной цепи $X(0, n)$ совпадает с распределением M_n , т.е. для любого x

$$P\{X(0, n) \geq 0\} = P\{M_n \geq x\}. \quad (1.2)$$

Следуя [5], будем говорить, что цепь X является *N -частично однородной в пространстве* (или просто *частично однородной*), если для любого борелевского множества $B \subseteq (N, \infty)$ переходная вероятность $P(y, B)$ совпадает с вероятностью $P\{y + \xi \in B\}$, когда y пробегает множество (N, ∞) . Другими словами, в области (N, ∞) поведение цепи X совпадает с процессом суммирования независимых случайных величин, имеющих общее распределение F . Очевидно, что однородная цепь является 0-частично однородной.

В § 2 приводятся необходимые нам уточнения известных теорем о вероятностях больших отклонений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин при условии существования у них показательных моментов.

В § 3 формулируется и доказывается грубая теорема о вероятностях больших отклонений в крамеровском случае для асимптотически однородной цепи.

В § 4 исследуются цепи также в крамеровском случае, но класс рассматриваемых цепей сужается (по сравнению с § 3 и [5]) до частично однородных в пространстве цепей, удовлетворяющих условию Харриса. Для таких цепей удается описать асимптотику вероятности $\pi_n(x)$ для широкого спектра растущих значений n . В частности, найдена зона значений времени n , в которой вероятность $\pi_n(x)$ эквивалентна хвосту $\pi(x)$ инвариантного распределения π .

В § 5 исследуется асимптотически однородная цепь в промежуточном случае. При широких условиях на начальное распределение π_0 доказывается, что $\pi_n(x) \sim \pi(x)^2$ при любой скорости сходимости n и x к бесконечности. Кроме того, приводится существенное обобщение теоремы 5 из [5] о вероятностях больших отклонений стационарного распределения π .

§ 2. Вероятности больших отклонений сумм случайных величин

2.1. Функция отклонений. В настоящем пункте напомним понятие функции отклонений, а также некоторые ее свойства (см., например, § 8, гл. 8 в [2] или § 1, раздел 7 в [6]). Нам понадобятся следующие обозначения: $m = E\xi$, $\varphi(\lambda) = Ee^{\lambda\xi}$, $\lambda_+ = \sup\{\lambda: \varphi(\lambda) < \infty\}$ (здесь и всюду далее предполагаем, что $\lambda_+ > 0$),

$$\alpha_+ = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_+} \frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)} = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_+} \frac{d \ln \varphi(\lambda)}{d\lambda}.$$

Если случайная величина ξ ограничена сверху, то $\lambda_+ = \infty$ и α_+ совпадает с существенным супремумом множества значений ξ , т.е. с $\sup\{x: F(x) < 1\}$. Если случайная величина ξ не ограничена сверху и $\lambda_+ = \infty$, то $\alpha_+ = \infty$. Если же случайная величина ξ не ограничена сверху и λ_+ конечно, то α_+ может принимать *a priori* любое значение из интервала $(m, \infty]$, в том числе и отрицательное.

Хорошо известно (см., например, [10, гл. XVI, § 7]), что функция $\ln \varphi(\lambda)$ строго выпуклая. Поэтому для $\alpha \in [m, \alpha_+)$ максимум по λ разности $\alpha\lambda - \ln \varphi(\lambda)$ достигается в той единственной точке $\lambda(\alpha)$, в которой касательная к функции $\ln \varphi(\lambda)$ параллельна прямой $\alpha\lambda$, т.е. в которой $d \ln \varphi(\lambda)/d\lambda = \alpha$. Функция $\lambda(\alpha)$ возрастает; $\lambda(m) = 0$. Функция

$$\Lambda(\alpha) \equiv \sup_{\lambda} \{\alpha\lambda - \ln \varphi(\lambda)\} = \alpha\lambda(\alpha) - \ln \varphi(\lambda(\alpha)), \quad \alpha \in [m, \alpha_+), \quad (2.1)$$

²⁾ Мы пишем $a_n(x) \sim b_n(x)$ при $n, x \rightarrow \infty$, если $\lim_{n, x \rightarrow \infty} a_n(x)/b_n(x) = 1$.

называется *функцией уклонений*. Дифференцирование последнего равенства приводит к соотношению $\Lambda'(\alpha) = \lambda(\alpha)$; следовательно, функция Λ строго выпуклая. Имеем $\Lambda(m) = \Lambda'(m) = 0$.

В случае, когда $\alpha_+ < \infty$ и $\lambda_+ < \infty$, доопределим функцию $\Lambda(\alpha)$ при $\alpha \geq \alpha_+$ линейным образом: $\Lambda(\alpha) = \Lambda(\alpha_+ - 0) + (\alpha - \alpha_+)\lambda_+$, положив при этом $\lambda(\alpha) = \lambda(\alpha_+ - 0)$. Если $\alpha_+ < \infty$ и $\lambda_+ = \infty$, т.е. если случайная величина ξ ограничена сверху (с необходимостью числом α_+), положим $\Lambda(\alpha_+) = -\ln \mathbf{P}\{\xi = \alpha_+\}$ и $\Lambda(\alpha) = \infty$ при $\alpha > \alpha_+$ в случае $\mathbf{P}\{\xi = \alpha_+\} > 0$; $\Lambda(\alpha) = \infty$ при $\alpha \geq \alpha_+$ в случае $\mathbf{P}\{\xi = \alpha_+\} = 0$. Отметим, что к таким значениям функции уклонений при $\alpha > \alpha_+$ приводит формальный поиск супремума в (2.1).

Если случайная величина ξ неограничена сверху, то функция $\Lambda(\alpha)$ конечна и непрерывно дифференцируема при всех $\alpha \geq 0$. Если случайная величина ξ ограничена сверху (т.е. если $\lambda_+ = \infty$ и $\alpha_+ < \infty$), то функция $\Lambda(\alpha)$ терпит единственный разрыв в точке $\alpha = \alpha_+$.

2.2. Грубая асимптотика вероятностей больших уклонений сумм. Известен (см., например, [6, § 1, лемма 7]) принцип больших уклонений для сумм независимых случайных величин, согласно которому для любого фиксированного $\alpha \geq m$ при $n \rightarrow \infty$ имеет место сходимость

$$n^{-1} \ln \mathbf{P}\left\{\frac{S_n}{n} \geq \alpha\right\} \rightarrow -\Lambda(\alpha). \quad (2.2)$$

Этот принцип остается верным и в следующей более сильной форме. Пусть $\alpha_1 > m$ — произвольное число такое, что $\Lambda(\alpha_1) < \infty$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$n^{-1} \ln \mathbf{P}\left\{\frac{S_n}{n} \geq \alpha\right\} = -\Lambda(\alpha) + o(1) \quad (2.3)$$

равномерно по $\alpha \in [m, \alpha_1]$. Левая часть в (2.3) равна $-\infty$, если $\Lambda(\alpha) = \infty$. Утверждение в равномерной форме вытекает из (2.2) ввиду равномерной непрерывности функции $\Lambda(\alpha)$ на компакте $[m, \alpha_1]$ и монотонности по α левой части (2.3).

В следующих двух вспомогательных пунктах приводятся равномерные по параметру уточнения центральной предельной теоремы для сумм решетчатых и нерешетчатых слагаемых.

2.3. Равномерная по параметру локальная центральная предельная теорема (решетчатый случай). В этом пункте ξ_k будут предполагаться решетчатыми, $\sigma^2 = \mathbf{D}\xi < \infty$. Пусть числа b и h таковы, что $\mathbf{P}\{\xi = b + kh, k \in \mathbf{Z}\} = 1$, причем решетка с шагом h — минимальная, обладающая этим свойством. Известна [8, § 43] локальная теорема для распределения сумм S_n , согласно которой

$$\mathbf{P}\{S_n = nb + kh\} = \frac{h}{\sqrt{2\pi n\sigma}} e^{-(nb+kh-nm_1)^2/2n\sigma^2} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно для всех $k \in \mathbf{Z}$. В формулируемой ниже лемме приводятся условия, при которых это утверждение справедливо равномерно по параметру, от которого зависит распределение ξ . Именно, рассматриваются решетчатые случайные величины $\xi_k^{[r]}$, распределение которых зависит от некоторого параметра r из произвольного параметрического множества и при каждом r является решетчатым с минимальной решеткой $\{b + kh, k \in \mathbf{Z}\}$.

Лемма 1. Пусть семейство (по r) случайных величин $\{(\xi^{[r]})^2\}$ равномерно интегрируемо и для любого $\varepsilon > 0$ выполняется

$$\sup_r \sup_{\mu \in [\varepsilon, 2\pi/h - \varepsilon]} |\mathbf{E} e^{i\mu \xi^{[r]}}| < 1 \quad (2.4)$$

(здесь i — мнимая единица). Тогда равномерно по k и r имеет место соотношение

$$\mathbf{P}\{S_n^{[r]} = nb + kh\} - \frac{h}{\sqrt{2\pi n \sigma^{[r]}}} e^{-(nb + kh - nm_1^{[r]})^2 / 2n(\sigma^{[r]})^2} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (2.5)$$

З а м е ч а н и е 1. Так как при любом r распределение $\xi^{[r]}$ решетчатое с минимальным шагом решетки, равным h , то для любого $\varepsilon > 0$ выполняется $|\mathbf{E} e^{i\mu \xi^{[r]}}| < 1$ равномерно по $\mu \in [\varepsilon, 2\pi/h - \varepsilon]$ и условие (2.4) является лишь равномерным по r аналогом этого соотношения.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 1. Из условия равномерной интегрируемости квадратов случайных величин вытекает, что в окрестности точки $\mu = 0$ имеет место разложение

$$\mathbf{E} e^{i\mu(\xi^{[r]} - m_1^{[r]})} = 1 - \frac{(\sigma^{[r]})^2 \mu^2}{2} + o(\mu^2),$$

причем равномерно по параметру r . В частности, характеристические функции $\mathbf{E} e^{i\mu(S_n^{[r]} - nm_1^{[r]})/\sqrt{n}\sigma^{[r]}}$ сходятся к характеристической функции $e^{-\mu^2/2}$ стандартного нормального закона равномерно по μ из любого компакта и равномерно по r . Эти обстоятельства и условие (2.4) позволяют нам далее дословно воспользоваться доказательством локальной теоремы из [8, § 43].

Из леммы 1 вытекает следующее

Следствие 1. Пусть семейство (по r) случайных величин $\{(\xi^{[r]})^2\}$ равномерно интегрируемо. Кроме того, пусть конечное множество $K \subset \mathbf{Z}$ таково, что наибольший общий делитель чисел из K равен единице и для любых $k \in K$ и r выполняется неравенство $\mathbf{P}\{\xi^{[r]} = b + kh\} \geq \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$. Тогда равномерно по k и r имеет место соотношение (2.5).

2.4. Равномерное по параметру разложение в центральной предельной теореме (нерешетчатый случай). Пусть теперь ξ_k нерешетчаты с нулевым средним значением и конечным третьим моментом $m_3 = \mathbf{E}\xi^3$. Известно (см., например, теорему 1 в [10, гл. XVI, § 4]) следующее разложение для распределения суммы $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, уточняющее центральную предельную теорему: при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{S_n}{\sqrt{nD\xi_1}} < u \right\} - \Phi(u) - \frac{m_3}{6\sigma^3\sqrt{n}}(1-u^2)\Phi'(u) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

равномерно для всех u , где $\Phi(u)$ — функция распределения стандартного нормального закона. В этом вспомогательном пункте приводится обобщение этого разложения на случай, когда распределение ξ зависит от некоторого параметра r из произвольного параметрического множества. Именно, рассматриваются случайные величины $\xi_k^{[r]}$, каждая из которых имеет нерешетчатое распределение с нулевым средним значением, единичной дисперсией и конечным третьим моментом $m_3^{[r]} = \mathbf{E}(\xi^{[r]})^3$.

Лемма 2. Пусть для любого компакта $K \subset \mathbf{R}$, не содержащего нуля, выполняется

$$\sup_r \sup_{\mu \in K} |\mathbf{E} e^{i\mu \xi^{[r]}}| < 1 \quad (2.6)$$

(здесь i — мнимая единица). Кроме того, пусть семейство (по r) случайных величин $\{(\xi^{[r]})^3\}$ равномерно интегрируемо. Тогда функция распределения $F_n^{[r]}(u)$ случайной величины $S_n^{[r]}/\sqrt{n}$ удовлетворяет при $n \rightarrow \infty$ равномерному по $u \in \mathbf{R}$ и r соотношению

$$F_n^{[r]}(u) - \Phi(u) - \frac{m_3^{[r]}}{6\sqrt{n}}(1-u^2)\Phi'(u) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

З а м е ч а н и е 2. Так как при любом r распределение $\xi^{[r]}$ нерешетчатое, то для любого компакта $K \subset \mathbf{R}$, не содержащего нуля, выполняется $\sup_{\mu \in K} |\mathbf{E} e^{i\mu \xi^{[r]}}| < 1$ и условие (2.6) является лишь равномерным аналогом этого соотношения.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует рассуждениям из [10, гл. XVI, § 4] и основано на приведенной там оценке (4.4): для любого $\varepsilon > 0$

$$|F_n^{[r]}(u) - \Psi(u)| \leq \int_{-a\sqrt{n}}^{a\sqrt{n}} \left| \frac{(\mathbf{E} e^{i\mu \xi^{[r]}/\sqrt{n}})^n - \gamma(\mu)}{\mu} \right| d\mu + \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \quad (2.7)$$

где функция ограниченной вариации

$$\Psi(u) = \Phi(u) + \frac{m_3^{[r]}}{6\sqrt{n}}(1-u^2)\Phi'(u)$$

имеет преобразование Фурье

$$\psi(\mu) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu u} d\Psi(u) = e^{-\mu^2/2} \left[1 + \frac{m_3^{[r]}}{6\sqrt{n}} (i\mu)^3 \right],$$

а постоянная a выбрана столь большой, что $24|\Psi'(u)| < \varepsilon a$ при всех u и r . Такой выбор a возможен ввиду равномерной ограниченности третьих моментов.

Разобьем интервал интегрирования в (2.7) на две части. В силу условия (2.6) максимум $|\mathbb{E}e^{i\mu\xi^{[r]}}|$ по области $0 < \delta \leq |\mu| \leq a < \infty$ строго меньше единицы. Как отмечается в [10, гл. XVI, § 4], откуда вытекает, что интеграл по области $|\mu| \in [\delta\sqrt{n}, a\sqrt{n}]$ стремится к нулю быстрее любой степени числа $1/n$. Далее, ввиду равномерной интегрируемости кубов случайных величин третьи производные функций $\ln \mathbb{E}e^{i\mu\xi^{[r]}}$ непрерывны в некоторой окрестности нуля равномерно по r . Тогда в соответствии с [10, гл. XVI, § 2] найдется $\delta > 0$ такое, что при $|\mu| \leq \delta\sqrt{n}$ подынтегральное выражение в (2.7) допускает оценку

$$\left| \frac{(\mathbb{E}e^{i\mu\xi^{[r]}/\sqrt{n}})^n - \psi(\mu)}{\mu} \right| \leq e^{-\mu^2/4} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} |\mu| + \frac{(m_3^{[r]})^2}{72n} |\mu|^5 \right),$$

и поэтому при больших n правая часть в (2.7) меньше $1000\varepsilon/\sqrt{n}$. Ввиду произвольности выбора числа $\varepsilon > 0$ лемма доказана.

2.5. Точная асимптотика вероятностей больших отклонений сумм.

О п р е д е л е н и е 1. Распределение F_λ называем *преобразованием Крамера распределения F в точке λ* , если $F_\lambda(du) = e^{\lambda u} F(du)/\varphi(\lambda)$, в случае существования преобразования Лапласа для распределения F в точке λ .

Распределение F_λ при $\lambda = \lambda(\alpha)$ называем *преобразованием Крамера $F^{(\alpha)}$ с параметром α над распределением F* , а случайную величину с распределением $F^{(\alpha)}$ обозначаем $\xi^{(\alpha)}$. Отметим, что $\xi^{(\alpha)} = \xi$ при $\alpha = m$. По определению $\mathbb{E}\xi^{(\alpha)} = \varphi'(\lambda)/\varphi(\lambda)|_{\lambda=\lambda(\alpha)} = \alpha$,

$$(\sigma^{(\alpha)})^2 = D\xi^{(\alpha)} = \frac{\varphi''(\lambda)}{\varphi(\lambda)} \Big|_{\lambda=\lambda(\alpha)} - \alpha^2 = (\ln \varphi(\lambda))'' \Big|_{\lambda=\lambda(\alpha)}.$$

Дифференцируя тождество $\varphi'(\lambda)/\varphi(\lambda)|_{\lambda=\lambda(\alpha)} = \alpha$ по переменной α и учитывая равенство $\Lambda'(\alpha) = \lambda(\alpha)$, приходим к соотношению

$$(\sigma^{(\alpha)})^2 = \frac{1}{\Lambda''(\alpha)}. \quad (2.8)$$

В частности, $\Lambda''(m) = 1/D\xi$.

В следующих двух леммах приводятся обобщения теоремы А из [14] и утверждений из [9]. Обозначаем $\gamma = \sigma^{(\alpha)}\lambda(\alpha)\sqrt{n}$.

Лемма 3. Пусть распределение F нерешетчатое, а числа α_1 и α_2 таковы, что $m \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_+$; если $\alpha_1 = m$, то дополнительно предполагаем конечность $\mathbf{E}|\xi|^3$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ имеет место равенство

$$\mathbf{P}\left\{\frac{S_n}{n} \geq \alpha\right\} = e^{-n\Lambda(\alpha)} e^{\gamma^2/2} (1 - \Phi(\gamma)) (1 + o(1)).$$

З а м е ч а н и е 3. В ходе доказательства будет установлено более сильное соотношение, уточняющее порядок малости остатка $o(1)$ (см. (2.10)).

Предложенное в лемме асимптотическое равенство является универсальным в том отношении, что оно содержит в себе аппроксимацию распределения сумм как в области нормальных, так и в области больших отклонений. Например, поскольку $1 - \Phi(\gamma) \sim e^{-\gamma^2/2}/\sqrt{2\pi}\gamma$ при $\gamma \rightarrow \infty$, то получаем следующее

Следствие 2. Если $\mathbf{E}\xi < \alpha_1$, то при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{S_n}{n} \geq \alpha\right\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n \sigma(\alpha) \lambda(\alpha)}} e^{-n\Lambda(\alpha)}.$$

Кроме того, если $\mathbf{E}|\xi|^3 < \infty$ и $y(n) \rightarrow \infty$, $y(n) = o(\sqrt{n})$, то последняя асимптотика имеет место при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $\alpha \in [\mathbf{E}\xi + y(n)/\sqrt{n}, \alpha_2]$.

С другой стороны, в окрестности точки $\alpha = m$ справедливо разложение $\Lambda(\alpha) = \gamma^2/2n + O(|\alpha - m|^3)$, из которого вытекает

Следствие 3. Если $\mathbf{E}|\xi|^3 < \infty$, то при $n \rightarrow \infty$ равномерно в области $\alpha \in [m, m + o(n^{-1/3})]$ имеет место соотношение

$$\mathbf{P}\left\{\frac{S_n}{n} \geq \alpha\right\} \sim 1 - \Phi(\sigma^{(\alpha)} \lambda(\alpha) \sqrt{n}) \sim 1 - \Phi((\alpha - \mathbf{E}\xi) \sqrt{n}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 3. Пусть $\{\xi_k^{(\alpha)}\}$ — набор независимых копий величины $\xi^{(\alpha)}$; $\zeta_k^{(\alpha)} = (\xi_k^{(\alpha)} - \alpha)/\sigma^{(\alpha)}$. Положим

$$S_n^{(\alpha)} = \xi_1^{(\alpha)} + \dots + \xi_n^{(\alpha)}, \quad F_n^{(\alpha)}(u) = \mathbf{P}\left\{\frac{\zeta_1^{(\alpha)} + \dots + \zeta_n^{(\alpha)}}{\sqrt{n}} < u\right\}. \quad (2.9)$$

Справедлива «формула обращения» (см., например, [2, § 8, гл. 8])

$$\mathbf{P}\{S_n \in du\} = \varphi^n(\lambda(\alpha)) e^{-\lambda(\alpha)u} \mathbf{P}\{S_n^{(\alpha)} \in du\}$$

и, соответственно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\frac{S_n}{n} \geq \alpha\right\} &= \varphi^n(\lambda(\alpha)) \int_x^\infty e^{-\lambda(\alpha)u} \mathbf{P}\{S_n^{(\alpha)} \in du\} \\ &= \varphi^n(\lambda(\alpha)) e^{-\lambda(\alpha)\alpha n} \int_0^\infty e^{-\lambda(\alpha)\sigma^{(\alpha)}\sqrt{n}u} dF_n^{(\alpha)}(u). \end{aligned}$$

Вспоминая определение функции Λ и интегрируя по частям, получаем равенство

$$\mathbf{P}\left\{\frac{S_n}{n} \geq \alpha\right\} = e^{-n\Lambda(\alpha)} \gamma \int_0^\infty e^{-\gamma u} (F_n^{(\alpha)}(u) - F_n^{(\alpha)}(0)) du.$$

Набор случайных величин $\{\zeta_1^{(\alpha)}, \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2\}$ удовлетворяет условиям леммы 2. Применяя ее для оценки разности $F_n^{(\alpha)}(u) - F_n^{(\alpha)}(0)$ в последнем равенстве, приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\frac{S_n}{n} \geq \alpha\right\} &= e^{-n\Lambda(\alpha)} \gamma \left[\int_0^\infty e^{-\gamma u} (\Phi(u) - \Phi(0)) du \right. \\ &\quad + \frac{m_3^{[r]}}{6\sigma(\alpha)^3 \sqrt{n}} \int_0^\infty e^{-\gamma u} ((1-u^2) \Phi'(u) - \Phi'(0)) du \\ &\quad \left. + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \int_0^\infty e^{-\gamma u} du \right]. \end{aligned}$$

Отметим теперь, что справедливо тождество $\int_0^\infty e^{-\gamma u} e^{-u^2/2} du = e^{\gamma^2/2} (1 - \Phi(\gamma)) \sqrt{2\pi}$ (оно получается, если выделить полный квадрат в показателе экспоненты). Дифференцирование этого тождества по γ позволяет найти значения интегралов $\int_0^\infty u^k e^{-\gamma u} e^{-u^2/2} du$, $k = 1, 2, 3$. Поступая таким образом, приходим к равенствам

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\gamma u} (\Phi(u) - \Phi(0)) du &= \frac{e^{\gamma^2/2} (1 - \Phi(\gamma))}{\gamma}, \\ \int_0^\infty e^{-\gamma u} ((1-u^2) \Phi'(u) - \Phi'(0)) du &= \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}} - \gamma^2 e^{\gamma^2/2} (1 - \Phi(\gamma)) - \frac{1}{\gamma \sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\frac{S_n}{n} \geq \alpha\right\} &= e^{-n\Lambda(\alpha)} e^{\gamma^2/2} (1 - \Phi(\gamma)) \\ &\quad + \frac{e^{-n\Lambda(\alpha)}}{\sqrt{n}} \left(O\left(\frac{1}{1+\gamma^2}\right) + o(1) \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Последнее соотношение влечет утверждение леммы.

Лемма 4. Пусть распределение F решетчатое с минимальной решеткой $\{b + kh, k \in \mathbf{Z}\}$, а числа α_1 и α_2 таковы, что $m \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_+$; если $\alpha_1 = m$, то дополнительно предполагаем конечность $\mathbf{E}\xi^2$. Тогда при $x = nb + kh$, $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{S_n = x\} \sim \frac{h}{\sqrt{2\pi n \sigma(\alpha)}} e^{-n\Lambda(x/n)}$$

равномерно по x таким, что $\alpha = x/n \in [\alpha_1, \alpha_2]$.

Доказательство. В решетчатом случае формула обращения принимает вид

$$\mathbf{P}\{S_n = x\} = \varphi^n(\lambda(\alpha)) e^{-\lambda(\alpha)\alpha n} \mathbf{P}\{S_n^{(\alpha)} = x\}.$$

Семейство случайных величин $\{\xi_1^{(\alpha)}, \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]\}$ удовлетворяет условиям следствия 1. Поэтому $\mathbf{P}\{S_n^{(\alpha)} = x\} \sim h/\sqrt{2\pi n\sigma^{(\alpha)}}$; отсюда вытекает требуемая асимптотика.

Следствие 4. Если $\alpha_1 > m$, то при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ таким, что $(\alpha - b)n/h$ — целое число,

$$\mathbf{P}\left\{\frac{S_n}{n} \geq \alpha\right\} \sim \frac{h}{\sqrt{2\pi n\sigma^{(\alpha)}}(1 - e^{\lambda(\alpha)h})} e^{-n\Lambda(\alpha)}.$$

2.6. Асимптотика табу-вероятностей больших отклонений сумм. Положим $M_-^{(\alpha)} = \min_{k>0} S_k^{(\alpha)}$, $b(v, \alpha) = \mathbf{P}\{M_-^{(\alpha)} \geq v\}$. В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение об асимптотике вероятности

$$q_n(v, x) \equiv \mathbf{P}\{S_k \geq v \text{ при всех } k < n, S_n \geq x\}.$$

Лемма 5. Пусть α_1 и α_2 — произвольные числа такие, что $0 < \alpha_1 < \alpha_2$ и $\Lambda(\alpha_2) < \infty$; $v_0 \in \mathbf{R}$. Тогда при $x \rightarrow \infty$ равномерно по v и n таким, что $v \leq v_0$ и $x/n \in [\alpha_1, \alpha_2]$, имеет место соотношение

$$n^{-1} \ln q_n(v, x) \geq -\Lambda\left(\frac{x}{n}\right) + o(1).$$

Если, кроме того, $\alpha_2 < \alpha_+$, то имеет место эквивалентность

$$q_n(v, x) \sim b\left(v, \frac{x}{n}\right) \mathbf{P}\{S_n \geq x\}.$$

Доказательство второго утверждения фактически содержится в [3], [4]. Единственное затруднение состоит в том, что в [3], [4] используется дополнительное условие Крамера на характеристическую функцию распределения F . Однако это дополнительное условие используется лишь для корректной ссылки на предшествующие результаты, содержащие равномерные асимптотики вероятностей больших отклонений. В нашем же изложении эти равномерные асимптотики (следствие 2 и лемма 4) получены без использования условия Крамера на характеристическую функцию.

Первое утверждение леммы можно вывести из второго, применяя метод срезов подобно тому, как это сделано при доказательстве леммы 7 в [6, § 1]. Лемма доказана.

2.7. Некоторые результаты, касающиеся сумм вероятностей $P\{S_k \geq x\}$. Пусть $\beta > 0$, $\varphi(\beta) = 1$ и $\varphi'(\beta) < \infty$; в частности, $\alpha_+ \geq \varphi'(\beta) > 0$. Положим $\alpha_0 \equiv \varphi'(\beta)/\varphi(\beta) = \varphi'(\beta)$. Имеем $\alpha_0 \in (0, \alpha_+]$, $\lambda(\alpha_0) = \beta$ и $\Lambda(\alpha_0) = \beta\alpha_0$.

Для функции восстановления, построенной по суммам S_k , при $x \rightarrow \infty$ справедливо равенство

$$H(x) \equiv \sum_{k \geq 1} P\{S_k \geq x\} = (c_H + o(1))e^{-\beta x}. \quad (2.11)$$

Если случайная величина ξ нерешетчатая, то $c_H = 1/\beta\alpha_0$. Если ξ решетчатая с минимальной решеткой $\{kh, k \in \mathbf{Z}\}$, то $c_H = h/(1 - e^{-\beta h})\alpha_0$, а x следует брать кратным h .

Чтобы проверить (2.11), рассмотрим функцию восстановления $H^{(\alpha_0)}$, построенную по суммам $S_k^{(\alpha_0)}$ с положительным средним сносом. Тогда справедлива формула обращения

$$H(x) = e^{-\beta x} \int_x^\infty e^{-\beta(u-x)} H^{(\alpha_0)}(du).$$

Применение локальной теоремы восстановления для $H^{(\alpha_0)}$ приводит к (2.11) (ср. также с [7], где асимптотика $H(x)$ изучена более полно).

Всюду в дальнейшем $n_0 = n_0(x) = x/\alpha_0$. Асимптотика частичных сумм вероятностей $P\{S_k \geq x\}$ описывается в следующей лемме.

Лемма 6. Пусть $\varphi(\lambda) < \infty$ при некотором $\lambda > \beta$, т.е. $\lambda_+ > \beta$, и функция $y(x) \rightarrow \infty$ такова, что $y(x) = o(x^{1/6})$ при $x \rightarrow \infty$. Тогда имеет место равномерное по $y \geq -y(x)$ соотношение

$$\sum_{k \leq y\sqrt{x}} P\{S_{n_0+k} \geq x\} = (c_H + o(1))e^{-\beta x} \Phi\left(\frac{y\alpha_0^{3/2}}{\sigma(\alpha_0)}\right) \quad \text{при } x \rightarrow \infty;$$

в решетчатом случае следует брать x кратным шагу решетки.

Прежде чем приступить к доказательству, введем еще одну функцию. Обозначим

$$V(\alpha) = \frac{\Lambda(\alpha)}{\alpha}.$$

Поскольку

$$V'(\alpha) = \alpha^{-2}(\lambda(\alpha)\alpha - \Lambda(\alpha)) = \alpha^{-2} \ln \varphi(\lambda(\alpha)),$$

то $V'(\alpha) < 0$ при $\alpha \in (0, \alpha_0)$; $V'(\alpha) > 0$ при $\alpha > \alpha_0$ и $V'(\alpha_0) = 0$. Таким образом, функция $V(\alpha)$ достигает в точке α_0 своего минимального значения на $(0, \infty)$, равно $\Lambda(\alpha_0)/\alpha_0 = \beta$. Имеем $V''(\alpha_0) = 1/\alpha_0(\sigma(\alpha_0))^2$.

Доказательство леммы 6. В силу следствий 2 и 4 равномерно по $|k| \leq 2y(x)\sqrt{x} = o(x^{2/3})$ справедлива асимптотика

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_{n_0+k} \geq x\} &\sim \frac{\alpha_0 c_H}{\sqrt{2\pi n_0} \sigma^{(\alpha_0)}} e^{-(n_0+k)\Lambda(x/(n_0+k))} \\ &= \frac{\alpha_0^{3/2} c_H}{\sqrt{2\pi x} \sigma^{(\alpha_0)}} e^{-xV(x/(n_0+k))}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ввиду равенств $V(\alpha_0) = \beta$ и $V'(\alpha_0) = 0$ имеем разложение

$$V\left(\frac{x}{n_0+k}\right) = \beta + \frac{V''(\theta)}{2} \left(\frac{x}{n_0+k} - \alpha_0\right)^2,$$

где θ находится между α_0 и $x/(n_0+k)$; в частности, $\theta \rightarrow \alpha_0$. Поскольку

$$\frac{x}{n_0+k} - \alpha_0 = \frac{\alpha_0}{1+k/n_0} - \alpha_0 = -\frac{\alpha_0^2 k}{x} \left(1 + O\left(\frac{k}{x}\right)\right)$$

и $V''(\theta) = V''(\alpha_0) + O(k/x) = 1/\alpha_0 (\sigma^{(\alpha_0)})^2 (1 + O(k/x))$ равномерно по $|k| \leq 2y(x)\sqrt{x}$, то при таких значениях k имеем

$$e^{-xV\left(\frac{x}{n_0+k}\right)} = e^{-\beta x} e^{-\alpha_0^3 (k/\sqrt{x})^2 / 2 (\sigma^{(\alpha_0)})^2 + o(1)}. \quad (2.13)$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Подставляя (2.13) в (2.12), получаем равномерно по всем y_1 и y_2 таким, что $y_2 - y_1 \geq \varepsilon$, $|y_1|, |y_2| \leq 2y(x)$, следующую эквивалентность:

$$\begin{aligned} \sum_{k=y_1\sqrt{x}}^{y_2\sqrt{x}} \mathbf{P}\{S_{n_0+k} \geq x\} &\sim e^{-\beta x} \frac{\alpha_0^{3/2} c_H}{\sqrt{2\pi x} \sigma^{(\alpha_0)}} \sum_{k=y_1\sqrt{x}}^{y_2\sqrt{x}} e^{-\alpha_0^3 (k/\sqrt{x})^2 / 2 (\sigma^{(\alpha_0)})^2} \\ &\sim e^{-\beta x} \frac{\alpha_0^{3/2} c_H}{\sqrt{2\pi} \sigma^{(\alpha_0)}} \int_{y_1}^{y_2} e^{-\alpha_0^3 t^2 / 2 (\sigma^{(\alpha_0)})^2} dt \\ &= c_H e^{-\beta x} \left(\Phi\left(y_2 \frac{\alpha_0^{3/2}}{\sigma^{(\alpha_0)}}\right) - \Phi\left(y_1 \frac{\alpha_0^{3/2}}{\sigma^{(\alpha_0)}}\right) \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

В силу экспоненциального неравенства Чебышева имеем $\mathbf{P}\{S_{n_0+k} \geq x\} \leq e^{-\lambda x} \varphi^{n_0+k}(\lambda)$. Суммируя это неравенство по $k \leq -2y(x)\sqrt{x}$ и полагая $\lambda = \lambda(x/(n_0 - 2y(x)\sqrt{x}))$, получаем оценку

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq -2y(x)\sqrt{x}} \mathbf{P}\{S_{n_0+k} \geq x\} &\leq n_0 e^{-\lambda x} \varphi^{n_0-2y(x)\sqrt{x}}(\lambda) \\ &= \frac{x}{\alpha_0} e^{-xV(x/(n_0-2y(x)\sqrt{x}))}. \end{aligned}$$

Отсюда, ввиду (2.13),

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq -2y(x)\sqrt{x}} \mathbf{P}\{S_{n_0+k} \geq x\} &\leq cxe^{-\beta x} e^{-2\alpha_0^3 y^2(x)/(\sigma(\alpha_0))^2} \\ &= o\left(e^{-\beta x} e^{-\alpha_0^3 y^2(x)/2(\sigma(\alpha_0))^2}\right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Соотношения (2.14) и (2.15) влекут утверждение леммы.

Следствие 5. Пусть $\lambda_+ > \beta$, $v_0 \in \mathbf{R}$ и функция $y(x) \rightarrow \infty$ такова, что $y(x) = o(x^{1/6})$ при $x \rightarrow \infty$. Тогда равномерно по $y \geq -y(x)$ и $v \leq v_0$ при $x \rightarrow \infty$ имеет место соотношение (обозначение $q_n(v, x)$ — из леммы 5)

$$\sum_{k \leq y\sqrt{x}} q_{n_0+k}(v, x) = b(v, \alpha_0) (c_H + o(1)) e^{-\beta x} \Phi\left(\frac{y\alpha_0^{3/2}}{\sigma(\alpha_0)}\right);$$

в решетчатом случае следует брать x кратным шагу решетки.

В частности, если последовательности целых чисел $k_1(x)$ и $k_2(x)$ таковы, что $k_1(x) < k_2(x)$ и $k_2(x) - k_1(x) = o(\sqrt{x})$, то при $x \rightarrow \infty$ справедлива оценка

$$\sum_{k \in [k_1(x), k_2(x)]} q_k(v, x) = o(e^{-\beta x}).$$

Доказательство. Основной вклад в сумму в лемме 6 вносят слагаемые, отвечающие значениям k порядка $o(x)$. При таких значениях k функция $b(v, x/(n_0 + k))$ стремится к $b(v, \alpha_0)$. Поэтому следствие вытекает из лемм 5 и 6.

§ 3. Крамеровский случай: принцип больших уклонений для асимптотически однородной цепи

В настоящем и следующем параграфах исследуется крамеровский случай, когда $\beta > 0$, $\varphi(\beta) = 1$ и $\alpha_0 = \varphi'(\beta) < \infty$.

3.1. Однородная цепь с нулевым начальным условием. В настоящем пункте приводятся некоторые свойства распределения максимума $M_n = \max\{0, S_1, \dots, S_n\}$. Отметим, что из (2.3) вытекает соотношение

$$x^{-1} \ln \mathbf{P}\{S_n \geq x\} = -V\left(\frac{x}{n}\right) + o(1) \quad (3.1)$$

при $x \rightarrow \infty$ равномерно по n таким, что $x/n \in (0, \alpha_1]$, где, как и прежде,

$$V(\alpha) = \frac{\Lambda(\alpha)}{\alpha}.$$

Здесь $\alpha_1 > 0$ — произвольное число такое, что $\Lambda(\alpha_1) < \infty$. Очевидно также, что обе части в (3.1) равны $-\infty$, если $\Lambda(x/n) = \infty$.

Введем в рассмотрение непрерывные функции $\tilde{V}(\alpha)$ и $\tilde{\lambda}(\alpha)$:

$$\tilde{V}(\alpha) \equiv \inf_{\alpha' \geq \alpha} V(\alpha') = \begin{cases} \beta & \text{при } \alpha \leq \alpha_0, \\ V(\alpha) & \text{при } \alpha \geq \alpha_0, \end{cases} \quad \tilde{\lambda}(\alpha) \equiv \begin{cases} \beta & \text{при } \alpha \leq \alpha_0, \\ \lambda(\alpha) & \text{при } \alpha \geq \alpha_0. \end{cases}$$

В следующей лемме формулируется принцип больших уклонений для M_n .

Лемма 7. Пусть $\alpha_1 > 0$ таково, что $\Lambda(\alpha_1) < \infty$. Тогда при $x \rightarrow \infty$ имеет место соотношение

$$x^{-1} \ln \mathbf{P}\{M_n \geq x\} = -\tilde{V}\left(\frac{x}{n}\right) + o(1)$$

равномерно по n таким, что $x/n \in (0, \alpha_1]$; $x^{-1} \ln \mathbf{P}\{M_n \geq x\} = -\infty$, если $\Lambda(x/n) = \infty$.

Доказательство. Пусть $\lambda \in [\beta, \lambda_+)$. Тогда $\mathbf{E}e^{\lambda \xi} \geq 1$ и последовательность $e^{\lambda S_n}$ образует субмартингал. Поэтому по неравенству Дуба для неотрицательных субмартингалов при любом x действует оценка

$$\mathbf{P}\{M_n \geq x\} = \mathbf{P}\left\{\sup_{k \leq n} e^{\lambda S_k} \geq e^{\lambda x}\right\} \leq e^{-\lambda x} \mathbf{E}e^{\lambda S_n}. \quad (3.2)$$

Правая часть последнего неравенства равна $e^{-\lambda x} \varphi^n(\lambda) = \exp\{-n(\lambda x/n - \ln \varphi(\lambda))\}$. Если $\alpha \equiv x/n \in [\alpha_0, \infty)$, то $\lambda(\alpha) \geq \beta$ и, следовательно,

$$\mathbf{P}\{M_n \geq x\} \leq e^{-\lambda(\alpha)x} \varphi^n(\lambda(\alpha)) = e^{-n\Lambda(x/n)} = e^{-xV(x/n)}. \quad (3.3)$$

Кроме того, из (3.2) при $\lambda = \beta$ вытекает оценка Крамера

$$\mathbf{P}\{M_n \geq x\} \leq e^{-\beta x}, \quad (3.4)$$

верная для любых n и x . Объединяя две последние оценки, получаем при любых n и x неравенство

$$\mathbf{P}\{M_n \geq x\} \leq e^{-x\tilde{V}(x/n)}. \quad (3.5)$$

Используя верное для любого $m \leq n$ неравенство $\mathbf{P}\{M_n \geq x\} \geq \mathbf{P}\{S_m \geq x\}$ и полагая в (3.1) $m = n$ в случае $x/n \geq \alpha_0$ и $m = x/\alpha_0$ в противном случае, получаем при $x \rightarrow \infty$ следующую оценку снизу:

$$x^{-1} \ln \mathbf{P}\{M_n \geq x\} \geq -\tilde{V}\left(\frac{x}{n}\right) + o(1). \quad (3.6)$$

Из (3.5) и (3.6) вытекает утверждение леммы.

Отметим, что оценку сверху (3.5) можно получить также, пользуясь неравенством

$$\mathbf{P}\{M_n \geq x\} \leq \sum_{k=1}^n \mathbf{P}\{S_k \geq x\}$$

и очевидными оценками $\mathbf{P}\{S_k \geq x\} \leq e^{-k\Lambda(x/k)} = e^{-xV(x/k)}$.

В следующей лемме несколько обобщается теорема 10 из [1] в части, касающейся зоны значений времени n , в которой хвосты распределений M_n и M_∞ эквивалентны.

Лемма 8. Пусть $y(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$. Тогда при $x \rightarrow \infty$ имеет место равномерная по $n \geq x/\alpha_0 + y(x)\sqrt{x}$ эквивалентность

$$\mathbf{P}\{M_n \geq x\} \sim \mathbf{P}\{M_\infty \geq x\}.$$

Доказательство. Известна (см., например, [10, гл. XII, § 5]) оценка Крамера, согласно которой при $x \rightarrow \infty$ (в случае решетчатого распределения отдельного слагаемого x следует брать кратным шагу решетки)

$$\mathbf{P}\{M_\infty \geq x\} \sim ce^{-\beta x}, \quad c \in (0, 1). \quad (3.7)$$

Пусть $\lambda \in [0, \beta]$. Тогда $\mathbf{E}e^{\lambda \xi} \leq 1$ и последовательность $e^{\lambda S_n}$ образует супермартингал. Поэтому по неравенству Дуба для неотрицательных супермартингалов при любом x действует оценка

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{k \geq n+1} S_k \geq x\right\} = \mathbf{P}\left\{\sup_{k \geq n+1} e^{\lambda S_k} \geq e^{\lambda x}\right\} \leq e^{-\lambda x} \mathbf{E}e^{\lambda S_{n+1}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{M_\infty \geq x\} - \mathbf{P}\{M_n \geq x\} &\leq e^{-\lambda x} \mathbf{E}e^{\lambda S_{n+1}} = e^{-\lambda x} \varphi^{n+1}(\lambda) \\ &\leq e^{-n(\lambda x/n - \ln \varphi(\lambda))}. \end{aligned}$$

Если $\alpha \equiv x/n < \alpha_0$, то $\lambda(\alpha) < \beta$ и, соответственно,

$$\mathbf{P}\{M_\infty \geq x\} - \mathbf{P}\{M_n \geq x\} \leq e^{-n\Lambda(x/n)}.$$

Функция Λ строго выпуклая, и ее вторая производная на отрезке $[0, \alpha_0]$ отделена снизу от нуля некоторым числом $\delta > 0$; поэтому

$$\Lambda(\alpha) \geq \Lambda(\alpha_0) + \Lambda'(\alpha_0)(\alpha - \alpha_0) + \frac{\delta(\alpha - \alpha_0)^2}{2} = \beta\alpha + \frac{\delta(\alpha - \alpha_0)^2}{2}.$$

Рассматриваемую зону значений времени n можно характеризовать неравенством $\alpha_0 - \alpha \geq y(x)/\sqrt{n}$ (вообще говоря, изменив значения функции y в конечное число раз). В этой зоне вследствие двух последних неравенств имеем

$$\mathbf{P}\{M_\infty \geq x\} - \mathbf{P}\{M_n \geq x\} \leq e^{-\beta x} e^{-\delta y^2(x)/2} = o(e^{-\beta x}) \quad \text{при } x \rightarrow \infty,$$

что в сочетании с (3.7) завершает доказательство.

3.2. Верхние оценки вероятностей больших отклонений асимптотически однородной цепи Маркова. В настоящем пункте предполагается, что вещественнозначная цепь Маркова X асимптотически однородна.

Лемма 9. Пусть $\lambda_1 \in [\beta, \lambda_+)$, $\lambda_1 < \infty$, а если $\lambda_1 = \lambda_+$, то дополнительно предполагаем $\varphi'(\lambda_+) < \infty$. Обозначим через α_1 конечное решение уравнения $\lambda(\alpha) = \lambda_1$. Пусть для любого $\lambda \in [0, \lambda_1)$ начальное распределение цепи имеет конечный экспоненциальный момент $Ee^{\lambda X(0)} < \infty$, а скачки цепи удовлетворяют условию

$$\sup_{u < 0} Ee^{\lambda(u + \xi(u))} < \infty, \quad \sup_{u \geq 0} Ee^{\lambda \xi(u)} < \infty. \quad (3.8)$$

Тогда при $x \rightarrow \infty$ имеет место соотношение

$$x^{-1} \ln \pi_n(x) \leq -\tilde{V}_1\left(\frac{x}{n}\right) + o(1) \quad (3.9)$$

равномерно по всем значениям n таким, что отношение x/n ограничено сверху. Здесь непрерывная функция $\tilde{V}_1(\alpha)$ задается равенством

$$\tilde{V}_1(\alpha) = \begin{cases} \beta, & \text{если } \alpha \leq \alpha_0, \\ \frac{\Lambda(\alpha)}{\alpha}, & \text{если } \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1, \\ \frac{\Lambda(\alpha_1) + (\alpha - \alpha_1)\lambda_1}{\alpha}, & \text{если } \alpha \geq \alpha_1. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е 4. По определению функция $\tilde{V}_1(\alpha)$ совпадает с функцией $\tilde{V}(\alpha)$ на множестве $\alpha \leq \alpha_1$. Если $\lambda_+ < \infty$, $\varphi'(\lambda_+) < \infty$ и $\lambda_1 = \lambda_+$, то $\alpha_1 = \alpha_+ < \infty$ и $\tilde{V}_1(\alpha) = \tilde{V}(\alpha)$ при всех значениях α . В общем случае $\tilde{V}_1 \leq \tilde{V}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 9. Пусть λ_2 — произвольное число, меньшее λ_1 , α_2 — решение уравнения $\lambda(\alpha) = \lambda_2$ и $\tilde{V}_2(\alpha)$ — функция, построенная как $\tilde{V}_1(\alpha)$ с заменой λ_1 и α_1 на λ_2 и α_2 соответственно.

Для любого $U > 0$ определим случайную величину $\Xi(U)$ с распределением

$$P\{\Xi(U) \geq y\} = \max \left(\sup_{u < U} P\{u + \xi(u) \geq U + y\}, \sup_{u \geq U} P\{\xi(u) \geq y\} \right).$$

Из слабой сходимости $\xi(u) \Rightarrow \xi$ при $u \rightarrow \infty$ вытекает, что $\Xi(U)$ слабо сходится к ξ при $U \rightarrow \infty$, причем в силу условия (3.8) сходятся и экспоненциальные моменты: для любого $\lambda \in [0, \lambda_2]$

$$Ee^{\lambda \Xi(U)} \rightarrow Ee^{\lambda \xi} \quad \text{при } U \rightarrow \infty.$$

Обозначим $\varphi(U, \lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda \Xi(U)}$, $\beta(U) = \sup\{\lambda: \varphi(U, \lambda) \leq 1\}$, $\alpha_0(U) = \varphi'(U, \beta(U))$, $\Lambda(U, \alpha)$ — функцию отклонений случайной величины $\Xi(U)$, $\lambda(U, \alpha) = \Lambda'(U, \alpha)$, $\alpha_2(U)$ — решение уравнения $\lambda(U, \alpha) = \lambda_2$ и

$$\tilde{V}_2(U, \alpha) = \begin{cases} \beta(U), & \text{если } \alpha \leq \alpha_0(U), \\ \frac{\Lambda(U, \alpha)}{\alpha}, & \text{если } \alpha_0(U) \leq \alpha \leq \alpha_2(U), \\ \frac{\Lambda(U, \alpha_2(U)) + (\alpha - \alpha_2(U)) \lambda_2}{\alpha}, & \text{если } \alpha \geq \alpha_2(U). \end{cases}$$

Все эти величины определены при достаточно больших значениях U . На множестве $\alpha \leq \alpha_2$ (α_2 — решение уравнения $\lambda(\alpha) = \lambda_2$) функция отклонений $\Lambda(U, \alpha)$ сходится к $\Lambda(\alpha)$ и, соответственно,

$$\tilde{V}_2(U, \alpha) \rightarrow \tilde{V}_2(\alpha) \quad \text{при } U \rightarrow \infty. \quad (3.10)$$

Рассмотрим однородную цепь Маркова $Y_n(U) = (Y_{n-1}(U) + \Xi_n(U))^+$, где $\Xi_n(U)$ — независимые копии случайной величины $\Xi(U)$. По построению для любых начальных состояний v и u , подчиненных условиям $v \leq u$ и $u \geq U$, выполняется неравенство $v + \xi(v) \leq_{st} u + \Xi(U)$. Поэтому однородная цепь $U + Y_n(U)$ мажорирует по вероятности исходную цепь X_n . В частности,

$$\mathbf{P}\{X(n) \geq x\} \leq \mathbf{P}\{U + Y_n(U) \geq x\}.$$

Отсюда и из (3.5) получаем оценку

$$\mathbf{P}\{X(n) \geq x\} \leq e^{-(x-U)\tilde{V}(U, (x-U)/n)}.$$

Утверждение леммы вытекает теперь из неравенства $\tilde{V}_2(U, \alpha) \leq \tilde{V}(U, \alpha)$, сходимости (3.10) и произвольности выбора числа λ_2 , меньшего λ_1 .

В случае, когда случайная величина ξ ограничена сверху, предельным переходом по λ_1 , $\lambda_1 \rightarrow \infty$, (соответственно, $\alpha_1 \rightarrow \alpha_+$) получаем из леммы 9 следующее

Следствие 6. Пусть $\lambda_+ = \infty$ и $\alpha_+ < \infty$, т.е. случайная величина ξ ограничена сверху значением α_+ . Пусть для любого $\lambda > 0$ выполнено условие (3.8) и $\mathbf{E}e^{\lambda X(0)}$ конечно. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при $x \rightarrow \infty$ имеют место соотношения

$$x^{-1} \ln \pi_n(x) \leq -\tilde{V}\left(\frac{x}{n}\right) + o(1)$$

равномерно по n таким, что $x/n \leq \alpha_+ - \varepsilon$, и сходимость

$$x^{-1} \ln \pi_n(x) \rightarrow -\infty$$

равномерно по n таким, что $x/n \geq \alpha_+ + \varepsilon$.

3.3. Оценки снизу для вероятностей больших отклонений асимптотически однородной цепи Маркова. В настоящем пункте рассматривается асимптотически однородная цепь Маркова X со значениями в $\mathbf{R}$. Начальное распределение цепи полагается произвольным.

Лемма 10. Пусть α_1 — произвольное число, большее α_0 (в случае ограниченности случайной величины ξ предполагаем дополнительно, что $\alpha_1 < \alpha_+$). Пусть для любого уровня $u \in \mathbf{R}$ найдется $n_0 = n_0(u)$ такое, что

$$\mathbf{P}\{X(n_0) \geq u\} > 0. \quad (3.11)$$

Тогда при $x \rightarrow \infty$ имеет место соотношение

$$x^{-1} \ln \pi_n(x) \geq -\tilde{V}\left(\frac{x}{n}\right) + o(1)$$

равномерно по тем значениям n , для которых $\alpha_0 \leq x/n \leq \alpha_1$.

Если, кроме того, для любого $u \in \mathbf{R}$ найдется n_0 такое, что

$$\inf_{n \geq n_0} \mathbf{P}\{X(n) \geq u\} > 0, \quad (3.12)$$

то при $x \rightarrow \infty$ имеет место соотношение

$$x^{-1} \ln \pi_n(x) \geq -\beta + o(1)$$

равномерно по тем значениям n , для которых $x/n \leq \alpha_0$.

З а м е ч а н и е 5. Ввиду слабой сходимости $\xi(u) \Rightarrow \xi$ при $u \rightarrow \infty$ и условия $\mathbf{P}\{\xi > 0\} > 0$ найдется уровень U такой, что для любого $u \geq U$ выполняется неравенство $\mathbf{P}\{\xi(u) \geq \delta\} \geq \delta$ для некоторого $\delta > 0$. Поэтому для выполнения условия (3.11) необходимо и достаточно, чтобы при некотором n событие $\{X(n) \geq U\}$ имело положительную вероятность. Соответственно, условие (3.12) эквивалентно тому, что при некотором N вероятности событий $\{X(n) \geq U\}$ равномерно по $n \geq N$ отделены от нуля.

З а м е ч а н и е 6. Достаточным условием для выполнения (3.12) является слабая сходимость распределения (эргодичность) цепи $X(n)$ к распределению неограниченной сверху случайной величины $X(\infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 10. Для любого u рассмотрим случайную величину $\eta(u)$ с распределением $\mathbf{P}\{\eta(u) \geq y\} = \inf_{v \geq u} \mathbf{P}\{\xi(v) \geq y\}$. По построению $\eta(u) \leq_{st} \xi(v)$ для любых u и v , связанных неравенством $u \leq v$. В силу асимптотической однородности цепи $\eta(u) \Rightarrow \xi$ при $u \rightarrow \infty$. Обозначим через $T_i(u) = \eta_1(u) + \dots + \eta_i(u)$ сумму i независимых копий случайной величины $\eta(u)$. По построению для любых $u \leq v \leq y$ и m справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X(v, k) \geq v \text{ при всех } k < m, X(v, m) \geq v + y\} \\ \geq \mathbf{P}\{T_k(u) \geq 0 \text{ при всех } k < m, T_m(u) \geq y\}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Для любого момента времени $N < n$ вероятность для $X(n)$ превзойти уровень x можно оценить снизу следующим образом ($U \geq 0$):

$$\begin{aligned}\pi_n(x) &\geq \mathbf{P}\{X(N) \geq U, X(k) \geq X(N) \text{ при } N < k < n, X(n) - X(N) \geq x\} \\ &= \mathbf{P}\{X(N) \geq U\} \mathbf{P}\{X(k) \geq X(N) \text{ при } N < k < n, \\ &\quad X(n) - X(N) \geq x \mid X(N) \geq U\} \equiv p_1 p_2. \quad (3.14)\end{aligned}$$

Оценим снизу p_1 и p_2 . В силу условия (3.11) для любого фиксированного U найдется N такое, что $p_1 > 0$. Используя (3.13) при $y = x$ и $m = n - N$, получаем следующую оценку для p_2 :

$$p_2 \geq \mathbf{P}\{T_k(U) \geq 0 \text{ при всех } k < n - N, T_{n-N}(U) \geq x\}.$$

Подставляя полученные оценки в (3.14), приходим к неравенству

$$\pi_n(x) \geq p_1 \mathbf{P}\{T_k(U) \geq 0 \text{ при всех } k < n - N, T_{n-N}(U) \geq x\}. \quad (3.15)$$

Отсюда в силу леммы 5 получаем при $x \rightarrow \infty$ следующую оценку:

$$x^{-1} \ln \pi_n(x) \geq \tilde{V}_{\eta(U)} \left(\frac{x}{n - N} \right) + o(1), \quad (3.16)$$

равномерно по n таким, что $\alpha_0 \leq x/(n - N) \leq \alpha_1$, где $\tilde{V}_{\eta(U)}$ — функция $\tilde{V}$, отвечающая случайной величине $\eta(U)$.

Так как семейство случайных величин $\eta(u)$ стохастически не убывает и слабо сходится к ξ , то $\tilde{V}_{\eta(u)}(\alpha) \rightarrow \tilde{V}(\alpha)$ при $u \rightarrow \infty$ равномерно по $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$. Поэтому из (3.16), ввиду произвольности выбора уровня U , вытекает первое утверждение леммы.

Для доказательства второго утверждения леммы положим $N = n - x/\alpha_0$ (с известной оговоркой о целочисленности N). Пусть U — произвольный уровень. В силу условия (3.12) найдется n_0 такое, что при всех $N \geq n_0$ вероятность $p_1 = p_1(N)$ не меньше некоторого положительного числа δ . Неравенство (3.15) превращается в следующее:

$$\pi_n(x) \geq \delta \mathbf{P}\left\{T_k(U) \geq 0 \text{ при всех } k < \frac{x}{\alpha_0}, T_{x/\alpha_0}(U) \geq x\right\}.$$

Оценивая последнюю вероятность с помощью леммы 5, получаем при $x \rightarrow \infty$ соотношение $x^{-1} \ln \pi_n(x) \geq \tilde{V}_{\eta(U)}(\alpha_0) + o(1)$ равномерно по тем значениям n , для которых $x/n \leq \alpha_0$, что, как и ранее, завершает доказательство.

3.4. Грубая (логарифмическая) асимптотика вероятностей больших уклонений асимптотически однородной цепи. В настоящем пункте также предполагается, что цепь Маркова X принимает значения в $\mathbf{R}$ и является асимптотически однородной. Из доказанных выше лемм 9, 10 и следствия 6 вытекает следующая

Теорема 1. Пусть $\lambda_1 \in [\beta, \lambda_+)$, $\lambda_1 < \infty$, а если $\lambda_1 = \lambda_+$, то дополнительно предполагаем $\varphi'(\lambda_1) < \infty$. Обозначим через α_1 решение уравнения $\lambda(\alpha) = \lambda_1$. Пусть для любого $\lambda \in (0, \lambda_1)$ начальное распределение цепи имеет конечный экспоненциальный момент $Ee^{\lambda X(0)}$, а скачки цепи удовлетворяют условию (3.8). Пусть выполнено условие (3.12). Тогда при $x \rightarrow \infty$ имеет место равенство

$$x^{-1} \ln \pi_n(x) = -\tilde{V}\left(\frac{x}{n}\right) + o(1), \quad (3.17)$$

равномерно по n таким, что $x/n \leq \alpha_1$.

Если $\lambda_1 = \lambda_+$, то (3.17) имеет место, если $x \rightarrow \infty$ равномерно по n таким, что $\sup x/n < \infty$.

Отметим, что условие на $X(0)$ может быть ослаблено в зависимости от того, как растут n и x .

§ 4. Крамеровский случай: точная асимптотика $\pi_n(x)$ для частично однородной цепи

Пусть X есть U -частично однородная харрисовская цепь со значениями в $\mathbf{R}$ и $0 < \beta < \lambda_+$. Предполагаем, что мера π_n сходится к некоторой (с необходимостью инвариантной) неограниченной справа мере π в метрике полной вариации, т.е.

$$\sup_{B \subseteq \mathbf{R}} |\pi_n(B) - \pi(B)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.1)$$

где супремум берется по всем борелевским множествам B . Для счетной цепи X сходимость по вариации имеет место автоматически, если цепь неразложимая, непериодическая и допускает инвариантное распределение (при этом π есть инвариантное распределение); для вещественно-значных цепей условия сходимости по вариации можно найти, например, в [12], [15].

В настоящем параграфе предполагаем, что при некотором λ_1 из интервала (β, λ_+) скачки цепи удовлетворяют условию

$$\sup_{u < U} \int_0^\infty e^{\lambda_1 v} P(u, dv) < \infty, \quad (4.2)$$

а начальное распределение π_0 имеет конечный экспоненциальный момент того же порядка:

$$Ee^{\lambda_1 X(0)} < \infty. \quad (4.3)$$

Пусть α_1 — решение уравнения $\lambda(\alpha) = \lambda_1$. Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть распределение F нерешетчатое.

(а) Пусть $y = y_n(x) \in \mathbf{R}$ таково, что $n = x/\alpha_0 + y\sqrt{x}$; $z(x)$ — любая функция такая, что $z(x) \rightarrow \infty$, $z(x) = o(x^{1/6})$ при $x \rightarrow \infty$. Тогда при $x \rightarrow \infty$ равномерно по всем значениям n таким, что $y_n(x) \geq -z(x)$, имеет место соотношение

$$\pi_n(x) = (c(\alpha_0) + o(1)) e^{-\beta x} \Phi\left(\frac{y\alpha_0^{3/2}}{\sigma(\alpha_0)}\right),$$

где $\Phi(v)$ — функция распределения стандартного нормального закона, константа $c(\alpha_0) > 0$ не зависит от начального распределения цепи X (см. (4.10)).

В частности, если $\hat{y}(x) \rightarrow \infty$, то при $x \rightarrow \infty$ имеет место равномерная по $n \geq x/\alpha_0 + \hat{y}(x)\sqrt{x}$ асимптотика

$$\pi_n(x) \sim c(\alpha_0) e^{-\beta x}.$$

(б) Если $x/n \rightarrow \alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$, то при $x \rightarrow \infty$

$$\pi_n(x) \sim c(\alpha) n^{-1/2} e^{-xV(x/n)},$$

где непрерывная по α функция $c(\alpha)$, зависящая от начального распределения цепи X , задается при $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$ формулой (4.14).

Доказательство. Для упрощения обозначений будем использовать символ π_n также для обозначения распределения $X(n)$:

$$\pi_n(B) = \mathbf{P}\{X(n) \in B\},$$

так что $\pi_n(x) \equiv \pi_n([x, \infty))$. Это нигде не приводит к недоразумениям. В основе последующих рассмотрений лежит формула полной вероятности по последнему попаданию цепи в множество $(-\infty, U]$:

$$\begin{aligned} \pi_n(x) &= \int_U^\infty \pi_0(dv) q_n(U-v, x-v) \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\infty}^U \pi_k(du) \int_U^\infty P(u, dv) q_{n-k-1}(U-v, x-v), \end{aligned} \quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned} q_k(U-v, x-v) &\equiv \mathbf{P}\{X(v, l) \geq U, l=1, \dots, k-1; X(v, k) \geq x\} \\ &= \mathbf{P}\{S_l \geq U-v, l=1, \dots, k-1; S_k \geq x-v\}, \end{aligned}$$

в силу U -частичной однородности цепи. $\int_U^\infty$ в (4.4) понимается как $\int_{U+0}^\infty$. Обозначение $q_k(v, x)$ было введено в лемме 5.

Разбивая область интегрирования в интегралах по переменной v на две части $(U, U_1]$ и (U_1, ∞) , получаем неравенство

$$\begin{aligned} & \left| \pi_n(x) - \int_U^{U_1} \pi_0(dv) q_n(U-v, x-v) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\infty}^U \pi_k(du) \int_U^{U_1} P(u, dv) q_{n-k-1}(U-v, x-v) \right| \\ & \leq \int_{U_1}^{\infty} \pi_0(dv) q_n(U-v, x-v) \\ & \quad + \sum_{k=0}^{n-1} \sup_{u < U} \int_{U_1}^{\infty} P(u, dv) q_{n-k-1}(U-v, x-v). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Наша ближайшая цель — выбрать уровень $U_1 = U_1(x)$, растущий достаточно медленно, но так, чтобы оценка в правой части была бесконечно малой по сравнению с объявленной асимптотикой $\pi_n(x)$ во всем спектре уклонений.

Поскольку $q_k(U-v, x-v) \leq \mathbf{P}\{S_k \geq x-v\}$, то в силу экспоненциального неравенства Чебышева для любого $\lambda \geq \beta$ имеет место оценка

$$\sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k-1}(U-v, x-v) \leq e^{-(x-v)\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi^{n-k-1}(\lambda) \leq n e^{v\lambda} e^{-x\lambda} \varphi^n(\lambda),$$

так как $\varphi(\lambda) \geq 1$. Если $x/n \geq \alpha_0$, то, полагая здесь $\lambda = \lambda(x/n)$, получаем при таких n неравенство

$$\sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k-1}(U-v, x-v) \leq n e^{v\lambda(x/n)} e^{-xV(x/n)} \leq c_1 x e^{v\lambda(x/n)} e^{-xV(x/n)}.$$

Если же $x/n \leq \alpha_0$, то применим неравенство (2.11), в силу которого

$$\sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k-1}(U-v, x-v) \leq c_2 e^{v\beta} e^{-\beta x}.$$

Итак, при любом значении n правая часть в (4.5) не превосходит

$$\begin{aligned} & c_3 x e^{-x\tilde{V}(x/n)} \left(\int_{U_1}^{\infty} \pi_0(dv) + \sup_{u < U} \int_{U_1}^{\infty} P(u, dv) \right) e^{-v\tilde{\lambda}(x/n)} \\ & \leq c_4 x e^{-x\tilde{V}(x/n)} e^{-U_1(\lambda_1 - \tilde{\lambda}(x/n))}, \end{aligned}$$

ввиду условий (4.2) и (4.3).

В каждом из двух случаев (а) и (б) найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $\lambda_1 - \tilde{\lambda}(x/n) > \varepsilon$ при всех достаточно больших x . Положим $U_1 = 2\varepsilon^{-1} \ln x$.

Тогда правая часть последней оценки не превосходит $c_4 e^{-x\tilde{V}(x/n)}/x$. Учитывая это обстоятельство в (4.5), приходим при $x \rightarrow \infty$ к соотношению

$$\begin{aligned} \pi_n(x) = & \int_U^{U_1} \pi_0(dv) q_n(U-v, x-v) \\ & + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\infty}^U \pi_k(du) \int_U^{U_1} P(u, dv) q_{n-k-1}(U-v, x-v) \\ & + o\left(\frac{e^{-x\tilde{V}(x/n)}}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Дальнейший ход вычислений существенно различается в случаях (а) и (б) теоремы.

Случай (а). Разбивая сумму в равенстве (4.6) на две и учитывая неравенство $\tilde{V}(x/n) \geq \beta$, получаем

$$\begin{aligned} \pi_n(x) = & \int_U^{U_1} \pi_0(dv) q_n(U-v, x-v) + \left(\sum_{k=0}^{\ln x} + \sum_{k=\ln x}^{n-1} \right) \\ & \times \int_{-\infty}^U \pi_k(du) \int_U^{U_1} P(u, dv) q_{n-k-1}(U-v, x-v) + o(e^{-x\beta}) \\ \equiv & I_0 + \Sigma_1 + \Sigma_2 + o(e^{-x\beta}). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Основной вклад в асимптотику вероятности $\pi_n(x)$ вносит вторая из сумм, в то время как вклад остальных слагаемых пренебрежимо мал. Проверим это.

Равномерно по $k > \ln x$ имеет место сходимость по вариации π_k к π при $x \rightarrow \infty$. Следовательно, имеет место эквивалентность

$$\begin{aligned} \Sigma_2 \sim & \int_{-\infty}^U \pi(du) \int_U^{U_1} P(u, dv) \sum_{k=\ln x}^{n-1} q_{n-k-1}(U-v, x-v) \\ \sim & \int_{-\infty}^U \pi(du) \int_U^{U_1} P(u, dv) b(U-v, \alpha_0) c_H e^{-\beta(x-v)} \Phi\left(\frac{y\alpha_0^{3/2}}{\sigma(\alpha_0)}\right), \end{aligned} \quad (4.8)$$

ввиду следствия 5, где, как и ранее, $b(U-v, \alpha) = \mathbf{P}\{M_-^{(\alpha)} \geq U-v\}$.

Покажем относительную малость интеграла I_0 и суммы Σ_1 . Последовательно используя второе утверждение следствия 5 и условия (4.3), (4.2), приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} I_0 + \Sigma_1 = & o(e^{-\beta x}) \left(\int_U^{U_1} \pi_0(dv) e^{\beta v} + \sup_{u < U} \int_U^{U_1} P(u, dv) \right) e^{\beta v} \\ = & o(e^{-\beta x}). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Подставляя (4.9) и (4.8) в (4.7), получаем утверждение (а) теоремы с константой

$$c(\alpha_0) = \frac{1}{\beta \alpha_0} \int_{-\infty}^U \pi(du) \int_U^\infty b(U-v, \alpha_0) e^{\beta v} P(u, dv). \quad (4.10)$$

Случай (б). Разобьем сумму в равенстве (4.6) на две:

$$\begin{aligned} \pi_n(x) &= \int_U^{U_1} \pi_0(dv) q_n(U-v, x-v) \\ &+ \left(\sum_{k=0}^{n^{1/7}} + \sum_{k=n^{1/7}}^{n-1} \right) \int_{-\infty}^U \pi_k(du) \int_U^{U_1} P(u, dv) q_{n-k-1}(U-v, x-v) \\ &+ o\left(\frac{e^{-xV(x/n)}}{\sqrt{n}}\right) \equiv I_0 + \Sigma_1 + \Sigma_2 + o\left(\frac{e^{-xV(x/n)}}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Поскольку $x/n \rightarrow \alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$, по лемме 5 при $x \rightarrow \infty$ равномерно по $k = o(n)$ и $v = o(x)$ имеет место соотношение

$$q_{n-k}(U-v, x-v) = \mathbf{P}\{S_{n-k} \geq x-v\} (b(U-v, \alpha) + o(1)). \quad (4.12)$$

Кроме того, по следствию 2 имеем при $k = o(n)$ равномерно по $v \in [U, U_1]$ (соответственно, $v^2/n \leq U_1^2/n \rightarrow 0$) соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_{n-k} \geq x-v\} &= \frac{\widehat{c}(\alpha) + o(1)}{\sqrt{n-k}} e^{-(n-k)\Lambda((x-v)/(n-k))} \\ &= (\widehat{c}(\alpha) + o(1)) n^{-1/2} e^{-(n-k)\Lambda(x/(n-k)) + v\lambda(x/(n-k)) + o(1)} \\ &\sim \widehat{c}(\alpha) n^{-1/2} e^{-xV(x/(n-k)) + v\lambda(\alpha) + o(v)}, \end{aligned}$$

где функция $\widehat{c}(\alpha) = 1/\sqrt{2\pi\sigma^{(\alpha)}}\lambda(\alpha)$ непрерывна по α . Продолжая вычисления, выводим равномерное по $k \leq n^{1/7}$ и $v \leq U_1 = O(\ln n)$ соотношение

$$\mathbf{P}\{S_{n-k} \geq x-v\} \sim (\widehat{c}(\alpha) + o(1)) n^{-1/2} e^{-xV(x/n) - \alpha^2 kV'(x/n) + v\lambda(\alpha) + o(v)}.$$

Как отмечалось в разделе 2.7, $V'(\alpha) = \alpha^{-2} \ln \varphi(\lambda(\alpha))$. Отсюда, учитывая (4.12), имеем асимптотику

$$I_0 + \Sigma_1 \sim c(\alpha) n^{-1/2} e^{-xV(x/n)}, \quad (4.13)$$

где

$$\begin{aligned} c(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^{(\alpha)}}\lambda(\alpha)} \\ &\times \left(\int_U^\infty \pi_0(dv) + \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\varphi^k(\lambda(\alpha))} \int_{-\infty}^U \pi_k(du) \int_U^\infty P(u, dv) \right) \\ &\times b(U-v, \alpha) e^{\lambda(\alpha)v}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Покажем, что сумма Σ_2 в (4.11) пренебрежимо мала по сравнению с Σ_1 . При $k \geq n^{1/7}$ и $v \leq U_1 = O(\ln n)$ для достаточно больших n выполняется неравенство $(x-v)/(n-k) \geq x/n + n^{1/8}/x$. Так как $x/n \rightarrow \alpha > \alpha_0$, то, в частности, $(x-v)/(n-k) > \alpha_0$. Поэтому ввиду экспоненциального неравенства Чебышева и неравенства $V((x-v)/(n-k)) \geq V(x/n) + V'(x/n) n^{1/8}/x$ (верного ввиду выпуклости функции V) имеем при $k \geq n^{1/7}$ и $v \leq U_1$ оценки

$$P\{S_{n-k} \geq x-v\} \leq e^{v\lambda((x-v)/(n-k))} e^{-xV((x-v)/(n-k))} \leq e^{v\lambda_1} e^{-xV(x/n)} e^{-n^{1/9}}.$$

Отсюда и из условия (4.2) вытекает, что $\Sigma_2 = o(e^{-xV(x/n)}/\sqrt{n})$. Подставляя эту оценку и асимптотику (4.13) в (4.11), получаем утверждение (б) теоремы.

Пусть распределение F решетчатое с минимальной решеткой $\{kh, k \in \mathbb{Z}\}$, а цепь X в области $[U, \infty)$ принимает значения тоже лишь из этой решетки. Тогда утверждения теоремы для вероятностей $\pi_n(x)$ остаются справедливыми, если ограничиться лишь значениями x из решетки, а константы $c(\alpha_0)$ и $c(\alpha)$ домножить на $\beta h/(1 - e^{-\beta h})$ и $\lambda(\alpha) h/(1 - e^{-\lambda(\alpha)h})$ соответственно.

§ 5. Промежуточный случай: точная асимптотика $\pi_n(x)$ для асимптотически однородной цепи

В настоящем параграфе исследуется асимптотически однородная в пространстве цепь Маркова в промежуточном случае. Здесь картина совершенно иная по сравнению с крамеровским случаем и асимптотика вероятностей больших отклонений найдена в явном виде при всех значениях времени n .

По сравнению с предыдущими параграфами здесь мы рассмотрим более общую ситуацию. Именно, всюду в этом параграфе предполагаем, что существует случайная величина η с распределением G и преобразованием Лапласа $\psi(\lambda) = E e^{\lambda\eta}$ такая, что для некоторого $V \in \mathbb{R}$ выполняется

$$v + \xi(v) \leq_{st} V + \eta \quad \text{при } v < V, \quad \xi(v) \leq_{st} \eta \quad \text{при } v \geq V. \quad (5.1)$$

Основные условия накладываются на η : $E\eta < 0$ и $\psi(\beta) < 1$, где $\beta = \sup\{\lambda: \psi(\lambda) \leq 1\}$. Отметим, что теперь параметр β , играющий всюду важную роль, относится к распределению G мажоранты η , а не к распределению F величины ξ .

Напомним определения некоторых классов функций и распределений, играющих важную роль при исследовании вероятностей больших отклонений в промежуточном случае.

Следуя [5], положительную функцию g будем называть *локально степенной*, если для всякого фиксированного t предел при $u \rightarrow \infty$ отношения $g(u+t)/g(u)$ равен 1. Аналогично предыдущему положим для краткости $G(x) = G([x, \infty))$, $\pi(x) = \pi([x, \infty))$.

О п р е д е л е н и е 2. Говорим, что нерешетчатое распределение G в $\mathbf{R}$ принадлежит классу $\mathcal{S}(\gamma)$, $\gamma \geq 0$, если

(а) функция $e^{\gamma u} G(u)$ локально степенная;

(б) $\psi(\gamma) \equiv \int_{\mathbf{R}} e^{\gamma u} G(du) < \infty$;

(в) свертка распределения G с самим собой удовлетворяет соотношению асимптотической эквивалентности $G * G(u) \sim 2\psi(\gamma) G(u)$ при $u \rightarrow \infty$.

Говорим, что распределение G в $\mathbf{Z}$ принадлежит классу $\mathcal{S}(\gamma)$, $\gamma \geq 0$, если свойства (а)–(в) выполняются для $u \in \mathbf{Z}$.

Класс $\mathcal{S}(\gamma)$ включает в себя, в частности, распределения с хвостами типа $e^{-\gamma u} g(u)$, где $g(u)$ — интегрируемая функция, правильно меняющаяся на бесконечности. Отметим, что если распределение случайной величины η принадлежит классу $\mathcal{S}(\gamma)$ и $\psi(\gamma) \leq 1$, то $\beta = \gamma$.

5.1. Оценки сверху для хвостов достационарного и стационарного распределений цепи. В этом пункте приводится некоторое обобщение леммы 2 из [5], касающееся оценки сверху хвоста распределения цепи со значениями в $\mathbf{R}$ в промежуточном случае.

Лемма 11. Пусть распределение G случайной величины η принадлежит классу $\mathcal{S}(\beta)$. Тогда если цепь X допускает (вообще говоря, не единственную) инвариантную меру π , то

$$\sup_x \frac{\pi(x)}{G(x)} < \infty. \quad (5.2)$$

Если начальное распределение π_0 цепи таково, что $\pi_0(x) \leq c' G(x)$ для некоторого c' , то

$$\sup_{n,x} \frac{\pi_n(x)}{G(x)} < \infty. \quad (5.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим однородную в пространстве цепь $Y = \{Y(n)\}$ с неотрицательными значениями, определенную равенством $Y(n+1) = (Y(n) + \eta_{n+1})^+$, где случайные величины η_n суть независимые копии η . В силу условия (5.1) цепь Маркова $V + Y(n)$ мажорирует цепь $X(n)$ и, следовательно,

$$\pi(x) \leq \pi_Y(x - V), \quad (5.4)$$

где π_Y — инвариантная мера цепи Y . Поскольку $\mathbf{E} e^{\beta \eta} < 1$ и распределение случайной величины η принадлежит классу $\mathcal{S}(\beta)$, то в силу теоремы 1 из [11] $\pi_Y(x) \sim c_1 \mathbf{P}\{\eta \geq x\}$ при $x \rightarrow \infty$ для некоторого c_1 . Поскольку функция $e^{\beta t} G(t)$ локально степенная, $\pi_Y(x - V) \sim c_1 e^{\beta V} G(x)$. Подставляя полученную эквивалентность в (5.4), приходим к оценке (5.2).

Докажем (5.3). Пусть $Y(0) = 0$ и, стало быть, $Y(1) = \eta_1^+$. Ввиду условия $\pi_0(x) \leq c'G(x)$ и того, что функция $e^{\beta x}G(x)$ локально степенная, найдется достаточно большой уровень V' такой, что $X(0) \leq_{st} V' + Y(1)$. Отсюда в силу условия (5.1) $X(n) \leq_{st} V' + Y(n+1)$ для любого n и, соответственно,

$$\pi_n(x) \leq \mathbf{P}\{Y(n+1) \geq x - V'\}.$$

Последнее неравенство влечет (5.3), поскольку, как известно, однородная цепь $Y(n)$ при нулевом начальном условии не убывает по распределению и, следовательно, $\mathbf{P}\{Y(n+1) \geq x - V'\} \leq \pi_Y(x - V')$ для любого n . Лемма доказана.

5.2. Точная асимптотика достационарных распределений.

Теорема 3. Пусть распределение G случайной величины η нерешетчатое и принадлежит классу $\mathcal{S}(\beta)$. Пусть выполнено условие (5.1) и для каждого $u \in \mathbf{R}$ существует $c(u)$ такое, что

$$\frac{\mathbf{P}\{\xi(u) \geq t\}}{G(t)} \rightarrow c(u) \quad (5.5)$$

при $t \rightarrow \infty$ равномерно по u из любого компакта. Кроме того, предполагаем выполненной сходимость (4.1). Тогда:

(i) если начальное распределение π_0 таково, что $\pi_0(x)/G(x) \rightarrow c_0 \geq 0$, то имеет место равномерное по $n \geq 0$ соотношение

$$\pi_n(x) = (c_n + o(1))G(x) \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \quad (5.6)$$

где c_n при $n \geq 1$ определяется рекуррентным образом: $c_n = \alpha_{n-1} + \varphi(\beta)c_{n-1}$,

$$\alpha_{n-1} = \int_{\mathbf{R}} c(u) e^{\beta u} \pi_{n-1}(du) \geq 0;$$

(ii) если $\pi_0(x) \leq c'G(x)$, то при $n, x \rightarrow \infty$

$$\pi_n(x) = (c_\infty + o(1))G(x), \quad (5.7)$$

где

$$c_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{\alpha_\infty}{1 - \varphi(\beta)}, \quad \alpha_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \int_{\mathbf{R}} c(u) e^{\beta u} \pi(du) \geq 0.$$

З а м е ч а н и е 7. Пусть распределение G сосредоточено на решетке целых чисел, причем данная решетка минимальна. Тогда утверждения теоремы остаются справедливыми, если значения цепи X выше некоторого уровня, а параметров t и x в (5.5), (5.6) и (5.7) — целые.

З а м е ч а н и е 8. Поскольку $\varphi(\beta) \leq \psi(\beta) < 1$ и $c(u) \leq c$, то в силу леммы 11 все константы α_n конечны и, более того, последовательность $\{\alpha_n\}$, а вместе с ней и $\{c_n\}$, равномерно ограничена.

Из п. (ii) теоремы вытекает, что при $n, x \rightarrow \infty$ асимптотика вероятности $\pi_n(x)$ совпадает с асимптотикой хвоста инвариантной меры: $\pi_n(x) = (1 + o(1)) \pi(x)$.

Пусть случайные величины ξ_n независимы и распределены одинаково с ξ , $\varphi(\beta) < 1$ и распределение случайной величины ξ принадлежит классу $\mathcal{S}(\beta)$. Пусть X — однородная цепь в $\mathbf{R}^+$, т.е. $X(n+1) = (X(n) + \xi_{n+1})^+$. Применяя теорему 3 в этом конкретном случае, получаем, что для однородных цепей

$$\pi_n(x) = (c_n + o(1)) F(x), \quad F(x) = F([x, \infty)),$$

при $x \rightarrow \infty$ равномерно по $n \geq 1$, где $c_n = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi^k(\beta) \mathbf{E} e^{\beta X(n-1-k)}$.

Ввиду (1.2) результаты настоящего параграфа для однородных цепей, относящиеся к случаю фиксированного n , повторяют результаты работы [16]; при этом мы даем другое выражение для коэффициентов c_n . Кроме того, мы доказываем, что

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{k \leq n} S_k \geq x\right\} \sim \mathbf{P}\left\{\sup_k S_k \geq x\right\} \sim c_\infty F(x) \quad \text{при } n, x \rightarrow \infty.$$

Доказательство теоремы 3 проведем в нерешетчатом случае (в решетчатом случае следует внести лишь минимальные изменения, связанные с целочисленностью некоторых параметров). Поскольку временной параметр n принимает лишь счетное число значений, для доказательства теоремы достаточно проверить, что

- (а) (5.6) выполнено при $x \rightarrow \infty$ для любого фиксированного n ;
- (б) выполнено (5.7).

Фиксируем $U > V$. Для любого $x > 2U$ имеем равенство

$$\begin{aligned} \frac{\pi_{n+1}(x)}{G(x)} &= \left(\int_{-\infty}^{-U} + \int_{-U}^U + \int_U^{x-U} + \int_{x-U}^{\infty} \right) \frac{\mathbf{P}\{u + \xi(u) \geq x\}}{G(x)} \pi_n(du) \\ &\equiv I_1(U, n, x) + \dots + I_4(U, n, x). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Рассмотрим отдельно каждое из этих четырех слагаемых.

Поскольку функция $e^{\beta x} \mathbf{P}\{\eta \geq x\}$ локально степенная, то ввиду условия (5.5) имеем равномерную по $|u| \leq U$ сходимоть

$$\frac{\mathbf{P}\{\xi(u) \geq x - u\}}{G(x)} \rightarrow c(u) e^{\beta u} \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (5.9)$$

Следовательно, равномерно по n

$$I_2(U, n, x) \rightarrow \int_{-U}^U c(u) e^{\beta u} \pi_n(du) \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (5.10)$$

Докажем, что слагаемые $I_1(U, n, x)$ и $I_3(U, n, x)$ в известном смысле пренебрежимо малы. Ввиду условия (5.1) слагаемое $I_1(U, n, x)$ допускает оценку

$$I_1(U, n, x) \leq \frac{G(x - V)}{G(x)} (1 - \pi_n(-U)).$$

Так как функция $e^{\beta x} G(x)$ локально степенная, а семейство распределений $\{\pi_n\}$ слабо компактно, из последней оценки имеем

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \left(\sup_n I_1(U, n, x) \right) \leq e^{\beta V} \sup_n (1 - \pi_n(-U)) \equiv I_1(U), \quad (5.11)$$

$$\lim_{U \rightarrow \infty} I_1(U) = 0.$$

Оценим слагаемое $I_3(U, n, x)$. Используя условие (5.1) и интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} I_3(U, n, x) &\leq \int_U^{x-U} \frac{G(x-u)}{G(x)} \pi_n(du) \\ &= - \frac{\pi_n(u) G(x-u)}{G(x)} \Big|_U^{x-U} + \int_U^{x-U} \frac{\pi_n(u) du G(x-u)}{G(x)} \\ &\leq \frac{\pi_n(U) G(x-U)}{G(x)} + \int_U^{x-U} \frac{\pi_n(x-v) G(dv)}{G(x)} \\ &\equiv I_{31}(U, n, x) + I_{32}(U, n, x). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Для любого фиксированного U

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \left(\sup_n I_{31}(U, n, x) \right) \leq \sup_n \pi_n(U) e^{\beta U},$$

и, следовательно, в силу леммы 11

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \left(\sup_n I_{31}(U, n, x) \right) \leq \hat{c} G(U) e^{\beta U} = I_{31}(U), \quad (5.13)$$

$$\lim_{U \rightarrow \infty} I_{31}(U) = 0.$$

Повторно используя лемму 11, оценим слагаемое I_{32} :

$$I_{32}(U, n, x) \leq \hat{c} \int_U^{x-U} \frac{G(x-v) G(dv)}{G(x)}.$$

Поэтому, как следует из [13] (см. формулу (2) там),

$$\lim_{U \rightarrow \infty} \limsup_{x \rightarrow \infty} \left(\sup_n I_{32}(U, n, x) \right) = 0. \quad (5.14)$$

Подставляя (5.13) и (5.14) в (5.12), приходим к соотношениям

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \left(\sup_n I_3(U, n, x) \right) \leq I_3(U), \quad \lim_{U \rightarrow \infty} I_3(U) = 0. \quad (5.15)$$

Оценим $I_4(U, n, x)$. Обозначим $\bar{c}_n = \limsup_{x \rightarrow \infty} (\pi_n(x)/G(x))$. Согласно лемме 11 $\bar{c}_n < \infty$ для любого n . Так как условие слабой сходимости распределений скачков эквивалентно сходимости в метрике Леви-Прохорова, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $u_0 = u_0(\varepsilon)$ такое, что

$$F(v + \varepsilon) - \varepsilon \leq \mathbf{P}\{\xi(u) \geq v\} \leq F(v - \varepsilon) + \varepsilon \quad (5.16)$$

для любых $u \geq u_0$ и v . Поэтому при $u \geq u_0 + U$ слагаемое $I_4(U, n, x)$ в (5.8) можно оценить сверху следующим образом:

$$\begin{aligned} I_4(U, n, x) &\leq \int_{x-U}^{\infty} (F(x-u-\varepsilon) + \varepsilon) \frac{\pi_n(du)}{G(x)} \\ &= \int_{-\infty}^{U-\varepsilon} F(v) \frac{d_v \pi_n(x-\varepsilon-v)}{G(x)} + \varepsilon \frac{\pi_n(x-U)}{G(x)} \\ &\equiv I_{41}(U, n, x) + I_{42}(U, n, x). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Интегрируя по частям, оценим $I_{41}(U, n, x)$:

$$I_{41}(U, n, x) = \int_{-\infty}^{U-\varepsilon} \frac{\pi_n(x-\varepsilon-v)}{G(x)} dF(v) + \frac{F(U-\varepsilon)\pi_n(x-U)}{G(x)}.$$

Отсюда и из (5.17) в силу определения $\bar{c}_n$ имеем

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} I_4(U, n, x) \leq \bar{c}_n e^{\beta\varepsilon} \int_{-\infty}^U e^{\beta v} F(dv) + O(F(U-\varepsilon)e^{\beta U} + \varepsilon). \quad (5.18)$$

Подставляя (5.11), (5.10), (5.15) и (5.18) в (5.8), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \bar{c}(n+1) &\leq \int_{-U}^U c(u) e^{\beta u} \pi_n(du) + \bar{c}_n e^{\beta\varepsilon} \int_{-\infty}^U e^{\beta v} F(dv) \\ &\quad + O(I_1(U) + I_3(U) + F(U-\varepsilon)e^{\beta U} + \varepsilon). \end{aligned}$$

Отсюда ввиду произвольности выбора $\varepsilon > 0$ получаем неравенство

$$\begin{aligned} \bar{c}(n+1) &\leq \int_{-U}^U c(u) e^{\beta u} \pi_n(du) + \bar{c}_n \int_{-\infty}^U e^{\beta v} F(dv) \\ &\quad + O(I_1(U) + I_3(U) + F(U)e^{\beta U}). \end{aligned}$$

Устремляя U к бесконечности и используя (5.10), (5.11) и (5.15), выведем оценку $\bar{c}(n+1) \leq \alpha_n + \bar{c}_n \varphi(\beta)$. Отсюда по индукции заключаем, что верхний предел при $x \rightarrow \infty$ отношения $\pi_{n+1}(x)/G(x)$ не превосходит c_{n+1} . Ровно так же доказывается, что нижний предел того же отношения не меньше c_{n+1} . Следовательно, п. (а) доказан.

Для доказательства п. (б) обозначим

$$\bar{c} = \limsup_{n, x \rightarrow \infty} \frac{\pi_n(x)}{G(x)};$$

$\bar{c} < \infty$ ввиду леммы 11. Вместо (5.18) получаем, ровно так же, как и ранее, оценку

$$\limsup_{n, x \rightarrow \infty} I_4(U, n, x) \leq \bar{c} e^{\beta \varepsilon} \int_{-\infty}^U e^{\beta v} F(dv) + O(F(U - \varepsilon) e^{\beta U} + \varepsilon). \quad (5.19)$$

Подставляя (5.11), (5.10), (5.15) и (5.19) в (5.8), учитывая произвольность выбора $\varepsilon > 0$ и устремляя $U \rightarrow \infty$, приходим к соотношению

$$\bar{c} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n + \bar{c} \varphi(\beta) = \alpha_\infty + \bar{c} \varphi(\beta).$$

Следовательно, верхний предел при $n, x \rightarrow \infty$ отношения $\pi_{n+1}(x)/G(x)$ не превосходит $\alpha_\infty/(1 - \varphi(\beta))$. Ровно так же доказывается, что нижний предел того же отношения не меньше $\alpha_\infty/(1 - \varphi(\beta))$. Пункт (б), а вместе с ним и теорема 3 доказаны.

5.3. Точная асимптотика стационарных распределений. В этом пункте предполагается, что цепь X допускает инвариантную меру π . Справедливо следующее усиление теоремы 5 из [5] о вероятностях больших уклонений стационарного распределения.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3 (кроме (4.1)). Тогда

$$\pi(x) = \frac{\alpha_\infty + o(1)}{1 - \varphi(\beta)} G(x)$$

при $x \rightarrow \infty$, где $\alpha_\infty \equiv \int_{\mathbf{R}} c(u) e^{\beta u} \pi(du) \geq 0$.

З а м е ч а н и е 9. Сформулированная теорема обобщает теорему 5 из [5] в том, что класс распределений ξ расширяется от класса надстепенных распределений до класса $\mathcal{S}(\beta)$ и, что не менее важно, в следующем. В теореме 5 из [5] использовалось условие

$$|\mathbf{P}\{\xi(u) \geq t\} - \mathbf{P}\{\xi \geq t\}| \leq \delta(u) \mathbf{P}\{\xi \geq t\},$$

где $\delta(u) \downarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$, которое влечет сходимость распределений $\xi(u)$ и ξ в равномерной метрике. Если цепь X принимает значения на решетке, сходимость в равномерной метрике эквивалентна слабой сходимости $\xi(u) \Rightarrow \xi$. В общем случае, когда цепь X вещественнозначна, сходимость в равномерной метрике существенно сильнее, вообще говоря, чем слабая сходимость $\xi(u) \Rightarrow \xi$, предполагаемая нами.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 4. По лемме 1 найдется $\hat{c}$ такое, что $\pi(x) \leq \hat{c} G(x)$ для любого x . Остается воспользоваться теоремой 3 при $\pi_0 = \pi$.

Замечания к первой части работы. 1. Как заметил Б. А. Рогозин, при исследовании распределений сверток мер в [5, § 7] использование теоремы Лебега в формуле (7.7) в доказательстве леммы 5 необоснованно ввиду того, что мера μ_2 знакопеременная. Таким образом, условия

леммы 5 из [5] нуждаются в усилении, с тем чтобы можно было применить теорему Лебега. Мы не приводим здесь необходимую модификацию формулировки этой леммы, поскольку лемма 5 приведена в [5] лишь с целью доказать теорему 5 в [5]. Но теорема 3 настоящей работы обобщает теорему 5 из [5] и снабжена независимым и более адекватным существу дела доказательством.

2. При оценке второго члена асимптотики $\pi(x)$ в крамеровском случае [5, § 9] используются оценки для функции восстановления, приведенные в работах Стоуна. В своих работах Стоун использует условие Крамера на характеристическую функцию одного слагаемого. Это условие пропущено в формулировке теоремы 11 из [5, § 9]. Эту формулировку следует дополнить условием: $\limsup_{|\lambda| \rightarrow \infty} |\mathbb{E} e^{i\lambda \tilde{\xi}}| < 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков А. А. Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых. — Сиб. матем. журн., 1962, т. 3, № 5, с. 645–694.
2. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.
3. Боровков А. А. О преобразовании Крамера, больших отклонениях в граничных задачах и условном принципе инвариантности. — Сиб. матем. журн., 1995, т. 36, № 3, с. 493–509.
4. Боровков А. А. Об условных распределениях, связанных с большими отклонениями. — Сиб. матем. журн., 1996, т. 37, № 4, с. 732–744.
5. Боровков А. А., Коршунов Д. А. Вероятности больших отклонений одномерных цепей Маркова. Часть 1. Стационарные распределения. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 1, с. 3–30.
6. Боровков А. А., Мозульский А. А. Большие отклонения и проверка статистических гипотез. (Труды Института математики СО РАН, Т. 19.) Новосибирск: Наука, 1992, 222 с.
7. Боровков А. А., Мозульский А. А. Вторая функция отклонений и асимптотические задачи восстановления и достижения границы для многомерных блужданий. — Сиб. матем. журн., 1996, т. 37, № 4, с. 745–782.
8. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1969, 400 с.
9. Петров В. В. О вероятностях больших отклонений сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. X, в. 2, с. 310–322.
10. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
11. Bertoin J., Doney R. A. Some asymptotic results for transient random walks. — Adv. Appl. Probab., 1996, v. 28, p. 207–226.
12. Borovkov A. A. Ergodicity and Stability of Stochastic Processes. New York: Wiley, 1998, 585 p.
13. Embrechts P., Goldie C. M. On convolution tails. — Stochastic Process. Appl., 1982, v. 13, № 3, p. 263–278.
14. Höglund T. A unified formulation of the Central Limit Theorem for small and large deviations from the mean. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1979, B. 49, H. 1, S. 105–117.
15. Meyn S. P., Tweedie R. L. Markov Chains and Stochastic Stability. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
16. Sgibnev M. S. On the distribution of the maxima of partial sums. — Statist. Probab. Lett., 1996, v. 28, p. 235–238.