Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Боровских, О нормальной аппроксимации U -статистик, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, том 45, выпуск 3, 469–488

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp480>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 12:17:30

© 2000 г.

БОРОВСКИХ Ю. В.*

О НОРМАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ U -СТАТИСТИК

Рассматриваются U -статистики степени 2, построенные по независимым одинаково распределенным случайным величинам $X_1, \dots, X_n$ со значениями в измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$. Для U -статистик с невырожденным ядром и каноническими функциями $g: \mathfrak{X} \rightarrow \mathbf{R}$ и $h: \mathfrak{X}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ исследуется вопрос об оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме. Из полученного результата следует, что оценка порядка $n^{-1/2}$ зависит лишь от третьего момента $\mathbf{E}|g(X_1)|^3$ и слабого момента $\sup_{x>0}(x^{5/3}\mathbf{P}\{|h(X_1, X_2)| > x\})$ порядка $\frac{5}{3}$.

Ключевые слова и фразы: U -статистика, нормальная аппроксимация, неравенство Берри-Эссеена, центральная предельная теорема.

1. Введение. Пусть $X, \bar{X}, X_1, \dots, X_n$ — независимые случайные величины со значениями в измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ и одинаковым распределением $\mathbf{P}$ на нем. Рассмотрим U -статистику

$$U_n = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \Phi(X_i, X_j),$$

где $\Phi: \mathfrak{X}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ — симметрическая функция $\mathbf{E}|\Phi(X_1, X_2)| < \infty$. Определим канонические функции $g: \mathfrak{X} \rightarrow \mathbf{R}$, где $g(x) = \mathbf{E}(\Phi(X_1, X_2) | X_1 = x) - \theta$, и $h: \mathfrak{X}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, где $h(x, y) = \Phi(x, y) - \theta - g(x) - g(y)$, при этом $\theta = \mathbf{E}\Phi(X_1, X_2)$. Мы будем предполагать, что $0 < \mathbf{E}g^2(X_1) < \infty$. В соответствии с представлением Хёфдинга

$$U_n - \theta = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n g(X_j) + \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} h(X_i, X_j).$$

Обозначим далее

$$F_n(x) = \mathbf{P}\left\{\frac{\sqrt{n}(U_n - \theta)}{2} \leq x\right\}, \quad F(x) = \mathbf{P}\{\tau \leq x\}, \quad x \in \mathbf{R},$$

*Петербургский государственный университет путей сообщения, кафедра прикладной математики, Московский пр., 9, 190031 С.-Петербург, Россия.

а также

$$\Delta_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)|,$$

где τ — стандартная нормальная случайная величина. По центральной предельной теореме для невырожденных U -статистик (см. [1], [7], [8]) $\Delta_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, если $t^{4/3} \mathbf{P}\{|h| > t\} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Здесь и далее мы считаем, что $g = g(X_1)$ и $h = h(X_1, X_2)$.

Оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме для U -статистик изучались многими авторами (см., например, [8], [18]). От работы к работе шло прогрессивное ослабление условий на ядро Φ и уточнение оценки скорости сходимости. Первые оценки порядка $O(n^{-l/(2(l+1))})$ в предположении $\mathbf{E}|\Phi|^l < \infty$ для $l \geq 3$ были получены в [21] и [15]. В [4] получена оценка $O(n^{-1/2})$ в предположении, что ядро Φ ограничено. В [13] установлено, что оценка $O(n^{-1/2})$ справедлива и тогда, когда Φ имеет конечный четвертый момент, и показано также, что если Φ имеет лишь конечный третий абсолютный момент, то справедлива оценка $O(n^{-1/2}(\ln n)^{1/3})$. Оценка же порядка $O(n^{-1/2})$ в предположении $\mathbf{E}|\Phi|^3 < \infty$ была получена в [12], при этом авторы, применяя метод характеристических функций и развивая ключевую идею работы [13] о разбиении U -статистической суммы, дополнительно использовали мартингалные свойства U -статистик. В [6] ослаблено условие $\mathbf{E}|\Phi|^3 < \infty$ и доказана оценка $O(n^{-1/2})$ при условиях $\mathbf{E}|g|^3 < \infty$ и $\mathbf{E}|\Phi|^2 < \infty$. В [16] эта оценка получена при условии $\mathbf{E}|\Phi|^{5/3+\varepsilon} < \infty$ для $\varepsilon > 0$. В [9], [10] ослаблено это условие до $\mathbf{E}|\Phi|^{5/3} < \infty$. Результат с условием $\mathbf{E}|\Phi|^{5/3} < \infty$ можно встретить также в [14], [5], [18]. Автор в [8] оценивал абсолютные постоянные и показал, что

$$\Delta_n \leq \left(18 + \frac{2^{11} \cdot 3^9}{5\pi}\right) \left\{ \mathbf{E}|g|^3 + \mathbf{E}|h|^{5/3} \right\} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Нижние оценки порядка $O(n^{-1/2})$ для скорости сходимости при условии $\mathbf{E}|\Phi|^2 < \infty$ конечности моментов более высоких порядков были получены в [19] (см. также [20]). В [3] и [2] строились нижние оценки при условии $\mathbf{E}|\Phi|^{5/3-\varepsilon} < \infty$, $\varepsilon > 0$, и приводился пример ядра Φ и случайных величин $X_j = X_j^{(n)}$, $j = 1, \dots, n$, таких, что справедливо неравенство $\Delta_n \geq c(\varepsilon) n^{-1/2+3\varepsilon/2}$ с постоянной $c(\varepsilon) > 0$. Следовательно, показатель $\frac{5}{3}$ является наилучшим возможным. Однако это не означает, что существование момента $\mathbf{E}|\Phi|^{5/3} < \infty$ является необходимым для того, чтобы была оценка порядка $O(n^{-1/2})$.

2. Результаты. Нам понадобятся усеченные случайные величины

$$\begin{aligned} g^n(X_j) &= g(X_j) I(|g(X_j)| \leq \sqrt{n}), & 1 \leq j \leq n, \\ h^n(X_i, X_j) &= h(X_i, X_j) I(|h(X_i, X_j)| \leq n^{3/2}), & 1 \leq i < j \leq n, \end{aligned}$$

где $n \geq 2$, $I(A)$ — индикаторная функция множества A , а также слабые моменты

$$B(x, p) = \sup_{t \geq x} (t^p \mathbf{P}\{|h| > t\}), \quad x > 0, p > 0. \quad (1)$$

Теорема 1. Пусть $\mathbf{E}g^2 = 1$ и $\mathbf{E}|h| < \infty$. Тогда при любом $\frac{4}{3} \leq p \leq 2$ и всех $n \geq 2$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \Delta_n \leq & 210 \mathbf{E}|g|^3 I(|g| \leq \sqrt{n}) \frac{1}{\sqrt{n}} + 5 \mathbf{E}g^2 I(|g| > \sqrt{n}) \\ & + 47 \mathbf{E} \left| g^n(X_1) g^n(X_2) h^n(X_1, X_2) \right| \frac{1}{\sqrt{n}} + 840 \sqrt{n} \mathbf{E}|h| I(|h| > n^{3/2}) \\ & + 78 \gamma(n, p) \mathbf{E}|h|^p I(|h| \leq n^{3/2}) n^{(4-3p)/2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\gamma(n, p) \leq 3^{p/2} 2^{3p/2} (2^p p^{-1} + 2\sqrt{6} \cdot 2^{3/p}) \frac{2}{(2-p)}, \quad \frac{4}{3} \leq p < 2,$$

$$\text{и } \gamma(n, 2) = 48 (1 + 4\sqrt{3}) \ln n.$$

Следствие 1. Если $\mathbf{E}g^2 = 1$ и при $x \rightarrow \infty$ выполняется $B(x, \frac{4}{3}) \rightarrow 0$, то $\Delta_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Следующая теорема показывает, что верхние оценки величины Δ_n выражаются через слабый момент $B(0, \frac{5}{3})$.

Теорема 2. Пусть выполняются моментные условия $\mathbf{E}g^2 = 1$, $\mathbf{E}|g|^3 < \infty$ и условие

$$B\left(0, \frac{5}{3}\right) < \infty.$$

Тогда при всех $n \geq 2$ справедливо неравенство

$$\Delta_n \leq \left\{ 216 \mathbf{E}|g|^3 + 46 (\mathbf{E}|g|^3 \mathbf{E}|h|^{3/2})^{2/3} + 42 \cdot 10^4 B\left(0, \frac{5}{3}\right) \right\} \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (3)$$

Следствие 2. Пусть выполняются моментные условия $\mathbf{E}g^2 = 1$, $\mathbf{E}|g|^3 < \infty$ и $\mathbf{E}|h|^{5/3} < \infty$. Тогда при всех $n \geq 2$ справедливо неравенство

$$\Delta_n \leq \left\{ 240 \mathbf{E}|g|^3 + 42 \cdot 10^4 \mathbf{E}|h|^{5/3} \right\} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Относительно условий на ядро Φ , при которых справедливо (3), заметим следующее. Всегда имеет место неравенство $B(0, \frac{5}{3}) \leq \mathbf{E}|h|^{5/3}$. Легко проверить, что обратное неравенство, вообще говоря, неверно.

Таким образом, условие $B(0, \frac{5}{3}) < \infty$ теоремы 2 слабее моментного условия $\mathbf{E}|h|^{5/3} < \infty$ следствия 2.

Теорема 3. Пусть выполняются моментные условия $\mathbf{E}g^2 = 1$, $\mathbf{E}|g|^3 < \infty$ и условие

$$B\left(0, \frac{5}{3}\right) < \infty.$$

Тогда при всех $n \geq 2$ справедливо неравенство

$$\Delta_n \leq c \left\{ \mathbf{E}|g|^3 + 3\mathbf{E} \left| h(X_1, X_2) g(X_1) g(X_2) \right| + B\left(n^{1/8}, \frac{5}{3}\right) \right\} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (4)$$

с некоторой абсолютной постоянной $c > 0$.

3. Доказательства. Теоремы 2 и 3 являются следствиями теоремы 1, так как оценки (3), (4) мы выводим из (2). Доказательство же теоремы 1 основано на неравенствах о срезках и методе характеристических функций. При анализе характеристической функции нормированной U -статистики с усеченными каноническими функциями g^n и h^n развивается идея работы [13] о разбиении U -статистической суммы и применяются мартингалные свойства U -статистик. В этой части доказательства мы следуем [14]. Адаптированный к U -статистикам вариант анализа из работы [14] имеется также в [18], где приведено доказательство теоремы из [10] с условием $\mathbf{E}|\Phi|^{5/3} < \infty$.

Доказательство теоремы 1. В первой лемме содержится общее неравенство о срезках, которое позволяет заменить $g(X_j)$ и $h(X_i, X_j)$ на $g^n(X_j)$ и $h^n(X_i, X_j)$ соответственно.

Обозначим

$$S_{nm}(\Phi) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} \Phi(X_{i_1}, \dots, X_{i_m}) + f(X_1, \dots, X_n),$$

где $\Phi: \mathcal{X}^m \mapsto \mathbf{R}$ — симметрическая функция m переменных, $f: \mathcal{X}^n \mapsto \mathbf{R}$ — произвольная измеримая функция n переменных. Пусть Φ^t обозначает срезанную функцию Φ на уровне $t > 0$, т.е. $\Phi^t(x_1, \dots, x_m) = \Phi(x_1, \dots, x_m) I(|\Phi(x_1, \dots, x_m)| \leq t)$.

Аналогичным образом определяем и $S_{nm}(\Phi^t)$.

Лемма 1. При любом $t > 0$, всех $x \in \mathbf{R}$ и целых $m \geq 1$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{P}\{S_{nm}(\Phi) \leq x\} - \mathbf{P}\{S_{nm}(\Phi^t) \leq x\} \right| \\ & \leq \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{m!} \mathbf{P}\{|\Phi(X_1, \dots, X_m)| > t\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Доказательство. Рассмотрим события

$$\begin{aligned} A_{i_1 \dots i_m} &= \{|\Phi(X_{i_1}, \dots, X_{i_m})| > t\}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n, \\ A &= \bigcup_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} A_{i_1 \dots i_m}, \quad A^c = \bigcap_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} A_{i_1 \dots i_m}^c, \end{aligned}$$

где A^c и $A_{i_1 \dots i_m}^c$ обозначают дополнения к событиям A и $A_{i_1 \dots i_m}$ соответственно.

Заметим, что

$$\mathbf{P}\{S_{nm}(\Phi) < x\} \cap A^c = \mathbf{P}\{S_{nm}(\Phi^t) < x\} \cap A^c, \quad (6)$$

и, кроме того,

$$\mathbf{P}(A) \leq \frac{n(n-1) \cdots (n-m+1)}{m!} \mathbf{P}(A_{1 \dots m}).$$

Из формулы (6) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_{nm}(\Phi) < x\} &= \mathbf{P}\{S_{nm}(\Phi^t) < x\} \cap A^c + \mathbf{P}\{S_{nm}(\Phi) < x\} \cap A \\ &\leq \mathbf{P}\{S_{nm}(\Phi^t) < x\} + \mathbf{P}(A). \end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_{nm}(\Phi^t) < x\} &= \mathbf{P}\{S_{nm}(\Phi) < x\} \cap A^c + \mathbf{P}\{S_{nm}(\Phi^t) < x\} \cap A \\ &\leq \mathbf{P}\{S_{nm}(\Phi) < x\} + \mathbf{P}(A). \end{aligned}$$

Это доказывает лемму 1.

Далее мы будем применять неравенство о срезках (5). Сначала запишем разложение Хёффдинга U -статистики в нормированной форме

$$\frac{\sqrt{n}(U_n - \theta)}{2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n g(X_j) + \frac{1}{\sqrt{n}(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} h(X_i, X_j)$$

и введем следующие обозначения: для $j = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} g_n(X_j) &= g^n(X_j) - \mathbf{E}g^n(X_j), \\ \phi(X_j) &= -\mathbf{E}[h(X_j, X) I(|h(X_j, X)| > n^{3/2}) | X_j], \\ \phi^n(X_j) &= \phi(X_j) I(|\phi(X_j)| \leq \sqrt{n}), \quad \phi_n(X_j) = \phi^n(X_j) - \mathbf{E}\phi^n(X_j), \\ \xi_j &= \sigma_n^{-1} n^{-1/2} (g_n(X_j) + \phi_n(X_j)), \end{aligned}$$

при этом $\sigma_n^2 = \mathbf{E}(g_n(X_1) + \phi_n(X_1))^2$, и для $1 \leq i < j \leq n$

$$\begin{aligned} h_n(X_i, X_j) &= h(X_i, X_j) I(|h(X_i, X_j)| \leq n^{3/2}) \\ &\quad - \mathbf{E}[h(X_i, X) I(|h(X_i, X)| \leq n^{3/2}) | X_i] \\ &\quad - \mathbf{E}[h(X, X_j) I(|h(X, X_j)| \leq n^{3/2}) | X_j] \\ &\quad + \mathbf{E}h(X, \bar{X}) I(|h(X, \bar{X})| \leq n^{3/2}); \end{aligned}$$

и, наконец, пусть

$$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n, \quad v_n(h_n) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{n(n-1)}} \sum_{1 \leq i < j \leq n} h_n(X_i, X_j),$$

$$\eta_n = -\sqrt{n} \mathbf{E} g(X_1) I(|g(X_1)| > \sqrt{n}) + \sqrt{n} \mathbf{E} \phi^n(X_1) - \frac{1}{2} \sqrt{n} \mathbf{E} \phi(X_1),$$

$$d_n = n \mathbf{P}\{| \phi(X_1) | > \sqrt{n}\} + n \mathbf{P}\{| g(X_1) | > \sqrt{n}\}$$

$$+ \frac{1}{2} n(n-1) \mathbf{P}\{| h(X_1, X_2) | > n^{3/2}\}.$$

Лемма 2. Справедливо неравенство

$$\sup_x \left| \mathbf{P} \left\{ \frac{\sqrt{n}(U_n - \theta)}{2} \leq x \right\} - F(x) \right| \leq \sup_x \left| \mathbf{P}\{S_n + v_n(h_n) \leq x\} - F(x) \right|$$

$$+ \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) \mathbf{E} g^2 I(|g| > \sqrt{n})$$

$$+ \frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) \sqrt{n} \mathbf{E} |h| I(|h| > n^{3/2}) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}e} \frac{|\sigma_n^2 - 1|}{\sigma_n}. \quad (7)$$

Доказательство. Сначала дважды применяем лемму 1: первый раз при $m = 1$ и вводим усеченные случайные величины $g^n(X_j)$; второй раз при $m = 2$ и вводим усеченные случайные величины $h^n(X_i, X_j)$. Тогда получим

$$\sup_x \left| \mathbf{P} \left\{ \frac{\sqrt{n}(U_n - \theta)}{2} \leq x \right\} - \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n g^n(X_j) + \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \sum_{1 \leq i < j \leq n} h^n(X_i, X_j) \leq x \right\} \right|$$

$$\leq n \mathbf{P}\{|g(X_1)| > \sqrt{n}\} + \frac{1}{2} n(n-1) \mathbf{P}\{|h(X_1, X_2)| > n^{3/2}\}.$$

В принятых обозначениях

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} h^n(X_i, X_j) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} h_n(X_i, X_j)$$

$$+ (n-1) \sum_{j=1}^n \phi(X_j) - \frac{1}{2} n(n-1) \mathbf{E} \phi(X_1).$$

С учетом этой формулы вновь по лемме 1 с $m = 1$ вводим усеченные случайные величины $\phi^n(X_j)$. Тогда для всех $x \in \mathbf{R}$ получаем

$$\left| \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n g^n(X_j) + \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \sum_{1 \leq i < j \leq n} h^n(X_i, X_j) \leq x \right\} - \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n (g^n(X_j) + \phi^n(X_j)) \leq x \right\} \right|$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{n}(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} h_n(X_i, X_j) - \frac{1}{2} \sqrt{n} \mathbf{E} \phi(X_1) \leq x \Bigg\} \Bigg| \\ \leq n \mathbf{P} \{ |\phi(X_1)| > \sqrt{n} \}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \sup_x \left| \mathbf{P} \left\{ \frac{\sqrt{n}(U_n - \theta)}{2} \leq x \right\} - F(x) \right| \\ & \leq \sup_x \left| \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n (g_n(X_j) + \phi_n(X_j)) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{n}(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} h_n(X_i, X_j) + \eta_n \leq x \right\} - F(x) \right| + d_n \\ & = \sup_x \left| \mathbf{P} \{ \sigma_n S_n + \sigma_n v_n(h_n) + \eta_n \leq x \} - F(x) \right| + d_n \\ & = \sup_x \left| \mathbf{P} \{ S_n + v_n(h_n) \leq x \} - F(x \sigma_n + \eta_n) \right| + d_n, \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} & \sup_x \left| \mathbf{P} \left\{ \frac{\sqrt{n}(U_n - \theta)}{2} \leq x \right\} - F(x) \right| \leq \sup_x \left| \mathbf{P} \{ S_n + v_n(h_n) \leq x \} - F(x) \right| \\ & \quad + \sup_x |F(x + \eta_n) - F(x)| + \sup_x |F(\sigma_n x) - F(x)| + d_n, \end{aligned}$$

где по свойству функции $F(x)$

$$\begin{aligned} \sup_x |F(x + \eta_n) - F(x)| & \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |\eta_n|, \\ \sup_x |F(\sigma_n x) - F(x)| & \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \frac{|\sigma_n^2 - 1|}{\sigma_n}. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что

$$d_n, |\eta_n| \leq \mathbf{E} g^2 I(|g| > \sqrt{n}) + \frac{3}{2} \sqrt{n} \mathbf{E} |h| I(|h| > n^{3/2}).$$

Лемма 2 доказана.

Далее в процессе оценивания величины $\sup_x |\mathbf{P} \{ S_n + v_n(h_n) \leq x \} - F(x)|$ мы будем использовать следующие обозначения. Пусть

$$\begin{aligned} D_k &= \frac{1}{\sigma_n \sqrt{n}(n-1)} \sum_{j=k+1}^n h_n(X_k, X_j), \quad k = 1, \dots, n-1, \\ D_{kj} &= \frac{1}{\sigma_n \sqrt{n}(n-1)} h_n(X_k, X_j), \quad 1 \leq k < j \leq n, \end{aligned}$$

$\theta_k = S_n + v_n(h_n) - (D_1 + \dots + D_k)$, $k = 1, \dots, n-1$, и $\theta_0 = S_n + v_n(h_n)$,

так что $D_k = \theta_{k-1} - \theta_k$, $k = 1, \dots, n-1$. В этих обозначениях $\theta_k = S_n + D_{k+1} + \dots + D_{n-1}$ и, в частности, $\theta_{n-1} = S_n$. Далее, если $\mathfrak{F}_k^n = \sigma\{X_{k+1}, \dots, X_n\}$ есть σ -алгебра, порожденная случайными величинами $X_{k+1}, \dots, X_n$, то в силу приведенных определений $E(\theta_k | \mathfrak{F}_k^n) = \sum_{j=k+1}^n \xi_j + D_{k+1} + \dots + D_{n-1}$, т.е.

$$\theta_k = \sum_{j=1}^k \xi_j + E(\theta_k | \mathfrak{F}_k^n).$$

Пусть $\varphi(t)$ обозначает характеристическую функцию случайной величины $g_n(X_1) + \phi_n(X_1)$, а $\varphi_n(t)$ — характеристическую функцию $S_n + v_n(h_n)$. Тогда $\varphi^n(t/(\sigma_n\sqrt{n}))$ есть характеристическая функция S_n и по неравенству Эссеена в (7)

$$\begin{aligned} & \sup_x \left| P\{S_n + v_n(h_n) \leq x\} - F(x) \right| \\ & \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{n}/a}^{\sqrt{n}/a} \left| \varphi_n(t) - e^{-t^2/2} \right| |t|^{-1} dt + \frac{24a}{\pi\sqrt{2\pi}} n^{-1/2} \\ & \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{n}/a}^{\sqrt{n}/a} \left| \varphi^n\left(\frac{t}{\sigma_n\sqrt{n}}\right) - e^{-t^2/2} \right| |t|^{-1} dt + \frac{24a}{\pi\sqrt{2\pi}} n^{-1/2} \\ & \quad + \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{n}/a}^{\sqrt{n}/a} \left| \varphi_n(t) - \varphi^n\left(\frac{t}{\sigma_n\sqrt{n}}\right) \right| |t|^{-1} dt, \end{aligned} \quad (8)$$

где $a = \sigma_n^{-3} E|g_n(X_1) + \phi_n(X_1)|^3$. Сначала оценим интеграл в правой части в (8), содержащий разность $\varphi^n(t/(\sigma_n\sqrt{n})) - \exp(-t^2/2)$. Разлагая экспоненту в ряд Тейлора, получаем

$$\left| E \exp \left\{ it n^{-1/2} \sigma_n^{-1} (g_n(X_1) + \phi_n(X_1)) \right\} \right| \leq 1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{a|t|^3}{6n^{3/2}}.$$

Следовательно, в области $|t| \leq \sqrt{n}/a$

$$\varphi\left(\frac{t}{\sigma_n\sqrt{n}}\right) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{3n}\right). \quad (9)$$

Далее, полагая $\psi(t/\sqrt{n}) = \exp(-t^2/(2n))$, имеем

$$\begin{aligned} & \left| \varphi^n\left(\frac{t}{\sigma_n\sqrt{n}}\right) - e^{-t^2/2} \right| = \left| \varphi^n\left(\frac{t}{\sigma_n\sqrt{n}}\right) - \psi^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right| \\ & = \left| \varphi\left(\frac{t}{\sigma_n\sqrt{n}}\right) - \psi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right| \\ & \quad \times \left| \varphi^{n-1}\left(\frac{t}{\sigma_n\sqrt{n}}\right) + \varphi^{n-2}\left(\frac{t}{\sigma_n\sqrt{n}}\right) \psi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + \dots + \psi^{n-1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right|. \end{aligned}$$

Здесь при всех t

$$\begin{aligned} \left| \varphi\left(\frac{t}{\sigma_n \sqrt{n}}\right) - \psi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right| &\leq \left| \varphi\left(\frac{t}{\sigma_n \sqrt{n}}\right) - 1 + \frac{t^2}{2n} \right| + \left| \psi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - 1 + \frac{t^2}{2n} \right| \\ &\leq \frac{1}{6} a |t|^3 n^{-3/2} + \frac{1}{8} t^4 n^{-2}. \end{aligned}$$

Поэтому с учетом (9) имеем

$$\left| \varphi^n\left(\frac{t}{\sigma_n \sqrt{n}}\right) - e^{-t^2/2} \right| \leq \left(\frac{a|t|^3}{6n^{3/2}} + \frac{t^4}{8n^2} \right) \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left\{ -\frac{(n-1-k)}{3n} t^2 - \frac{k}{2n} t^2 \right\}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left\{ -\frac{(n-1-k)}{3n} t^2 - \frac{k}{2n} t^2 \right\} &= e^{-(n-1)t^2/(3n)} \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left\{ -\frac{t^2}{6n} k \right\} \\ &= \exp\left\{ -\frac{(n-1)t^2}{3n} \right\} \frac{1 - \exp(-t^2/6)}{1 - \exp(-t^2/(6n))} \\ &= \exp\left\{ \frac{t^2}{2n} - \frac{t^2}{3} \right\} \frac{1 - \exp(-t^2/6)}{\exp(t^2/(6n)) - 1} \\ &\leq 6e^{1/2} n \exp\left(-\frac{t^2}{3} \right) \frac{1 - \exp(-t^2/6)}{t^2} \end{aligned}$$

в области $|t| \leq \sqrt{n}/a$.

Следовательно, в области $|t| \leq \sqrt{n}/a$ справедливо неравенство

$$\left| \varphi^n\left(\frac{t}{\sigma_n \sqrt{n}}\right) - e^{-t^2/2} \right| \leq e^{1/2} \frac{7}{4} \frac{a}{\sqrt{n}} |t| e^{-t^2/3}. \quad (10)$$

С помощью (10) оцениваем первый интеграл в правой части (8):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{n}/a}^{\sqrt{n}/a} \left| \varphi^n\left(\frac{t}{\sigma_n \sqrt{n}}\right) - e^{-t^2/2} \right| |t|^{-1} dt \leq \frac{7}{4} \sqrt{\frac{3e}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (11)$$

Перейдем к оценке второго интеграла в правой части (8). С целью оценить подынтегральное выражение пишем

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) - \varphi^n\left(\frac{t}{\sigma_n \sqrt{n}}\right) &= \mathbf{E}(e^{it\theta_0} - e^{it\theta_{n-1}}) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{E}(e^{it\theta_{k-1}} - e^{it\theta_k}) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{E}\{e^{it\theta_k}(e^{itD_k} - 1)\} = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{E}\{e^{it\theta_k}(e^{itD_k} - 1 - itD_k)\} \\ &\quad + it \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{E}\{e^{it\theta_k} D_k\} = \sum_{k=1}^{n-1} \zeta_k(t) + it \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{E}\{e^{it\theta_k} D_k\}, \end{aligned}$$

где $\zeta_k(t) = \mathbf{E}\{e^{it\theta_k}(e^{itD_k} - 1 - itD_k)\}$, $k = 1, \dots, n-1$.

Определим для $1 \leq k < l < n$

$$\delta_{kl} = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{n(n-1)}} \sum_{j=l+1}^n h_n(X_k, X_j).$$

Очевидно, что δ_{kl} не зависит от $X_1, \dots, X_{k-1}, X_{k+1}, \dots, X_l$ и что $\mathbf{E}(\delta_{kl}|X_k) = 0$, $\delta_{kk} = D_k$ и $\delta_{k,n-1} = D_{kn}$. Определим также $\delta_{kj} = 0$ для $j \geq n$, и пусть $m(k)$ обозначает наибольшее целое число такое, что $km(k) < n$, т.е. $m(k) = -[n/k] - 1$, где $[z]$ обозначает целую часть числа z . Отметим также, что $\delta_{k,(m(k)+1)k} = 0$. С учетом этого пишем далее

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{it\theta_k} D_k &= \mathbf{E} e^{it\theta_k} \delta_{kk} - \mathbf{E} e^{it\theta_{k(m(k)+1)}} \delta_{k,(m(k)+1)k} \\ &= \sum_{j=1}^{m(k)} (\mathbf{E} e^{it\theta_{jk}} \delta_{k,jk} - \mathbf{E} e^{it\theta_{(j+1)k}} \delta_{k,(j+1)k}) \\ &= \sum_{j=1}^{m(k)} \mathbf{E} (e^{it\theta_{jk}} - e^{it\theta_{(j+1)k}}) \delta_{k,jk} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{m(k)} \mathbf{E} e^{it\theta_{(j+1)k}} (\delta_{k,jk} - \delta_{k,(j+1)k}) \\ &= \sum_{j=1}^{m(k)} \zeta_{k,j}(t) + \sum_{j=1}^{m(k)} \sum_{l=jk+1}^{(j+1)k} \zeta_{k,j,l}(t), \end{aligned}$$

где $\zeta_{k,j}(t) = \mathbf{E} (e^{it\theta_{jk}} - e^{it\theta_{(j+1)k}}) \delta_{k,jk}$, $\zeta_{k,j,l}(t) = \mathbf{E} e^{it\theta_{(j+1)k}} D_{kl}$ для $1 \leq k \leq n-1$, $1 \leq j \leq m(k)$, $l = jk+1, \dots, (j+1)k$.

Таким образом, искомый интеграл в (8) можно оценить как

$$\int_{-\sqrt{n}/a}^{\sqrt{n}/a} \left| \varphi_n(t) - \varphi^n\left(\frac{t}{\sigma_n \sqrt{n}}\right) \right| |t|^{-1} dt \leq I_1 + I_2 + I_3, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{-\sqrt{n}/a}^{\sqrt{n}/a} |t|^{-1} |\zeta_k(t)| dt, \quad I_2 = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m(k)} \int_{-\sqrt{n}/a}^{\sqrt{n}/a} |t|^{-1} |\zeta_{k,j}(t)| dt, \\ I_3 &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m(k)} \sum_{l=jk+1}^{(j+1)k} \int_{-\sqrt{n}/a}^{\sqrt{n}/a} |t|^{-1} |\zeta_{k,j,l}(t)| dt. \end{aligned}$$

Наша дальнейшая цель — оценить I_s , $s = 1, 2, 3$.

Лемма 3. Для всех $n \geq 2$ и $1 \leq p \leq 2$ справедливо неравенство

$$I_1 \leq 8 e^{1/3} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) 3^{p/2} \alpha(n, p) n^{(4-3p)/2} \sigma_n^{-p} \mathbf{E} |h_n|^p, \quad (13)$$

где $\alpha(n, p) = 2(1 - n^{-(2-p)/2})/(2-p)$, причем $\alpha(n, 2) = \lim_{p \rightarrow 2} \alpha(n, p) = \ln n$.

Доказательство. Рассмотрим $\zeta_k(t)$. Видим, что $\zeta_k(t)$ представляется как

$$\begin{aligned}\zeta_k(t) &= \mathbf{E} \left[\exp \left\{ it \left(\sum_{j=1}^k \xi_j + \mathbf{E}(\theta_k | \mathfrak{F}_k^n) \right) \right\} (e^{itD_k} - 1 - itD_k) \right] \\ &= \prod_{j=1}^{k-1} \mathbf{E}(e^{it\xi_j}) \mathbf{E}\{e^{it(\xi_k + \mathbf{E}(\theta_k | \mathfrak{F}_k^n))} (e^{itD_k} - 1 - itD_k)\},\end{aligned}$$

так как $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}$ независимы от других членов и если $k = 1$, то произведение полагается равным единице. Далее, применяя неравенство $|e^{ix} - 1 - ix| \leq 2|x|^p$ для $1 \leq p \leq 2$, получаем

$$\mathbf{E}|e^{itD_k} - 1 - itD_k| \leq 2|t|^p \mathbf{E}|D_k|^p.$$

Для фиксированных k и n последовательность $\sum_{j=k+l}^n D_{kj}$, $l = 1, \dots, n - k$, представляет собой обращенный мартингал относительно σ -алгебр $\mathfrak{F}_l = \sigma\{X_k, X_{k+l}, X_{k+l+1}, \dots\}$, и, таким образом, по мартингальному неравенству (см., например, [11])

$$\begin{aligned}\mathbf{E}|D_k|^p &\leq 2^{2-p} \sum_{j=k+1}^n \mathbf{E}|D_{kj}|^p \\ &\leq 2^{2-p} (n - k) (\sqrt{n}(n - 1))^{-p} \sigma_n^{-p} \mathbf{E}|h_n(X_1, X_2)|^p \\ &\leq 2^{2-p} n^{-p/2} (n - 1)^{-p+1} \sigma_n^{-p} \mathbf{E}|h_n|^p \leq 2n^{1-3p/2} \sigma_n^{-p} \mathbf{E}|h_n|^p\end{aligned}$$

для всех $n \geq 2$ и $1 \leq p \leq 2$.

Таким образом, в области $|t| \leq \sqrt{n}/a$

$$\begin{aligned}|\zeta_k(t)| &\leq 2 \mathbf{E}|D_k|^p |t|^p \exp \left(- \frac{(k-1)}{3n} t^2 \right) \\ &\leq 4 e^{1/3} n^{1-3p/2} \sigma_n^{-p} \mathbf{E}|h_n|^p |t|^p \exp \left(- \frac{kt^2}{3n} \right),\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}I_1 &\leq 8 e^{1/3} n^{1-3p/2} \sigma_n^{-p} \mathbf{E}|h_n|^p \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^\infty t^{p-1} \exp \left(- \frac{kt^2}{3n} \right) dt \\ &= 4 e^{1/3} \Gamma \left(\frac{p}{2} \right) 3^{p/2} n^{1-p} \sigma_n^{-p} \mathbf{E}|h_n|^p \sum_{k=1}^{n-1} k^{-p/2},\end{aligned}$$

при этом $\Gamma(p/2)$ — гамма-функция, а

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^{-p/2} \leq 1 + \frac{2}{2-p} \left(n^{(2-p)/2} - 1 \right) \leq 2n^{(2-p)/2} \alpha(n, p).$$

В результате находим, что для всех $n \geq 2$ и $1 \leq p \leq 2$: $I_1 \leq 8 e^{1/3} \Gamma(p/2) \times 3^{p/2} \alpha(n, p) n^{(4-3p)/2} \sigma_n^{-p} \mathbf{E}|h_n|^p$, что и доказывает данную лемму.

Лемма 4. Для всех $n \geq 2$ и $\frac{4}{3} \leq p \leq 2$ справедливо неравенство

$$I_2 \leq e^{1/3} 3^{(p+1)/2} 2^{6-p+2/p} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \times \sigma_n^{-p-(2-p)/p} \mathbf{E}|h_n|^p \alpha(n, p) n^{(4-3p)/2}. \quad (14)$$

Доказательство. Из соображений независимости пишем

$$\begin{aligned} \zeta_{k,j}(t) &= \mathbf{E} e^{it\theta_{jk}} \left(1 - e^{it(\theta_{(j+1)k} - \theta_{jk})}\right) \delta_{k,jk} \\ &= \left\{ \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{jk} \mathbf{E} e^{it\xi_l} \right\} \mathbf{E} e^{it(\xi_k + \mathbf{E}(\theta_{jk} | \mathfrak{F}_{jk}^n))} \left(1 - e^{it(\theta_{(j+1)k} - \theta_{jk})}\right) \delta_{k,jk} \\ &= \left\{ \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{jk} \mathbf{E} e^{it\xi_l} \right\} \mathbf{E}(e^{it\xi_k} - 1) e^{it\mathbf{E}(\theta_{jk} | \mathfrak{F}_{jk}^n)} \left(1 - e^{it(\theta_{(j+1)k} - \theta_{jk})}\right) \delta_{k,jk}. \end{aligned}$$

Здесь первое равенство следует из определения. Второе равенство написано в силу того, что $\delta_{k,jk}$ зависит лишь от $X_k, X_{j+1}, \dots, X_n$, а $\theta_{(j+1)k} - \theta_{jk}$ не зависит от $X_1, \dots, X_j$, а третье равенство следует из того, что $\mathbf{E}(\delta_{k,jk} | \mathfrak{F}_{j+1}^n) = 0$. Применяя далее (9) и неравенство Гёльдера, мы получаем в области $|t| \leq \sqrt{n}/a$

$$\begin{aligned} |\zeta_{k,j}(t)| &\leq \exp\left(-\frac{jk-1}{3n} t^2\right) \mathbf{E}|e^{it\xi_k} - 1| \left|1 - e^{it(\theta_{(j+1)k} - \theta_{jk})}\right| |\delta_{k,jk}| \\ &\leq e^{1/3} \exp\left(-\frac{jk}{3n} t^2\right) (\mathbf{E}|e^{it\xi_k} - 1|^q |1 - e^{it(\theta_{(j+1)k} - \theta_{jk})}|^q)^{1/q} \\ &\quad \times (\mathbf{E}|\delta_{k,jk}|^p)^{1/p}, \end{aligned}$$

где $q = p/(p-1)$. Учитывая независимость ξ_k и $\theta_{(j+1)k} - \theta_{jk}$ и применяя неравенства $|e^{ix} - 1| \leq |x|$ и $|e^{ix} - 1| \leq 2|x|^{p-1}$, $1 \leq p \leq 2$, мы получаем

$$\begin{aligned} &(\mathbf{E}|e^{it\xi_k} - 1|^q |1 - e^{it(\theta_{(j+1)k} - \theta_{jk})}|^q)^{1/q} \\ &= (\mathbf{E}|e^{it\xi_k} - 1|^q)^{1/q} (\mathbf{E}|1 - e^{it(\theta_{(j+1)k} - \theta_{jk})}|^q)^{1/q} \\ &\leq 2|t|^p (\mathbf{E}|\xi_k|^q)^{1/q} (\mathbf{E}|\theta_{(j+1)k} - \theta_{jk}|^p)^{1-1/p}. \end{aligned}$$

Здесь

$$(\mathbf{E}|\xi_k|^q)^{1/q} = n^{-1/2} \sigma_n^{-1} (\mathbf{E}|g_n(X_1) + \phi_n(X_1)|^q)^{1/q}.$$

Так как $q = p/(p-1) \geq 2$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|g_n(X_1) + \phi_n(X_1)|^q &= \mathbf{E}|g_n(X_1) + \phi_n(X_1)|^2 |g_n(X_1) + \phi_n(X_1)|^{q-2} \\ &\leq 4^{q-2} n^{(q-2)/2} \sigma_n^2, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$(\mathbf{E}|\xi_k|^q)^{1/q} \leq 4^{(2-p)/p} \sigma_n^{-(2-p)/p} n^{-1/2+(2-p)/(2p)}.$$

Последовательность (D_{jk+l}) , $1 \leq l \leq k$, является обращенным мартингалом. Поэтому по мартингальному неравенству (см., например, [11])

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}|\theta_{(j+1)k} - \theta_{jk}|^p)^{1-1/p} &= (\mathbf{E}|D_{jk+1} + \dots + D_{(j+1)k}|^p)^{1-1/p} \\ &\leq \left(2^{2-p} \sum_{l=jk+1}^{(j+1)k} \mathbf{E}|D_l|^p\right)^{1-1/p} \leq (2^{3-p} k n^{1-3p/2} \sigma_n^{-p} \mathbf{E}|h_n|^p)^{1-1/p}. \end{aligned}$$

И по этому же мартингальному неравенству

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}|\delta_{k,jk}|^p)^{1/p} &= (\mathbf{E}|D_{k,jk+1} + \dots + D_{k,n}|^p)^{1/p} \\ &\leq \left(2^{2-p} \sum_{l=jk+1}^n \mathbf{E}|D_{k,l}|^p\right)^{1/p} \leq (2 n^{1-3p/2} \sigma_n^{-p} \mathbf{E}|h_n|^p)^{1/p}. \end{aligned}$$

Следовательно, в области $|t| \leq \sqrt{n}/a$

$$\begin{aligned} |\zeta_{k,j}(t)| &\leq e^{1/3} 2^{3-p+2/p} \sigma_n^{-p-(2-p)/p} \\ &\quad \times \mathbf{E}|h_n|^p k^{1-1/p} n^{(1-3p)/2+(2-p)/(2p)} |t|^p \exp\left(-\frac{jk}{3n} t^2\right) \end{aligned}$$

для всех $1 \leq p \leq 2$. Это приводит к оценке

$$\begin{aligned} I_2 &\leq e^{1/3} 2^{3-p+2/p} \sigma_n^{-p-(2-p)/p} \mathbf{E}|h_n|^p n^{(1-3p)/2+(2-p)/(2p)} \\ &\quad \times \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m(k)} k^{1-1/p} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^p \exp\left(-\frac{jk}{3n} t^2\right) dt \\ &= e^{1/3} 3^{(p+1)/2} 2^{3-p+2/p} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \sigma_n^{-p-(2-p)/p} \mathbf{E}|h_n|^p n^{1-p+(2-p)/(2p)} \\ &\quad \times \sum_{k=1}^{n-1} k^{1-1/p-(p+1)/2} \sum_{j=1}^{m(k)} j^{-(p+1)/2}. \end{aligned}$$

Здесь при $\frac{4}{3} \leq p \leq 2$

$$\sum_{j=1}^{m(k)} j^{-(p+1)/2} \leq \sum_{j=1}^{\infty} j^{-(p+1)/2} \leq \sum_{j=1}^{\infty} j^{-7/6} < 7,$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} k^{1-1/p-(p+1)/2} &= \sum_{k=1}^{n-1} k^{-1+(p-1)(2-p)/(2p)} \\ &\leq 8 n^{(2-p)/2-(2-p)/(2p)} \alpha(n, p). \end{aligned}$$

В результате получаем неравенство (14). Лемма 4 доказана.

Лемма 5. При всех $n \geq 2$ справедливо неравенство

$$I_3 \leq \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{1/3} 3^{3/2} \sigma_n^{-3} \left\{ \mathbf{E}|g^n(X_1) g^n(X_2) h^n(X_1, X_2)| \right\}$$

$$+ \left(2 \left(\sqrt{n} \mathbf{E}|h| I(|h| > n^{3/2}) \right)^{1/2} + \sqrt{n} \mathbf{E}|h| I(|h| > n^{3/2}) \right) \\ \times \left(\mathbf{E}|h|^2 I(|h| \leq n^{3/2}) \right)^{1/2} + 12n \mathbf{E}|h| I(|h| > n^{3/2}) \Big\} \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (15)$$

Доказательство. Из соображений независимости пишем

$$\zeta_{k,j,l}(t) = \left\{ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{l-1} \mathbf{E} e^{it\xi_j} \right\} \\ \times \mathbf{E} \exp \left\{ it \left(\xi_k + \xi_l + \sum_{m=l+1}^{(j+1)k} \xi_m + \mathbf{E}(\theta_{(j+1)k} | \mathfrak{F}_{(j+1)k}^n) \right) \right\} D_{kl}.$$

По свойству вырожденности функции $h_n(x, y)$ и соотношениям $\mathbf{E}(D_{kl} | X_k, \mathfrak{F}_l^n) = 0$ и $\mathbf{E}(D_{kl} | \mathfrak{F}_l^n) = 0$ для $1 \leq k < l \leq n$ имеем

$$\mathbf{E} \exp\{it(\bar{\xi}_k + \bar{\xi}_l)\} D_{kl} = \mathbf{E} \left(e^{it\bar{\xi}_k} - 1 \right) \left(e^{it\bar{\xi}_l} - 1 \right) D_{kl},$$

где

$$\bar{\xi}_k = \xi_k - \frac{\mathbf{E} g^n(X_k) + \mathbf{E} \phi^n(X_k)}{\sigma_n \sqrt{n}}, \quad \bar{\xi}_l = \xi_l - \frac{\mathbf{E} g^n(X_l) + \mathbf{E} \phi^n(X_l)}{\sigma_n \sqrt{n}}.$$

Применяя далее неравенство $|e^{ix} - 1| \leq |x|$, $x \in \mathbf{R}$, пишем

$$\left| \mathbf{E} \left(e^{it\bar{\xi}_k} - 1 \right) \left(e^{it\bar{\xi}_l} - 1 \right) D_{kl} \right| \leq t^2 \mathbf{E} |\bar{\xi}_k| |\bar{\xi}_l| |D_{kl}| \\ = t^2 \sigma_n^{-3} \frac{1}{n \sqrt{n} (n-1)} \mathbf{E} |g^n(X_1) + \phi^n(X_1)| |g^n(X_2) + \phi^n(X_2)| \\ \times |h_n(X_1, X_2)| \leq 2 t^2 \sigma_n^{-3} n^{-5/2} e_{n1}, \quad n \geq 2,$$

где

$$e_{n1} = \mathbf{E} |g^n(X_1) + \phi^n(X_1)| |g^n(X_2) + \phi^n(X_2)| |h_n(X_1, X_2)|.$$

Таким образом, в области $|t| \leq \sqrt{n}/a$ при всех $n \geq 2$

$$|\zeta_{k,j,l}(t)| \leq 2 e^{1/3} \sigma_n^{-3} n^{-5/2} e_{n1} t^2 \exp \left(- \frac{l-1}{3n} t^2 \right).$$

Это приводит к оценке

$$I_3 \leq 2 e^{1/3} \sigma_n^{-3} n^{-5/2} e_{n1} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m(k)} \sum_{l=jk+1}^{\min(n, (j+1)k)} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \exp \left(- \frac{l-1}{3n} t^2 \right) dt \\ = 2 e^{1/3} \Gamma \left(\frac{3}{2} \right) 3^{3/2} \sigma_n^{-3} n^{-1} e_{n1} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^n (l-1)^{-3/2} \\ = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{1/3} 3^{3/2} \sigma_n^{-3} n^{-1} e_{n1} \sum_{k=1}^{n-1} l^{-1/2} \leq \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{1/3} 3^{3/2} \sigma_n^{-3} n^{-1/2} e_{n1}.$$

Рассмотрим e_{n1} . Так как $h_n(X_1, X_2) = h^n(X_1, X_2) - \phi(X_1) - \phi(X_2) + \mathbf{E}\phi(X_1)$ и $|g^n(X_1) + \phi^n(X_1)| \leq 2\sqrt{n}$, то сначала можно написать неравенство

$$e_{n1} \leq e_{n2} + 12n \mathbf{E}|h| I(|h| > n^{3/2}),$$

где

$$e_{n2} = \mathbf{E}|g^n(X_1) + \phi^n(X_1)| |g^n(X_2) + \phi^n(X_2)| |h^n(X_1, X_2)|.$$

Далее оцениваем e_{n2} как

$$e_{n2} \leq \mathbf{E}|g^n(X_1) g^n(X_2) h^n(X_1, X_2)| + 2 \mathbf{E}|g^n(X_1) \phi^n(X_2) h^n(X_1, X_2)| + \mathbf{E}|\phi^n(X_1) \phi^n(X_2) h^n(X_1, X_2)|.$$

Здесь по неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|g^n(X_1) \phi^n(X_2) h^n(X_1, X_2)| &\leq \left(\mathbf{E} \phi^2(X_2) I(|\phi(X_2)| \leq \sqrt{n}) \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\mathbf{E} h^2(X_1, X_2) I(|h(X_1, X_2)| \leq n^{3/2}) \right)^{1/2}, \\ \mathbf{E}|\phi^n(X_1) \phi^n(X_2) h^n(X_1, X_2)| &\leq \mathbf{E} \phi^2(X_2) I(|\phi(X_2)| \leq \sqrt{n}) \\ &\quad \times \left(\mathbf{E} h^2(X_1, X_2) I(|h(X_1, X_2)| \leq n^{3/2}) \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

и, кроме того,

$$\mathbf{E} \phi^2(X_2) I(|\phi(X_2)| \leq \sqrt{n}) \leq \sqrt{n} \mathbf{E}|h| I(|h| > n^{3/2}).$$

Следовательно, справедливо неравенство (15). Лемма 5 доказана.

Объединяя (7), (8) и (11)–(15), приходим к оценке

$$\begin{aligned} \sup_x \left| \mathbf{P} \left\{ \sqrt{n} \frac{U_n - \theta}{2} \leq x \right\} - F(x) \right| &\leq \left(\frac{24}{\pi \sqrt{2\pi}} + \frac{7}{4} \sqrt{\frac{3e}{\pi}} \right) \sigma_n^{-3} \mathbf{E}|g_n(X_1) + \phi_n(X_1)|^3 \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\quad + \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{1/3} 3^{3/2} \sigma_n^{-3} \left[\mathbf{E}|g^n(X_1) g^n(X_2) h^n(X_1, X_2)| \right. \\ &\quad + \left(2 \left(\sqrt{n} \mathbf{E}|h| I(|h| > n^{3/2}) \right)^{1/2} + \sqrt{n} \mathbf{E}|h| I(|h| > n^{3/2}) \right) \\ &\quad \times \left(\mathbf{E}|h|^2 I(|h| \leq n^{3/2}) \right)^{1/2} + 12n \mathbf{E}|h| I(|h| > n^{3/2}) \left. \right] \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\quad + \frac{8}{\pi} e^{1/3} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) 3^{p/2} \alpha(n, p) \sigma_n^{-p} \mathbf{E}|h_n|^p n^{(4-3p)/2} + \frac{1}{\pi} e^{1/3} \\ &\quad \times \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) 3^{(p+1)/2} 2^{6-p+2/p} \alpha(n, p) \sigma_n^{-p-(2-p)/p} \mathbf{E}|h_n|^p n^{(4-3p)/2} \\ &\quad + 4 \mathbf{E} g^2 I(|g| > \sqrt{n}) + 4 \sqrt{n} \mathbf{E}|h| I(|h| > n^{3/2}) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}e} \frac{|\sigma_n^2 - 1|}{\sigma_n}. \quad (16) \end{aligned}$$

Упростим выражение в правой части (16). Сначала оценим σ_n^2 . В соответствии с определением

$$\sigma_n^2 = \mathbf{E}(g_n(X_1) + \phi_n(X_1))^2 = \mathbf{E}g_n^2 + \mathbf{E}\phi_n^2 + 2\mathbf{E}g_n\phi_n,$$

где

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}g_n\phi_n| &\leq \sqrt{n} \mathbf{E}|\phi_n| \leq 2\sqrt{n} \mathbf{E}|h| I(|h| > n^{3/2}), \\ \mathbf{E}\phi_n^2 &\leq \sqrt{n} \mathbf{E}|h| I(|h| > n^{3/2}), \\ \mathbf{E}g_n^2 &= 1 - \mathbf{E}g^2 I(|g| > \sqrt{n}) - (\mathbf{E}g I(|g| > \sqrt{n}))^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &\geq 1 - \mathbf{E}g^2 I(|g| > \sqrt{n}) - (\mathbf{E}g I(|g| > \sqrt{n}))^2 - 4\sqrt{n} \mathbf{E}|h| I(|h| > n^{3/2}), \\ \sigma_n^2 &\leq 1 - \mathbf{E}g^2 I(|g| > \sqrt{n}) - (\mathbf{E}g I(|g| > \sqrt{n}))^2 + 5\sqrt{n} \mathbf{E}|h| I(|h| > n^{3/2}). \end{aligned}$$

Объединяя эти два неравенства, видим, что $|\sigma_n^2 - 1| \leq \alpha$, где $\alpha = 4\mathbf{E}g^2 I(|g| > \sqrt{n}) + 5\mathbf{E}|h| I(|h| > n^{3/2})$.

Если $2\alpha \geq 1$ или $\sqrt{n} \mathbf{E}|h| I(|h| > n^{3/2}) \geq 1$, то неравенство (2) очевидно, так как $\Delta_n \leq 1$. Для случая $2\alpha \leq 1$ в (16) применим оценку $\sigma_n^2 \geq \frac{1}{2}$. Кроме того, в (16)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|g_n(X_1) + \phi_n(X_1)|^3 &\leq 16 \mathbf{E}|g|^3 I(|g| \leq \sqrt{n}) + 16n \mathbf{E}|h| I(|h| > n^{3/2}), \\ &\left(\sqrt{n} \mathbf{E}|h| I(|h| > n^{3/2})\right)^{1/2} \left(\mathbf{E}|h|^2 I(|h| \leq n^{3/2})\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\leq \frac{1}{2} \sqrt{n} \mathbf{E}|h| I(|h| > n^{3/2}) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \mathbf{E}|h|^2 I(|h| \leq n^{3/2}), \end{aligned}$$

и для $1 \leq p \leq 2$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|h_n|^p &\leq 4^p \mathbf{E}|h|^p I(|h| \leq n^{3/2}), \\ \frac{1}{n} \mathbf{E}|h|^2 I(|h| \leq n^{3/2}) &\leq \mathbf{E}|h|^p I(|h| \leq n^{3/2}) n^{(4-3p)/2}. \end{aligned}$$

В результате этих упрощений видим, что (16) редуцируется к виду

$$\begin{aligned} \Delta_n &\leq c_1 \mathbf{E}|g|^3 I(|g| \leq \sqrt{n}) \frac{1}{\sqrt{n}} + c_2 \mathbf{E}|g|^2 I(|g| > \sqrt{n}) \\ &\quad + c_3 \mathbf{E}|g^n(X_1) g^n(X_2) h^n(X_1, X_2)| \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\quad + c_4 \sqrt{n} \mathbf{E}|h| I(|h| > n^{3/2}) \\ &\quad + c_5 \gamma(n, p) \mathbf{E}|h|^p I(|h| \leq n^{3/2}) n^{(4-3p)/2}, \end{aligned}$$

где $c_1 = 6 \cdot 2^7 / (\pi \sqrt{\pi}) + 7 \cdot 2^3 \sqrt{6e} / \sqrt{\pi} \leq 210$; $c_2 = 4 + 2/\sqrt{\pi e} \leq 4.76$;

$$c_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{1/3} 2^{7/2} 3^{3/2} \leq 46.2;$$

$$c_4 = 4 + \frac{2}{\sqrt{\pi e}} \frac{6 \cdot 2^7}{\pi \sqrt{\pi}} + \frac{7 \cdot 2^3 \sqrt{6e}}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{1/3} 2^{11/2} 3^{5/2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{1/3} 2^{5/2} 3^{3/2} \leq 840;$$

$$c_5 = \frac{1}{\pi} e^{1/3} 2^4 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{1/3} 2^{5/2} 3^{3/2} \leq 76.4;$$

при этом $\gamma(n, p) \leq 3^{p/2} 2^{3p/2} (2^p p^{-1} + 2\sqrt{6} \cdot 2^{3/p}) 2/(2-p)$, если $\frac{4}{3} \leq p < 2$, и если $p = 2$, то $\gamma(n, 2) = 48(1 + 4\sqrt{3}) \ln n$. Теорема 1 доказана.

Доказательство следствия 1. Так как $\mathbf{E} g^2 = 1$, то $\mathbf{E} g^2 I(|g| > \sqrt{n}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и, кроме того,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{E} |g|^3 I(|g| \leq \sqrt{n}) \leq n^{-1/4} + \mathbf{E} g^2 I(|g| > n^{1/4}) \rightarrow 0.$$

Покажем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n} \mathbf{E} |h| I(|h| > n^{3/2}) \rightarrow 0. \quad (17)$$

Для этого пишем

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \mathbf{E} |h| I(|h| > n^{3/2}) &= n^2 \mathbf{P}\{|h| > n^{3/2}\} + \sqrt{n} \int_{n^{3/2}}^{\infty} \mathbf{P}\{|h| > x\} dx \\ &\leq B\left(n^{3/2}, \frac{4}{3}\right) + \sqrt{n} B\left(n^{3/2}, \frac{4}{3}\right) \int_{n^{3/2}}^{\infty} x^{-4/3} dx = 4 B\left(n^{3/2}, \frac{4}{3}\right). \end{aligned} \quad (18)$$

Отсюда следует (17), поскольку $B(x, \frac{4}{3}) \rightarrow 0$, когда $x \rightarrow \infty$.

Далее, докажем, что для любого фиксированного $\frac{4}{3} < p \leq 2$ при $n \rightarrow \infty$

$$n^{(4-3p)/2} \mathbf{E} |h|^p I(|h| \leq n^{3/2}) \rightarrow 0. \quad (19)$$

Для этой цели пишем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} |h|^p I(|h| \leq n^{3/2}) &= \int_0^{n^{3/2}} x^p d\mathbf{P}\{|h| \leq x\} \\ &= - \int_0^{n^{3/2}} x^p d\mathbf{P}\{|h| > x\} = -n^{3p/2} \mathbf{P}\{|h| > n^{3/2}\} \\ &\quad + p \int_0^{n^{3/2}} x^{p-1} \mathbf{P}\{|h| > x\} dx \leq p \int_0^{n^{3/2}} x^{p-1} \mathbf{P}\{|h| > x\} dx \\ &= p \int_0^{n^{3/4}} x^{p-4/3-1} (x^{4/3} \mathbf{P}\{|h| > x\}) dx \\ &\quad + p \int_{n^{3/4}}^{n^{3/2}} x^{p-4/3-1} (x^{4/3} \mathbf{P}\{|h| > x\}) dx \\ &\leq \frac{p}{p-4/3} B\left(0, \frac{4}{3}\right) n^{3/4(p-4/3)} + \frac{p}{p-4/3} B\left(n^{3/4}, \frac{4}{3}\right) n^{3(p-4/3)/2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Отсюда следует (19).

По неравенству Гёльдера

$$\mathbf{E} |g^n(X_1) g^n(X_2) h^n(X_1, X_2)| \leq (\mathbf{E} h^2 I(|h| \leq n^{3/2}))^{1/2}.$$

Отсюда и из (19) при $p = 2$ имеем

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{E} |g^n(X_1) g^n(X_2) h^n(X_1, X_2)| \rightarrow 0,$$

когда $n \rightarrow \infty$. Это доказывает данное следствие.

Доказательство теоремы 2. В условиях доказываемой теоремы оценим выражение в правой части (2). Сначала отметим, что $\mathbf{E} g^2 I(|g| > \sqrt{n}) \leq (1/\sqrt{n}) \mathbf{E} |g|^3$. Аналогично (18) имеем

$$\sqrt{n} \mathbf{E} |h| I(|h| > n^{3/2}) \leq \frac{5}{2} B\left(n^{3/2}, \frac{5}{3}\right) \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{5}{2} B\left(0, \frac{5}{3}\right) \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (21)$$

Пусть $\frac{5}{3} < p \leq 2$. При таком p пишем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} |h|^p I(|h| \leq n^{3/2}) &= -n^{3p/2} \mathbf{P}\{|h| > n^{3/2}\} + p \int_0^{n^{3/2}} x^{p-1} \mathbf{P}\{|h| > x\} dx \\ &\leq p \int_0^{n^{3/2}} x^{p-1} \mathbf{P}\{|h| > x\} dx = p \int_0^{n^{3/2}} x^{p-5/3-1} (x^{5/3} \mathbf{P}\{|h| > x\}) dx \\ &\leq B\left(0, \frac{5}{3}\right) p \int_0^{n^{3/2}} x^{p-5/3-1} dx = \frac{p}{p-5/3} B\left(0, \frac{5}{3}\right) n^{(3/2)(p-5/3)}. \end{aligned}$$

Следовательно, для всех $\frac{5}{3} < p \leq 2$

$$\mathbf{E} |h|^p I(|h| \leq n^{3/2}) \leq \frac{p}{p-5/3} B\left(0, \frac{5}{3}\right) n^{(3p-5)/2}. \quad (22)$$

Выбирая затем $p = \frac{11}{6}$ в (2), видим с помощью (22), что

$$\begin{aligned} \gamma(n, p) \mathbf{E} |h|^p I(|h| \leq n^{3/2}) &n^{(4-3p)/2} \\ &\leq 3^{23/12} \cdot 2^{27/4} \left(3 \cdot 2^{5/6} + 11\sqrt{6} \cdot 2^{7/11}\right) B\left(0, \frac{5}{3}\right) \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Наконец, заметим, что по неравенству Гёльдера

$$\mathbf{E} |g^n(X_1) g^n(X_2) h^n(X_1, X_2)| \leq (\mathbf{E} |g|^3 \mathbf{E} |h|^{3/2})^{2/3},$$

где $\mathbf{E} |h|^{3/2} \leq 1 + 9 B(0, \frac{5}{3})$. Подставляя полученные оценки в (2), придем к (3).

Доказательство следствия 2. В силу приведенных оценок достаточно показать, что

$$\mathbf{E} |g^n(X_1) g^n(X_2) h^n(X_1, X_2)| \leq \frac{3}{5} \mathbf{E} |h|^{5/3} + \frac{2}{5} \mathbf{E} |g|^3.$$

Очевидно, что

$$\mathbf{E} |g^n(X_1) g^n(X_2) h^n(X_1, X_2)| \leq \mathbf{E} |g(X_1) g(X_2) h(X_1, X_2)|.$$

В известном неравенстве

$$ab \leq p^{-1}a^p + q^{-1}b^q, \quad a > 0, b > 0, p^{-1} + q^{-1} = 1$$

положим $a = |h(X_1, X_2)|$, $b = |g(X_1)g(X_2)|$, $p = \frac{5}{3}$ и $q = \frac{5}{2}$. Тогда

$$\mathbf{E} |g(X_1)g(X_2)h(X_1, X_2)| \leq \frac{3}{5} \mathbf{E} |h(X_1, X_2)|^{5/3} + \frac{2}{5} (\mathbf{E} |g(X_1)|^{5/2})^2.$$

Здесь по неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned} \mathbf{E} |g(X_1)|^{5/2} &= \mathbf{E} |g(X_1)| |g(X_1)|^{3/2} \leq (\mathbf{E} g^2(X_1))^{1/2} (\mathbf{E} |g(X_1)|^3)^{1/2} \\ &= (\mathbf{E} |g(X_1)|^3)^{1/2}. \end{aligned}$$

Это в результате доказывает данное следствие.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\frac{5}{3} < p \leq 2$. Действуя так же, как и при выводе (20), получаем неравенство

$$\begin{aligned} \mathbf{E} |h|^p I(|h| \leq n^{3/2}) &\leq \frac{p}{p-5/3} B\left(0, \frac{5}{3}\right) n^{3(p-5/3)/4} \\ &\quad + \frac{p}{p-5/3} B\left(n^{3/4}, \frac{5}{3}\right) n^{3(p-5/3)/2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Отметим, что при любом $x > 0$

$$B\left(0, \frac{5}{3}\right) \leq x^{5/3} + B\left(x, \frac{5}{3}\right). \quad (24)$$

Положим здесь $x = n^{1/8}$. В (2) и (23) возьмем $p = \frac{35}{18}$. Тогда из (23) с учетом (24) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} |h|^{35/18} I(|h| \leq n^{3/2}) n^{-11/12} \\ \leq 7 \left\{ \left(n^{5/24} + B\left(n^{1/8}, \frac{5}{3}\right) \right) n^{-5/24} + B\left(n^{3/4}, \frac{5}{3}\right) \right\} \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \leq \left(7 \mathbf{E} |g|^3 + 14 B\left(n^{1/8}, \frac{5}{3}\right) \right) \frac{1}{\sqrt{n}}, \end{aligned} \quad (25)$$

так как $1 \leq \mathbf{E} |g|^3$ и $B(n^{3/4}, \frac{5}{3}) \leq B(n^{1/8}, \frac{5}{3})$. В результате из (2), (21) и (25) приходим к (4). Теорема 3 доказана.

Автор выражает благодарность В. Бенткусу за замечание, которое привело к простому доказательству леммы 1, данному выше.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arcones M. A. Limits of canonical U -processes and B -valued U -statistics. — J. Theoret. Probab., 1994, v. 7, № 2, p. 339–349.
2. Bentkus V., Götze F. On minimal moment assumptions in Berry–Esséen theorems for U -statistics. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 3, с. 596–614.
3. Bentkus V., Götze F., Zitikis R. Lower estimates of the convergence rate for U -statistics. — Ann. Probab., 1994, v. 22, № 4, p. 1707–1714.

4. *Bickel P. J.* Edgeworth expansions in nonparametric statistics. — *Ann. Statist.*, 1974, v. 2, № 1, p. 1–20.
5. *Bolthausen E., Götze F.* The rate of convergence for multivariate sampling statistics. — *Ann. Statist.*, 1993, v. 21, № 4, p. 1692–1710.
6. Боровский Ю. В. Аппроксимация распределений U -статистик. — Докл. АН УССР, 1979, т. 9, с. 695–698.
7. Боровский Ю. В. Центральная предельная теорема для U -статистик. — Укр. матем. журн., 1989, т. 41, № 2, с. 269–271.
8. *Borovskikh Yu. V.* U -statistics in Banach Spaces. Utrecht: VSP, 420 p.
9. Боровский Ю. В., Королук В. С. Асимптотический анализ распределений статистик. Киев: Наукова думка, 1984.
10. Боровский Ю. В., Королук В. С. Аппроксимация невырожденных U -статистик. Теория вероятн. и ее примен., 1985, т. XXX, в. 3, с. 417–426.
11. *Borovskikh Yu. V., Korolyuk V. S.* Theory of U -statistics. Dordrecht: Kluwer, 1994, 552 p.
12. *Callaert H., Janssen P.* The Berry–Esséen theorem for U -statistics. — *Ann. Statist.*, 1978, v. 6, № 2, p. 417–421.
13. *Chan Y. K., Wierman J.* On the Berry–Esséen theorem for U -statistics. — *Ann. Probab.*, 1977, v. 5, № 1, p. 136–139.
14. *Friedrich K. O.* A Berry–Esséen bound for functions of independent random variables. — *Ann. Statist.*, 1989, v. 17, № 1, p. 170–183.
15. *Grams W. E., Serfling R. J.* Convergence rates for U -statistics and related statistics. — *Ann. Statist.*, 1973, v. 1, № 1, p. 153–160.
16. *Helmers R., van Zwet W. R.* A Berry–Esséen bound for U -statistics. — *Statistical Decision Theory and Related Topics. III. Vol. 1.* Ed. by S. S. Gupta and J. O. Berger. New York–London: Academic Press, 1982, p. 497–512.
17. *Hoeffding W.* A class of statistics with asymptotically normal distribution. — *Ann. Math. Statist.*, 1948, v. 19, № 3, p. 293–325.
18. *Lee A. J.* U -Statistics — Theory and Practice. New York: Dekker, 1990, 302 p.
19. *Maesono Y.* On the normal approximation of U -statistics of degree two. — *J. Statist. Plann. Inference*, 1991, v. 27, № 1, p. 37–50.
20. *Maesono Y., Yamato H.* U -statistics and related topics. — *Sugaku Expositions*, 1994, v. 7, № 1, p. 43–58.
21. Малевич Т. Л., Абдалимов Б. А. Уточнение предельной теоремы для U -статистик. — Изв. АН УзССР, физ.-матем., 1970, т. 2, с. 6–12.

Поступила в редакцию
17.XII.1997

Переработанный вариант
24.XI.1998