Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Колчин, Spencer J. The Strange Logic of Random Graphs, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, том 51, выпуск 3, 627–628

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp48>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 10:30:42

© 2006 г.

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

Spencer J. *The Strange Logic of Random Graphs*. Berlin: Springer-Verlag, 2001, 108 p. (Algorithms Combin., v. 22).

Из названия книги можно заключить, что в ней обсуждаются вопросы, связанные с математической логикой и теорией случайных графов, в то же время можно ожидать, что изложение будет своеобразным, популярным и легким. Знакомство с книгой подтверждает это предположение.

Говоря формально, можно сказать, что книга посвящена доказательству одной теоремы об условиях справедливости закона нуля-единицы для случайных графов. Для того чтобы сформулировать эту теорему, приведем ряд определений.

Рассматриваются свойства графов, которые могут быть описаны в так называемой теории первого порядка. Алфавит этой теории состоит из следующих объектов:

- (1) бесконечно множества символов переменных $x, y, z, \dots$;
- (2) отношений равенства и смежности, обозначаемых соответственно $=$ и $\sim$;
- (3) кванторов общности $\forall$ и существования $\exists$;
- (4) обычных булевых связок $\vee, \wedge, \neg \rightarrow$.

С помощью высказываний первого порядка этой теории можно описать, конечно, не все, а только достаточно простые свойства графов.

В книге рассматриваются случайные графы $G(n, p)$ с n вершинами, в которых каждое из C_n^2 возможных ребер независимо от остальных существует с вероятностью $p = p(n)$. Рассматриваются свойства таких графов, когда $n \rightarrow \infty$. Запись $G \models A$ означает, что свойство A выполняется для графа G . Говорят, что свойство A выполняется для графа $G(n, p(n))$ (относительно функции $p(n)$) почти наверное, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{G(n, p(n)) \models A\} = 1,$$

и не выполняется почти никогда, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{G(n, p(n)) \models A\} = 0.$$

Заметим, что хотя такая терминология широко применяется в вероятностной комбинаторике, она отличается от принятой в теории вероятностей, где в таких случаях говорят, что свойство выполняется или не выполняется с вероятностью, стремящейся к единице. В вероятностной комбинаторике иногда употребляют несколько более точное выражение, говоря, что свойство выполняется асимптотически почти наверное. В теории вероятностей термин «почти наверное» используется для событий, имеющих вероятность, равную единице.

Возвращаясь к терминологии, принятой в книге, будем говорить, что функция $p(n)$ удовлетворяет закону нуля-единицы, если относительно этой функции любое высказывание первого порядка либо выполняется почти наверное, либо не выполняется почти никогда.

Теперь сформулируем основную теорему, доказываемую в книге.

Основная теорема. Если $0 < \alpha < 1$ и α — иррациональное число, то функция $p(n) = n^{-\alpha}$ удовлетворяет закону нуля-единицы.

То, что книга, по существу, посвящена доказательству одной теоремы, не должно дать ложного представления о ее содержании. Обычно длинные доказательства воспринимаются с большим трудом, но здесь путь доказательства проложен,

так сказать, по живописным местам, что позволяет читателю познакомиться с интересными понятиями, результатами и приемами доказательств. Книга содержит необходимые определения понятий теории вероятностей и математической логики, является самодостаточной, легко читается и отличается изяществом изложения.

Библиография к книге включает 23 наименования. Основными по теории графов являются ссылки на известную статью П. Эрдёша и А. Реньи [1], а также на монографии [2], [3]. Основная теорема была впервые представлена в [4], подход к ее доказательству, использованный в книге, описан в [5]. Обзор результатов о законе нуля-единицы в вероятностной комбинаторике содержится в [6], [7].

Автор отмечает, что одной из первых работ по тематике, которой посвящена книга, была статья Ю.В. Глебского, Д.И. Когана, М.И. Легонького и В.А. Таланова [8], в которой доказана следующая теорема.

Пусть A — произвольное свойство первого порядка графа $G(n, \frac{1}{2})$. Тогда свойство A выполняется для графа $G(n, \frac{1}{2})$ либо почти наверное, либо почти никогда.

Позднее это утверждение было независимо доказано Р. Фагином [9].

Книга несомненно представляет интерес для специалистов по теории вероятностей, а также для тех специалистов по математической логике, которые допускают использование теории вероятностей в своих исследованиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Erdős P., Rényi A. On the evolution of random graphs. — Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl., 1960, v. 5, p. 17–61.
2. Alon N., Spencer J. H. The Probabilistic Method. New York: Wiley, 2000, 301 p.
3. Bollobás B. Random Graphs. London: Academic Press, 1985, 447 p.
4. Shalah S., Spencer J. Zero-one laws for sparse random graphs. — J. Amer. Math. Soc., 1988, v. 1, № 1, p. 97–115.
5. Spencer J. Threshold spectra via the Ehrenfeucht gate. — Discrete Appl. Math., 1991, v. 30, № 2–3, p. 235–252.
6. Spencer J. Zero-one laws with variable probability. — J. Symbolic Logic, 1993, v. 58, № 1, p. 1–14.
7. Winkler P. Random structures and zero-one laws. — Finite and Infinite Combinatorics in Sets and Logic (Banff, 1991), Dordrecht: Kluwer, 1993, p. 399–420.
8. Глебский Ю. В., Коган Д. И., Легонький М. И., Таланов В. А. Область определения и степень реализуемости формул в ограниченном исчислении предикатов. — Кибернетика, 1969, в. 5, № 2, с. 17–27.
9. Fagin R. Probabilities in finite models. — J. Symbolic Logic, 1976, v. 41, № 1, p. 50–58.

В. Ф. Колчин

Barbour A. D., Chen L. H. Y., eds. **An Introduction to Stein's Method and Stein's Method and Applications.** World Scientific, River Edge, 2005, 225 p.; 297 p. (Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Nat. Univ. Singap., v. 4, 5).

Подход к оцениванию точности аппроксимаций вероятностных распределений, называемый ныне методом Стейна, был предложен его автором в 1972 г. Он принципиально отличается от ранее использовавшихся методов и выглядит как комбинация некоторых формальных приемов, неожиданно приводящих к цели. Уже первые применения показали необычную эффективность этого метода.

В первоначальном виде этот подход предназначался для оценивания точности нормальной аппроксимации распределений сумм зависимых случайных величин, обладающих свойством перемешивания. В 1975 г. этот прием был использован Л. Ченом при оценивании точности пуассоновской аппроксимации. В обоих случаях полученные оценки оказались заметно лучше оценок, имевшихся к тому времени. Дальней-