Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Н. Малышкин, Субэкспоненциальные оценки скорости сходимости к инвариантной мере для стохастических дифференциальных уравнений, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, том 45, выпуск 3, 489–504

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp481>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 16:25:42

© 2000 г.

МАЛЫШКИН М. Н.*

СУБЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ СКОРОСТИ
СХОДИМОСТИ К ИНВАРИАНТНОЙ МЕРЕ
ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ¹⁾

В работе доказываются существование и единственность инвариантной меры для стохастического дифференциального уравнения, а также найдены условия на коэффициент сноса, обеспечивающие субэкспоненциальную скорость сходимости к инвариантной мере и субэкспоненциальную скорость сходимости коэффициентов перемешивания Колмогорова.

Ключевые слова и фразы: стохастические дифференциальные уравнения, инвариантная мера, коэффициенты перемешивания, субэкспоненциальная скорость сходимости.

1. Введение. Рассмотрим решение стохастического дифференциального уравнения

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dw_t, \quad X_0 = x \in \mathbf{R}^d, \quad (1)$$

где $w_t, t \geq 0$, — винеровский процесс, b — измеримая, локально ограниченная функция, σ — ограниченная, непрерывная, невырожденная матрица размера $d \times d$. Обозначим

$$a(x) = \sigma \sigma^*(x), \quad \Lambda = \sup_x \frac{\text{Tr } a(x)}{d},$$
$$\lambda_+ = \sup_{x \neq 0} \left(a(x) \frac{x}{|x|}, \frac{x}{|x|} \right), \quad \lambda_- = \inf_{x \neq 0} \left(a(x) \frac{x}{|x|}, \frac{x}{|x|} \right).$$

Пусть выполнено условие:

$$\left(b(x), \frac{x}{|x|} \right) \leq -\frac{r}{|x|^p}, \quad |x| \geq M_0 > 0, \quad 0 < p < 1, \quad r > 0. \quad (2)$$

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия; e-mail: mnmal@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 98-01-00431, и INTAS, грант 94-0378.

Хорошо известно, что при выполнении условия $(b(x), x/|x|) \leq -r$ у процесса (1) существует инвариантная мера и справедлива оценка вида

$$\mathbf{E}_x e^{c\tau} < \infty, \quad \text{где } \tau = \inf(t \geq 0: |X_t| \leq M).$$

Кроме того, имеет место экспоненциальная скорость сходимости к инвариантной мере (см. [3]). В работе [1] доказано, что для $r > (d/2)\Lambda + \lambda_+ + \frac{1}{2}(\lambda_+ - \lambda_-)$ при выполнении условия

$$\left(b(x), \frac{x}{|x|}\right) \leq -\frac{r}{|x|}, \quad |x| \geq M_0, \quad (3)$$

существуют инвариантная мера и оценки:

$$\mathbf{E}_x \tau^k \leq C(1 + |x|^m), \quad \text{var}(\mu^x(t) - \mu^{\text{inv}}) \leq C(x)(1+t)^{-k}, \quad k, m > 0.$$

То есть имеется полиномиальная скорость сходимости к инвариантной мере. Так же оценивается скорость сходимости коэффициента перемешивания Колмогорова:

$$\beta^x(t) \leq C(x)(1+t)^{-k},$$

где $\beta^x(t) = \sup_{t \geq 0} \mathbf{E} \text{var}_{B \in \mathcal{F}_{t+s}^X} (\mathbf{P}(B | \mathcal{F}_s^X) - \mathbf{P}(B)), \mathcal{F}_s^X = \sigma(X_{s'}, s' \leq s), \mathcal{F}_{t+s}^X = \sigma(X_{s'}, s' \geq t+s).$

Похожие вопросы (с экспоненциальной и полиномиальной скоростью сходимости) изучались для дискретного времени (см. [9], [11]–[13], [15]).

В работе [10] получены результаты с субэкспоненциальной скоростью сходимости к инвариантной мере для стохастического дифференциального уравнения. Используется полугрупповой подход к решению данной проблемы. Отличие результатов данной работы в том, что мы налагаем более слабые ограничения на коэффициенты сноса и диффузии, а также используем другие методы решения. А именно, в данной статье мы применяем технику, основанную на возвратности процесса (и, более того, на конечности субэкспоненциальных моментов времени возвращения процесса). Также применяется метод склейки. Эта техника широко используется в [1], [2].

Кроме того, будет доказано существование и единственность инвариантной меры у процесса (1) при более слабом, чем в [1], условии, а именно, при условии (3) с $r > (d/2)\Lambda$.

В данной работе мы используем результаты Крылова (см. [6], [7]) о существовании слабого решения уравнения (1) и его строгой марковости.

2. Существование и единственность инвариантной меры.

Лемма 1. При выполнении условия (3) с $r > (d/2)\Lambda$, справедлива оценка: $\forall m \in (2, 2 + (2r - d\Lambda)\lambda_+^{-1})$

$$\mathbf{E}_x \tau \leq C(m)(1 + |x|^m). \quad (4)$$

Доказательство. Применим формулу Ито к процессу $(1+t)^k |X_t|^m$, при $k \in (-1, 0]$ и $t < \tau$ получаем:

$$\begin{aligned} d(1+t)^k |X_t|^m &= (1+t)^k |X_t|^{m-2} \\ &\times \left[k(1+t)^{-1} |X_t|^2 + m(X_t, b(X_t)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{m(m-2)}{2} \left(a(X_t) \frac{X_t}{|X_t|}, \frac{X_t}{|X_t|} \right) + \frac{m}{2} \operatorname{Tr} a(X_t) \right] dt \\ &+ m(1+t)^k |X_t|^{m-2} \sum_{i,j=1}^d X_t^i \sigma_i^j(X_t) dw_t^j \\ &\leq (1+t)^k |X_t|^{m-2} \left[-rm + \frac{m(m-2)}{2} \lambda_+ + \frac{md}{2} \Lambda \right] dt \\ &+ m(1+t)^k |X_t|^{m-2} \sum_{i,j=1}^d X_t^i \sigma_i^j(X_t) dw_t^j. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}[(1+t)^k |X_t|^m 1(t < \tau)] \\ &\leq -m \mathbf{E} \int_0^t (1+s)^k |X_s|^{m-2} \left(r - \frac{m-2}{2} \lambda_+ - \frac{d}{2} \Lambda \right) 1(s < \tau) ds \equiv J. \end{aligned}$$

Так как $s < \tau$, $m \in (2, 2 + (2r - d\Lambda) \lambda_+^{-1})$, получаем $|X_s|^{m-2} > M_0^{m-2}$, $r - (m-2) \lambda_+/2 - d\Lambda/2 > 0$, отсюда

$$\begin{aligned} J &\leq -m \left(r - \frac{m-2}{2} \lambda_+ - \frac{d}{2} \Lambda \right) M_0^{m-2} \mathbf{E} \int_0^t (1+s)^k 1(s < \tau) ds \\ &= -\hat{C} \left(\mathbf{E}(1+t \wedge \tau)^{k+1} - 1 \right), \quad \text{где } t \wedge \tau = \min(t, \tau). \end{aligned}$$

Тогда $\hat{C} \mathbf{E}(1+t \wedge \tau)^{k+1} \leq \hat{C} + |x|^m$. При $k = 0$ для любого $t \geq 0$ получаем

$$\mathbf{E}(1+t \wedge \tau) \leq C(m) (1 + |x|^m).$$

Отсюда с помощью леммы Фату получаем (4).

Теорема 1. При выполнении условия (3) с $r > (d/2) \Lambda$ существует и единственна инвариантная мера $\mu^{X, \text{inv}}$ для уравнения (1).

Доказательство. Введем следующие области: $U = \{x: |x| < M\}$, где $M > M_0$, $\Gamma = \partial U$; $U_1 = \{x: |x| < M+1\}$, $\Gamma_1 = \partial U_1$.

Будем рассматривать последовательность моментов остановки: $\tau_0 = 0$,

$$\tau'_1 = \inf\{t \geq \tau_0 \mid X_t \in \Gamma\}, \quad \tau_1 = \inf\{t \geq \tau'_1 \mid X_t \in \Gamma_1\}, \quad \dots$$

Из (4) следует, что $\sup_{x \in K} \mathbf{E}_x \tau_1' < \infty$ для любого компакта $K \subset \bar{U}$, а по следствию 2 теоремы 3.7.1 из [5] $\sup_{|x|=M} \mathbf{E}_x \tau_1 < \infty$. Таким образом, все условия теоремы 4.4.1 из [5] выполнены. Кроме того, в [5] от коэффициентов уравнения требуется липшицевость. Как можно заметить, это не является препятствием: липшицевость требуется только в доказательстве существования положительной плотности у распределения $\mathbf{P}\{X(\tau_{U_1}) \in \gamma\}$, $\gamma \in \Gamma_1 = \partial U_1$, но для доказательства существования плотности можно применить неравенство Харнака для параболического уравнения с измеримыми коэффициентами (см. [8]).

Применяя следствие 4.5.2 из [5], получаем единственность инвариантной меры.

З а м е ч а н и е 1. Как легко увидеть, условие (3) с $r > (d/2) \wedge$ слабее (2), поэтому утверждения теоремы 1 остаются верными при условии (2).

3. Субэкспоненциальные оценки.

Теорема 2. При выполнении условия (2) $\forall \alpha \in (0, (1-p)/2)$, $\beta \in [2\alpha, 1-p)$, $\exists \delta > 0$:

$$\text{var}(\mu^x(t) - \mu^{\text{inv}}) \leq C(1 + e^{\delta|x|^\beta})e^{-\delta t^\alpha}, \quad (5)$$

где $\mu^x(t)$ — распределение X_t , $x = X_0$, и μ^{inv} — инвариантная мера для X_t .

При условии (2) с $r > (1-p) \lambda_+/2$ утверждение теоремы выполняется и для $\alpha = (1-p)/2$, $\beta = 1-p$.

Теорема 3. При выполнении условия (2) $\forall \alpha \in (0, (1-p)/2)$, $\beta \in [2\alpha, 1-p)$

$$\mathbf{E}_x e^{|X_t|^\beta} \leq C(1 + e^{|x|^\beta}). \quad (6)$$

При условии (2) с $r > (1-p) \lambda_+/2$ утверждение теоремы выполняется и для $\alpha = (1-p)/2$, $\beta = 1-p$.

Теорема 4. При выполнении условий теоремы 2

$$\beta^x(t) \leq C(1 + e^{\delta|x|^\beta})e^{-\delta t^\alpha}. \quad (7)$$

4. Вспомогательные результаты.

Лемма 2. При выполнении условия (2) $\forall 0 < \beta < 1-p$, $k > 0$

$$\sup_{t \geq 0} \mathbf{E}_x e^{k|X_t|^\beta} 1(t < \tau) \leq e^{k|x|^\beta}. \quad (8)$$

При условии (2) с $r > k(1-p) \lambda_+/2$ утверждение теоремы выполняется и для $\beta = 1-p$.

Доказательство. Применим формулу Ито к процессу $\exp(k|X_t|^\beta)$, при $t < \tau$ получаем:

$$\begin{aligned} de^{k|X_t|^\beta} &= \frac{k\beta e^{k|X_t|^\beta}}{|X_t|^{2-\beta}} \left((X_t, b(X_t)) + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} a(X_t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(a(X_t) \frac{X_t}{|X_t|}, \frac{X_t}{|X_t|} \right) (k\beta|X_t|^\beta + \beta - 2) \right) dt \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^d k\beta e^{k|X_t|^\beta} |X_t|^{\beta-2} X_t^i \sigma_i^j(X_t) dw_t^j \\ &\leq \frac{k\beta e^{k|X_t|^\beta}}{|X_t|^{2-\beta}} \left((X_t, b(X_t)) + \frac{d}{2} \Lambda + \frac{k\beta|X_t|^\beta}{2} \lambda_+ - \frac{2-\beta}{2} \lambda_- \right) dt \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^d k\beta e^{k|X_t|^\beta} |X_t|^{\beta-2} X_t^i \sigma_i^j(X_t) dw_t^j. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x e^{k|X_t|^\beta} 1(t < \tau) - e^{k|x|^\beta} \\ \leq \mathbf{E}_x \int_0^t \frac{k\beta e^{k|X_s|^\beta}}{|X_s|^{2-\beta}} \left(-r|X_s|^{1-p} + \frac{k\beta|X_s|^\beta}{2} \lambda_+ + \frac{d}{2} \Lambda \right) 1(s < \tau) ds \leq 0 \end{aligned}$$

(при достаточно большом $M \forall r > 0, k > 0$ т.к. при $\beta = 1 - p$ получаем, что $r > k(1 - p) \lambda_+/2$; это неравенство сохраняется и для $\beta < 1 - p$).

Отсюда сразу получаем (8).

Теорема 5. При выполнении условия (2) $\forall \alpha \in (0, (1 - p)/2), \beta \in [2\alpha, 1 - p]$ существует $M_1 \geq M_0$ такое, что для любого $M \geq M_1$

$$\mathbf{E}_x e^{\tau^\alpha} \leq C(1 + e^{|x|^\beta}). \quad (9)$$

При условии (2) с $r > (1 - p) \lambda_+/2$ утверждение теоремы выполняется и для $\alpha = (1 - p)/2, \beta = 1 - p$.

Доказательство. Применим формулу Ито к процессу $[e^{(1+t)^\alpha}/(1+t)^{1-\alpha}] |X_t|^m$, при $t < \tau, m \geq 2$ получаем:

$$\begin{aligned} d \frac{e^{(1+t)^\alpha}}{(1+t)^{1-\alpha}} |X_t|^m &= \frac{e^{(1+t)^\alpha}}{(1+t)^{2(1-\alpha)}} |X_t|^{m-2} \\ &\quad \times \left[\left(\alpha - \frac{1-\alpha}{(t+1)^\alpha} \right) |X_t|^2 + m(t+1)^{1-\alpha} \right. \\ &\quad \times \left((X_t, b(X_t)) + \frac{1}{2} (m-2) \left(a(X_t) \frac{X_t}{|X_t|}, \frac{X_t}{|X_t|} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} a(X_t) \right) \Big] dt \\ &\quad + m \frac{e^{(1+t)^\alpha}}{(1+t)^{1-\alpha}} |X_t|^{m-2} \sum_{i,j=1}^d X_t^i \sigma_i^j(X_t) dw_t^j \leq \frac{e^{(1+t)^\alpha}}{(1+t)^{2(1-\alpha)}} |X_t|^{m-2} \end{aligned}$$

$$\times \left[\alpha |X_t|^2 + m(t+1)^{1-\alpha} \left((X_t, b(X_t)) + \frac{m-2}{2} \lambda_+ + \frac{d}{2} \Lambda \right) \right] dt \\ + m \frac{e^{(1+t)^\alpha}}{(1+t)^{1-\alpha}} |X_t|^{m-2} \sum_{i,j=1}^d X_t^i \sigma_i^j(X_t) dw_t^j.$$

Тогда

$$\mathbf{E}_x \frac{e^{(1+t)^\alpha}}{(1+t)^{1-\alpha}} |X_t|^m 1(t < \tau) - e|x|^m \\ \leq \mathbf{E}_x \int_0^t \frac{e^{(1+s)^\alpha}}{(1+s)^{2(1-\alpha)}} |X_s|^{m+\beta-2} \left[\alpha |X_s|^{2-\beta} - m(s+1)^{1-\alpha} \right. \\ \left. \times \left(r |X_s|^{1-p-\beta} - \frac{1}{2|X_s|^\beta} ((m-2) \lambda_+ + d\Lambda) \right) \right] 1(s < \tau) ds \\ \leq \mathbf{E}_x \int_0^t \frac{e^{(1+s)^\alpha}}{(1+s)^{2(1-\alpha)}} |X_s|^{m+\beta-2} \\ \times \left[\alpha |X_s|^{2-\beta} - m\varepsilon_0(s+1)^{1-\alpha} \right] 1(s < \tau) ds \equiv H.$$

При достаточно большом M

$$\varepsilon_0 = rM^{1-p-\beta} - \frac{(m-2) \lambda_+ + \Lambda d}{2M^\beta} > 0.$$

Отсюда

$$H = \mathbf{E}_x \int_0^t \frac{e^{(1+s)^\alpha}}{(1+s)^{2(1-\alpha)}} |X_s|^{m+\beta-2} \left[\alpha |X_s|^{2-\beta} - m\varepsilon_0(s+1)^{1-\alpha} \right] \\ \times \left(1 \left(|X_s|^{2-\beta} \leq \varepsilon_1(1+s)^{1-\alpha} \right) \right. \\ \left. + 1 \left(|X_s|^{2-\beta} > \varepsilon_1(1+s)^{1-\alpha} \right) \right) 1(s < \tau) ds \equiv H_1 + H_2,$$

где $\varepsilon_1 = m\varepsilon_0/(2\alpha)$;

$$H_1 \leq -\varepsilon_1 \alpha \mathbf{E}_x \int_0^t \frac{e^{(1+s)^\alpha} |X_s|^{m+\beta-2}}{(1+s)^{1-\alpha}} 1 \left(|X_s|^{2-\beta} \leq \varepsilon_1(1+s)^{1-\alpha} \right) 1(s < \tau) ds \\ \leq -\varepsilon_1 \alpha M^{m+\beta-2} \mathbf{E}_x \int_0^t \frac{e^{(1+s)^\alpha}}{(1+s)^{1-\alpha}} 1(s < \tau) ds \\ + \varepsilon_1 \alpha \mathbf{E}_x \int_0^t \frac{e^{(1+s)^\alpha} |X_s|^{m+\beta-2}}{(1+s)^{1-\alpha}} 1 \left(|X_s|^{2-\beta} > \varepsilon_1(1+s)^{1-\alpha} \right) 1(s < \tau) ds \\ = -\varepsilon_1 M^{m+\beta-2} \mathbf{E}_x e^{(\tau_t+1)^\alpha} + H_3, \quad \text{где } \tau_t = \tau \wedge t;$$

$$\begin{aligned}
H_2 &\leq \alpha \mathbf{E}_x \int_0^t \frac{e^{(1+s)^\alpha} |X_s|^m}{(1+s)^{2(1-\alpha)}} 1(|X_s|^{2-\beta} > \varepsilon_1(1+s)^{1-\alpha}) 1(s < \tau) ds \\
&\leq \int_0^\infty \frac{e^{(1+s)^\alpha}}{(1+s)^{2(1-\alpha)}} (\mathbf{E}_x |X_s|^{am} 1(s < \tau))^{1/a} \\
&\quad \times \left(\mathbf{P}_x \{ |X_s|^{2-\beta} > \varepsilon_1(1+s)^{1-\alpha}; s < \tau \} \right)^{1/c} ds \\
&\leq \int_0^\infty \frac{e^{(1+s)^\alpha}}{(1+s)^{2(1-\alpha)}} \left(\mathbf{E}_x e^{|X_s|^\beta} 1(s < \tau) \right)^{1/a} \\
&\quad \times \left(\frac{\mathbf{E}_x e^{|X_s|^\beta} 1(s < \tau)}{\exp\{\varepsilon_1(1+s)^{(1-\alpha)\beta/(2-\beta)}\}} \right)^{1/c} ds.
\end{aligned}$$

При s , достаточно близком к 1, получаем условие на β : $(1-\alpha)\beta/(2-\beta) \geq \alpha$, отсюда $\beta \geq 2\alpha$. Но по лемме 2: $\beta \leq 1-p$, отсюда получаем условие $\alpha \in (0, (1-p)/2]$, причем в случае $\alpha = (1-p)/2$ величина τ из условия (2) должна быть строго больше $(1-p)\lambda_+/2$. Тогда, применяя (8), получаем:

$$H_2 \leq C e^{|x|^\beta} \int_0^\infty \frac{ds}{(1+s)^{2(1-\alpha)} (e^{(1+s)^\alpha})^{\varepsilon_1(1+s)^\varepsilon - 1}} < \hat{C} e^{|x|^\beta},$$

где $\varepsilon = (1-\alpha)\beta/(2-\beta) - \alpha \geq 0$. Аналогично показывается, что $H_3 \leq C e^{|x|^\beta}$. Отсюда

$$\mathbf{E}_x e^{\tau^\alpha} \leq C(m) (1 + e^{|x|^\beta}).$$

Чтобы получить (9), остается применить лемму Фату.

Лемма 3. При выполнении (2) $\forall 0 < \beta < 1-p$, $k > 0$

$$\int e^{k|x|^\beta} \mu(dx) < \infty, \quad (10)$$

где μ — инвариантная мера. При условии (2) с $\tau > k(1-p)\lambda_+/2$ утверждение теоремы выполняется и для $\beta = 1-p$.

Доказательство. В [5] при доказательстве существования инвариантной меры получено ее представление:

$$\int f(y) \mu(dy) = \frac{1}{\nu(\mathbf{R}^d)} \int_{\Gamma_1} \tilde{\mu}(dx) \mathbf{E}_x \int_0^{\tau_1} f(X(t)) dt,$$

где $\nu(A) = \int_{\Gamma_1} \tilde{\mu}(dx) \mathbf{E}_x \tau^A$, $\tilde{\mu}$ — стационарное распределение цепи Маркова, τ^A — время, проведенное $X(t)$ в множестве A за первый цикл. Очевидно, $\tau^A < \tau_1$. Для доказательства (10) оценим:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_x \int_0^{\tau_1} e^{k|X_s|^\beta} ds &= \mathbf{E}_x \int_0^{\tau_1'} e^{k|X_s|^\beta} ds + \mathbf{E}_x \int_{\tau_1'}^{\tau_1} e^{k|X_s|^\beta} ds \\
&\leq \int_0^\infty \left(\mathbf{E}_x e^{ak|X_s|^\beta} 1(s < \tau_1') \right)^{1/a} (\mathbf{P}_x \{ \tau_1' > s \})^{1/c} ds \\
&\quad + e^{k(M+1)^\beta} \mathbf{E}_x (\tau_1 - \tau_1') \equiv J.
\end{aligned}$$

При $\beta < 1 - p$ можно брать любые a и c . При $\beta = 1 - p$ возьмем a достаточно близким к единице. Тогда получаем условие на r : $r > k(1 - p) \lambda_+ / 2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} J &\leq C e^{k|x|^\beta} (1 + e^{|x|^\beta})^{1/c} \int_0^\infty \frac{ds}{e^{s^\alpha/c}} + e^{k(M+1)^\beta} \mathbf{E}_x(\tau_1 - \tau'_1) \\ &\leq \hat{C} e^{k|x|^\beta} (1 + e^{|x|^\beta})^{1/c} + e^{k(M+1)^\beta} \mathbf{E}_x(\tau_1 - \tau'_1). \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} \int e^{k|y|^\beta} \mu(dy) &\leq \frac{\tilde{\mu}(\Gamma_1)}{\nu(\mathbf{R}^d)} \left(\sup_{|x|=M+1} \hat{C} e^{k|x|^\beta} (1 + e^{|x|^\beta})^{1/c} + \tilde{C} \sup_{|x|=M} \mathbf{E}_x \tau_1 \right) \\ &\leq C < \infty. \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Рассмотрим пару (X_t, Y_t) двух независимых решений уравнения (1) с начальными условиями x и y и двумя копиями винеровского процесса w и $\tilde{w}$ соответственно. Обозначим

$$\gamma = \inf(t \geq 0: |X_t| \vee |Y_t| \leq M), \quad \text{где } a \vee b = \max(a, b).$$

Лемма 4. При выполнении условия (2) $\forall \alpha \in (0, (1 - p)/2)$, $\beta \in [2\alpha, 1 - p)$ существует $M_1 \geq M_0$ такое, что для любого $M \geq M_1$

$$\mathbf{E}_{x,y} e^{\gamma^\alpha} \leq C (1 + e^{|x|^\beta} + e^{|y|^\beta}). \quad (11)$$

При условии (2) с $r > (1 - p) \lambda_+ / 2$ утверждение теоремы выполняется и для $\alpha = (1 - p)/2$, $\beta = 1 - p$.

Доказательство. Применим формулу Ито к процессу $[(e^{(1+t)^\alpha}) / (1+t)^{1-\alpha}] (|X_t|^m + |Y_t|^m)$, при $t < \gamma$, $m \geq 2$ получаем:

$$\begin{aligned} d \frac{e^{(1+t)^\alpha}}{(1+t)^{1-\alpha}} (|X_t|^m + |Y_t|^m) &= \frac{e^{(1+t)^\alpha}}{(1+t)^{2(1-\alpha)}} \\ &\times \left\{ |X_t|^{m-2} \left[\left(\alpha - \frac{1-\alpha}{(t+1)^\alpha} \right) |X_t|^2 + m(t+1)^{1-\alpha} \right. \right. \\ &\quad \times \left((X_t, b(X_t)) + \frac{1}{2} (m-2) \left(a(X_t) \frac{X_t}{|X_t|}, \frac{X_t}{|X_t|} \right) + \frac{1}{2} \text{Tr } a(X_t) \right) \\ &\quad + |Y_t|^{m-2} \left[\left(\alpha - \frac{1-\alpha}{(t+1)^\alpha} \right) |Y_t|^2 + m(t+1)^{1-\alpha} \right. \\ &\quad \times \left. \left. \left((Y_t, b(Y_t)) + \frac{1}{2} (m-2) \left(a(Y_t) \frac{Y_t}{|Y_t|}, \frac{Y_t}{|Y_t|} \right) + \frac{1}{2} \text{Tr } a(Y_t) \right) \right] \right\} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + m \frac{e^{(1+t)^\alpha}}{(1+t)^{1-\alpha}} |X_t|^{m-2} \sum_{i,j=1}^d X_t^i \sigma_i^j(X_t) dw_t^j \\
& + m \frac{e^{(1+t)^\alpha}}{(1+t)^{1-\alpha}} |Y_t|^{m-2} \sum_{i,j=1}^d Y_t^i \sigma_i^j(Y_t) d\tilde{w}_t^j \leq \frac{e^{(1+t)^\alpha}}{(1+t)^{2(1-\alpha)}} \\
& \times \left\{ |X_t|^{m-2} \left[\alpha |X_t|^2 + m(t+1)^{1-\alpha} \left((X_t, b(X_t)) + \frac{m-2}{2} \lambda_+ + \frac{d}{2} \Lambda \right) \right] \right. \\
& \left. + |Y_t|^{m-2} \left[\alpha |Y_t|^2 + m(t+1)^{1-\alpha} \left((Y_t, b(Y_t)) + \frac{m-2}{2} \lambda_+ + \frac{d}{2} \Lambda \right) \right] \right\} dt \\
& + m \frac{e^{(1+t)^\alpha}}{(1+t)^{1-\alpha}} |X_t|^{m-2} \sum_{i,j=1}^d X_t^i \sigma_i^j(X_t) dw_t^j \\
& + m \frac{e^{(1+t)^\alpha}}{(1+t)^{1-\alpha}} |Y_t|^{m-2} \sum_{i,j=1}^d Y_t^i \sigma_i^j(Y_t) d\tilde{w}_t^j.
\end{aligned}$$

Обозначим $\gamma_t = \gamma \wedge t$. Тогда

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}_{x,y} \frac{e^{(1+t)^\alpha}}{(1+t)^{1-\alpha}} (|X_t|^m + |Y_t|^m) 1(t < \gamma) - e(|x|^m + |y|^m) \\
& \leq \mathbf{E}_{x,y} \int_0^{\gamma_t} \frac{e^{(1+s)^\alpha}}{(1+s)^{2(1-\alpha)}} \\
& \times \left\{ |X_s|^{m-2} \left[\alpha |X_s|^2 + m(s+1)^{1-\alpha} \left((X_s, b(X_s)) + \frac{m-2}{2} \lambda_+ + \frac{d}{2} \Lambda \right) \right] \right. \\
& \left. + |Y_s|^{m-2} \left[\alpha |Y_s|^2 + m(s+1)^{1-\alpha} \left((Y_s, b(Y_s)) + \frac{m-2}{2} \lambda_+ + \frac{d}{2} \Lambda \right) \right] \right\} \\
& \times \left\{ 1(|X_s|^{2-\beta} \leq \varepsilon_1(1+s)^{1-\alpha}; |X_s| > M; \right. \\
& \quad |Y_s|^{2-\beta} \leq \varepsilon_1(1+s)^{1-\alpha}; |Y_s| > M) \\
& + 1(|X_s|^{2-\beta} \leq \varepsilon_1(1+s)^{1-\alpha}; |X_s| > M; \\
& \quad |Y_s|^{2-\beta} > \varepsilon_1(1+s)^{1-\alpha}; |Y_s| > M) \\
& + 1(|X_s|^{2-\beta} > \varepsilon_1(1+s)^{1-\alpha}; |X_s| > M; \\
& \quad |Y_s|^{2-\beta} \leq \varepsilon_1(1+s)^{1-\alpha}; |Y_s| > M) \\
& + 1(|X_s|^{2-\beta} > \varepsilon_1(1+s)^{1-\alpha}; |X_s| > M; \\
& \quad |Y_s|^{2-\beta} > \varepsilon_1(1+s)^{1-\alpha}; |Y_s| > M) \\
& \left. + 1(|X_s|^{2-\beta} \leq \varepsilon_1(1+s)^{1-\alpha}; |X_s| > M; M_0 \leq |Y_s| \leq M) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 1(|X_s|^{2-\beta} > \varepsilon_1(1+s)^{1-\alpha}; |X_s| > M; M_0 \leq |Y_s| \leq M) \\
& + 1(M_0 \leq |X_s| \leq M; |Y_s|^{2-\beta} > \varepsilon_1(1+s)^{1-\alpha}; |Y_s| > M) \\
& + 1(M_0 \leq |X_s| \leq M; |Y_s|^{2-\beta} \leq \varepsilon_1(1+s)^{1-\alpha}; |Y_s| > M) \\
& + 1(|X_s|^{2-\beta} > \varepsilon_1(1+s)^{1-\alpha}; |X_s| > M; |Y_s| < M_0) \\
& + 1(|X_s|^{2-\beta} \leq \varepsilon_1(1+s)^{1-\alpha}; |X_s| > M; |Y_s| < M_0) \\
& + 1(|X_s| < M_0; |Y_s|^{2-\beta} > \varepsilon_1(1+s)^{1-\alpha}; |Y_s| > M) \\
& + 1(|X_s| < M_0; |Y_s|^{2-\beta} \leq \varepsilon_1(1+s)^{1-\alpha}; |Y_s| > M) \Big\} ds \equiv \sum_{l=1}^{12} J_l.
\end{aligned}$$

Здесь ε_1 такое же, как в доказательстве теоремы 5. Обозначим I_l — индикатор, соответствующий интегралу J_l . Оценим интегралы:

$$\begin{aligned}
J_1 & \leq -\varepsilon_1 \alpha M^{m+\beta-2} \mathbf{E}_{x,y} \int_0^{\gamma t} \frac{e^{(1+s)^\alpha}}{(1+s)^{1-\alpha}} I_1 ds; \\
J_2 & \leq -\varepsilon_1 \alpha M^{m+\beta-2} \mathbf{E}_{x,y} \int_0^{\gamma t} \frac{e^{(1+s)^\alpha}}{(1+s)^{1-\alpha}} I_2 ds + J_{13}; \\
J_3 & \leq -\varepsilon_1 \alpha M^{m+\beta-2} \mathbf{E}_{x,y} \int_0^{\gamma t} \frac{e^{(1+s)^\alpha}}{(1+s)^{1-\alpha}} I_3 ds + J_{14}; \\
J_4 & \leq J_{15} + J_{16}; \\
J_5 & \leq -\varepsilon_1 \alpha M^{m+\beta-2} \mathbf{E}_{x,y} \int_0^{\gamma t} \frac{e^{(1+s)^\alpha}}{(1+s)^{1-\alpha}} I_5 ds \\
& + \mathbf{E}_{x,y} \int_0^{\gamma t} \frac{e^{(1+s)^\alpha}}{(1+s)^{2(1-\alpha)}} |Y_s|^{m+\beta-2} \\
& \quad \times \left[\alpha |Y_s|^{2-\beta} - m(s+1)^{1-\alpha} \right. \\
& \quad \left. \times \left(r |Y_s|^{1-p-\beta} - \frac{(m-2)\lambda_+ + \Lambda d}{2|Y_s|^\beta} \right) \right] I_5 ds \\
& \leq -\varepsilon_1 \alpha M^{m+\beta-2} \mathbf{E}_{x,y} \int_0^{\gamma t} \frac{e^{(1+s)^\alpha}}{(1+s)^{1-\alpha}} I_5 ds \\
& + \mathbf{E}_{x,y} \int_0^{\gamma t} \frac{e^{(1+s)^\alpha}}{(1+s)^{2(1-\alpha)}} |Y_s|^{m+\beta-2} \left[\alpha |Y_s|^{2-\beta} - \tilde{\varepsilon}_0 m(s+1)^{1-\alpha} \right] \\
& \quad \times I_5 1(|Y_s|^{2-\beta} > \tilde{\varepsilon}_1(1+s)^{1-\alpha}) ds.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\tilde{\varepsilon}_0 = r M_0^{1-p-\beta} - \frac{(m-2)\lambda_+ + \Lambda d}{2M_0^\beta} > 0 \quad \text{и} \quad \tilde{\varepsilon}_1 = \frac{m\tilde{\varepsilon}_0}{2\alpha}.$$

При достаточно большом M_0 $\tilde{\varepsilon}_0 > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} J_5 &\leq -\varepsilon_1 \alpha M^{m+\beta-2} \mathbf{E}_{x,y} \int_0^{\gamma_t} \frac{e^{(1+s)^\alpha}}{(1+s)^{1-\alpha}} I_5 ds \\ &\quad + M^m \int_1^{(M^{2-\beta}/\tilde{\varepsilon}_1)^{\alpha/(1-\alpha)}} e^t dt \\ &\leq -\varepsilon_1 \alpha M^{m+\beta-2} \mathbf{E}_{x,y} \int_0^{\gamma_t} \frac{e^{(1+s)^\alpha}}{(1+s)^{1-\alpha}} I_5 ds + M^m e^{(M^{2-\beta}/\tilde{\varepsilon}_1)^{\alpha/(1-\alpha)}}. \end{aligned}$$

Аналогично оцениваем J_l , $l = 6, \dots, 12$:

$$\begin{aligned} J_6 &\leq J_{17} + M^m e^{(M^{2-\beta}/\tilde{\varepsilon}_1)^{\alpha/(1-\alpha)}}; \\ J_7 &\leq M^m e^{(M^{2-\beta}/\tilde{\varepsilon}_1)^{\alpha/(1-\alpha)}} + J_{18}; \\ J_8 &\leq M^m e^{(M^{2-\beta}/\tilde{\varepsilon}_1)^{\alpha/(1-\alpha)}} - \varepsilon_1 \alpha M^{m+\beta-2} \mathbf{E}_{x,y} \int_0^{\gamma_t} \frac{e^{(1+s)^\alpha-1}}{(1+s)^{1-\alpha}} I_8 ds; \\ J_9 &\leq J_{19} + C M_0^m \mathbf{E}_{x,y} e^{(\gamma_t+1)^\alpha}; \\ J_{10} &\leq -\varepsilon_1 \alpha M^{m+\beta-2} \mathbf{E}_{x,y} \int_0^{\gamma_t} \frac{e^{(1+s)^\alpha}}{(1+s)^{1-\alpha}} I_{10} ds + C M_0^m \mathbf{E}_{x,y} e^{(\gamma_t+1)^\alpha}; \\ J_{11} &\leq C M_0^m \mathbf{E}_{x,y} e^{(\gamma_t+1)^\alpha} + J_{20}; \\ J_{12} &\leq C M_0^m \mathbf{E}_{x,y} e^{(\gamma_t+1)^\alpha} - \varepsilon_1 \alpha M^{m+\beta-2} \mathbf{E}_{x,y} \int_0^{\gamma_t} \frac{e^{(1+s)^\alpha}}{(1+s)^{1-\alpha}} I_{12} ds. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{12} J_l &\leq C_2(M) + \sum_{l=13}^{20} J_l + C_3 M_0^m \mathbf{E}_{x,y} e^{(\gamma_t+1)^\alpha} \\ &\quad - C_4 \alpha M^{m+\beta-2} \mathbf{E}_{x,y} \int_0^{\gamma_t} \frac{e^{(1+s)^\alpha}}{(1+s)^{1-\alpha}} \\ &\quad \times \left(1 - 1(|X_s|^{2-\beta} \wedge |Y_s|^{2-\beta} > \varepsilon_1(1+s)^{1-\alpha})\right) ds \\ &\equiv C_2(M) + \sum_{l=13}^{20} J_l + C_3 M_0^m \mathbf{E}_{x,y} e^{(\gamma_t+1)^\alpha} \\ &\quad - C_4 M^{m+\beta-2} \mathbf{E}_{x,y} e^{(\gamma_t+1)^\alpha} + J_{21}. \end{aligned}$$

Интегралы J_l , $l = 13, \dots, 21$, оцениваются полностью аналогично интегралам H_2 , H_3 из теоремы 5:

$$\sum_{l=13}^{21} J_l \leq C \left(e^{|x|^\beta} + e^{|y|^\beta} \right).$$

При достаточно большом M получаем $C_4 M^{m+\beta-2} > C_3 M_0^m$, тогда:

$$\left(C_4 M^{m+\beta-2} - C_3 M_0^m \right) \mathbf{E}_{x,y} e^{(\gamma_t+1)^\alpha} \leq \hat{C} \left(1 + e^{|x|^\beta} + e^{|y|^\beta} \right).$$

Отсюда по лемме Фату получаем (11). Лемма 4 доказана.

5. Доказательство субэкспоненциальных оценок.

Доказательство теоремы 2. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1 из [1]. Рассмотрим пару (X_t, Y_t) двух независимых решений уравнения (1) с начальными значениями $X_0 = x$, Y_0 имеет распределение μ^{inv} . Введем последовательность моментов останковки:

$$\gamma_1 = \inf (t \geq s_0: |X_t| \vee |Y_t| \leq M);$$

для $n \geq 1$

$$\begin{aligned} T_n &= \inf (t \geq \gamma_n: |X_t| \geq M+1 \text{ или } |Y_t| \geq M+1), \\ T'_n &= T_n \wedge (\gamma_n + 1), \\ \gamma_{n+1} &= \inf (t \geq T'_n: |X_t| \vee |Y_t| \leq M). \end{aligned}$$

По лемме 4,

$$\mathbf{E} \left(e^{(\gamma_1 - s_0)^\alpha} \mid \widehat{\mathcal{F}}_{s_0} \right) \leq C \mathbf{E} \left(1 + e^{|X_{s_0}|^\beta} + e^{|Y_{s_0}|^\beta} \mid \widehat{\mathcal{F}}_{s_0} \right),$$

где $\widehat{\mathcal{F}}_{s_0} \equiv \mathcal{F}_{s_0}^{X, Y, \tilde{X}}$. При $s_0 = 0$, по лемме 3:

$$\mathbf{E}_x e^{\gamma_1^\alpha} \leq C \mathbf{E}_x \left(1 + e^{|x|^\beta} + e^{|Y_0|^\beta} \right) \leq \tilde{C} \left(1 + e^{|x|^\beta} \right),$$

аналогично,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(e^{(\gamma_k - T'_{k-1})^\alpha} \mid \widehat{\mathcal{F}}_{\gamma_{k-1}} \right) &\leq C \mathbf{E} \left(1 + e^{|X_{T'_{k-1}}|^\beta} + e^{|Y_{T'_{k-1}}|^\beta} \mid \widehat{\mathcal{F}}_{\gamma_{k-1}} \right) \\ &\leq C \left(1 + e^{(M+1)^\beta} \right) = \tilde{C}. \end{aligned}$$

Обозначим $n(t) = \sup (n \geq 0: \gamma_n \leq t)$. С помощью последнего неравенства и строго марковского свойства получаем

$$\mathbf{P}\{n(t) \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty\} = 1.$$

Используя метод склейки (coupling method, см. [16], [4]) определим новый процесс $(\tilde{X}_t)$ и случайную величину $L = L_{s_0} \geq s_0$ на некотором расширении вероятностного пространства (при этом определения вероятности и математического ожидания не меняются). По определению $(\tilde{X}_t)$ эквивалентен по распределению процессу (X_t) и, более того,

$$\mathbf{P}\{\tilde{X}_t = X_t, t \leq L_{s_0}\} = \mathbf{P}\{\tilde{X}_t = Y_t, t \geq L_{s_0}\} = 1,$$

где L_{s_0} есть $\widehat{\mathcal{F}}_{s_0}$ -измеримый момент останковки. Кроме того, существует $q \in (0, 1)$ такое, что

$$\sup_{s_0 \geq 0} \mathbf{P}\{L_{s_0} > \gamma_n \mid \widehat{\mathcal{F}}_{s_0}\} \leq q^n \quad \forall n.$$

Для доказательства (5) заметим, что

$$\text{var}(\mu^x(t) - \mu^{\text{inv}}) \leq \sup_A |\mathbf{P}_x\{\tilde{X}_t \in A\} - \mathbf{P}\{Y_t \in A\}| \leq \mathbf{P}\{L_0 > t\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x\{L_0 > t\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_x(1(L_0 > t) 1(\gamma_n \leq t < \gamma_{n+1})) \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} [\mathbf{P}_x\{L_0 > \gamma_n\}]^{1/a} [\mathbf{P}\{\gamma_{n+1} > t\}]^{1/c}. \end{aligned}$$

Как мы уже знаем, $[\mathbf{P}_x\{L_0 > \gamma_n\}]^{1/a} \leq (q^{1/a})^n$. По неравенству Чебышева при $0 < \delta < 1$ получаем

$$\mathbf{P}_x\{\gamma_{n+1} > t\} \leq e^{-\delta t^\alpha} \mathbf{E}_x e^{\delta \gamma_{n+1}^\alpha}.$$

По неравенству Гёльдера:

$$\mathbf{E}_x e^{\delta \gamma_{n+1}^\alpha} \leq (\mathbf{E}_x e^{(1/\delta) \delta \gamma_{n+1}^\alpha})^\delta (\mathbf{E}_x 1)^{1-\delta} \leq (\mathbf{E}_x e^{\gamma_{n+1}^\alpha})^\delta.$$

Как мы уже знаем,

$$\mathbf{E}_x e^{\gamma_1^\alpha} \leq C(1 + e^{|x|^\beta}).$$

Тогда, поскольку $\alpha < 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x e^{\gamma_2^\alpha} &= \mathbf{E}_x e^{(\gamma_2 - T_1' + T_1' - \gamma_1 + \gamma_1)^\alpha} \leq \mathbf{E}_x e^{(\gamma_2 - T_1')^\alpha} e^{(T_1' - \gamma_1)^\alpha} e^{\gamma_1^\alpha} \\ &\leq e \mathbf{E}_x e^{(\gamma_2 - T_1')^\alpha} e^{\gamma_1^\alpha} = e \mathbf{E}_x \left(\mathbf{E}(e^{(\gamma_2 - T_1')^\alpha} e^{\gamma_1^\alpha} \mid \hat{\mathcal{F}}_{\gamma_1}) \right) \\ &= e \mathbf{E}_x \left(e^{\gamma_1^\alpha} \mathbf{E}(e^{(\gamma_2 - T_1')^\alpha} \mid \hat{\mathcal{F}}_{\gamma_1}) \right) \leq C \left(1 + e^{(M+1)^\beta} \right) (1 + e^{|x|^\beta}). \end{aligned}$$

По индукции,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x e^{\gamma_{n+1}^\alpha} &= \mathbf{E}_x e^{(\gamma_{n+1} - T_n' + T_n' - \gamma_n + \gamma_n)^\alpha} \leq e \mathbf{E}_x e^{(\gamma_{n+1} - T_n')^\alpha} e^{\gamma_n^\alpha} \\ &= e \mathbf{E}_x \left(e^{\gamma_n^\alpha} \mathbf{E}(e^{(\gamma_{n+1} - T_n')^\alpha} \mid \hat{\mathcal{F}}_{\gamma_n}) \right) \\ &\leq C^n \left(1 + e^{(M+1)^\beta} \right)^n (1 + e^{|x|^\beta}). \end{aligned}$$

Отсюда, при c , близком к единице, и достаточно малом δ (таком, что $\widehat{C}^{\delta/c} q^{1/a} = C^{\delta/c} (1 + e^{(M+1)^\beta})^{\delta/c} q^{1/a} < 1$) получаем:

$$\mathbf{P}_x\{L_0 > t\} = e^{-\delta t^\alpha/c} (1 + e^{|x|^\beta})^{\delta/c} \sum_{n=0}^{\infty} (q^{1/a})^n (\widehat{C}^{\delta/c})^n \leq C(1 + e^{\delta|x|^\beta}) e^{-\delta t^\alpha}.$$

Таким образом, оценка (5), а вместе с ней и теорема 2 доказаны.

Обозначим $\forall B \in \widehat{\mathcal{F}}_t$

$$\mu^\beta(B) = \mathbf{E} \left(e^{|Y_t|^\beta} 1(Y_t \in B) \right), \quad \mu_t^{x,\beta}(B) = \mathbf{E}_x \left(e^{|X_t|^\beta} 1(X_t \in B) \right).$$

Лемма 5. При выполнении условий теоремы 2

$$\text{var} \left(\mu_t^{x,\beta} - \mu^\beta \right) \leq C(1 + e^{\delta|x|^\beta}) e^{-\delta t^\alpha}. \quad (12)$$

Доказательство. Тогда

$$\begin{aligned} |\mu_t^{x,\beta}(B) - \mu^\beta(B)| &= \left| \mathbf{E}_x \left(e^{|X_t|^\beta} 1(X_t \in B) \right) - \mathbf{E} \left(e^{|Y_t|^\beta} 1(Y_t \in B) \right) \right| \\ &= \left| \mathbf{E}_x \left(e^{|\tilde{X}_t|^\beta} 1(\tilde{X}_t \in B) \right) - \mathbf{E} \left(e^{|Y_t|^\beta} 1(Y_t \in B) \right) \right| \\ &\leq \mathbf{E}_x \left(e^{|\tilde{X}_t|^\beta} 1(\tilde{X}_t \in B) 1(t < L_0) \right) \\ &\quad + \mathbf{E} \left(e^{|Y_t|^\beta} 1(Y_t \in B) 1(t < L_0) \right). \end{aligned}$$

По лемме 2 и теореме 2,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(e^{|Y_t|^\beta} 1(Y_t \in B) 1(t < L_0) \right) &\leq \left(\mathbf{E} e^{a|Y_t|^\beta} \right)^{1/a} (\mathbf{P}\{L_0 > t\})^{1/c} \\ &\leq C e^{-\delta t^\alpha/c} (1 + e^{\delta|x|^\beta/c}), \end{aligned}$$

причем при a , близком к 1, получаем условие на τ из леммы 2: $\tau > (1-p)\lambda_+/2$. При этом

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x \left(e^{|\tilde{X}_t|^\beta} 1(\tilde{X}_t \in B) 1(t < L_0) \right) \\ \leq \mathbf{E}_x \left(e^{|\tilde{X}_t|^\beta} \sum_{i=0}^{\infty} 1(\gamma_i \leq t < \gamma_{i+1}) 1(\gamma_i < L_0) 1(t < L_0) \right). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x \left(e^{|\tilde{X}_t|^\beta} 1(\gamma_i \leq t < \gamma_{i+1}) 1(\gamma_i < L_0) 1(t < L_0) \right) \\ \leq \left(\mathbf{E}_x e^{a|\tilde{X}_t|^\beta} 1(\gamma_i \leq t < \gamma_{i+1}) \right)^{1/a} [\mathbf{P}_x\{\gamma_i < L_0\}]^{1/b} [\mathbf{P}_x\{t < L_0\}]^{1/c} \\ \leq C e^{(M+1)\beta} q^{i/b} e^{-\delta t^\alpha/c} (1 + e^{\delta|x|^\beta/c}) \leq C e^{-\delta t^\alpha/c} (1 + e^{\delta|x|^\beta/c}) (\tilde{q})^i, \end{aligned}$$

где $1/a + 1/b + 1/c = 1$, a близко к 1, $\tilde{q} < 1$, поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x \left(e^{|\tilde{X}_t|^\beta} 1(\tilde{X}_t \in B) 1(t < L_0) \right) &\leq \sum_{i=0}^{\infty} C e^{-\delta t^\alpha/c} (1 + e^{\delta|x|^\beta/c}) (\tilde{q})^i \\ &\leq \tilde{C} e^{-\delta t^\alpha/c} (1 + e^{\delta|x|^\beta/c}). \end{aligned}$$

Тогда существует $\delta > 0$ такое, что

$$\text{var}(\mu_t^{x,\beta} - \mu^\beta) \leq C e^{-\delta t^\alpha} (1 + e^{\delta |x|^\beta}).$$

Лемма 5 доказана.

Доказательство теоремы 3. По теореме 2 и леммам 3 и 5, получаем

$$\begin{aligned} \text{var} \mu_t^{x,\beta} &\leq \text{var} \mu^\beta + \text{var}(\mu_t^{x,\beta} - \mu^\beta) \leq \hat{C} + \tilde{C} e^{-\delta t^\alpha} (1 + e^{\delta |x|^\beta}) \\ &\leq C(1 + e^{\delta |x|^\beta}). \end{aligned}$$

Тогда $\forall t > 0$ получаем (6):

$$\mathbf{E}_x e^{|X_t|^\beta} \leq \sup_B \left| \mathbf{E}_x e^{|X_t|^\beta} 1(X_t \in B) \right| = \text{var} \mu_t^{x,\beta} \leq C(1 + e^{\delta |x|^\beta}).$$

Доказательство теоремы 4. Итак, $\forall B \in \hat{\mathcal{F}}_{\geq t+s_0}$

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{P}(B \mid \hat{\mathcal{F}}_{s_0}) - \mathbf{P}(B) \right| &\leq \left| \mathbf{E}(1(L_{s_0} > t + s_0) \mid \hat{\mathcal{F}}_{s_0}) \right| \\ &\leq \mathbf{P}\{L_{s_0} > t + s_0 \mid \hat{\mathcal{F}}_{s_0}\}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\beta^x(t) \leq \mathbf{E}_x \mathbf{P}\{L_{s_0} > t + s_0 \mid \hat{\mathcal{F}}_{s_0}\} = \mathbf{P}\{L_{s_0} > t + s_0\}.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{L_{s_0} > t + s_0 \mid \hat{\mathcal{F}}_{s_0}\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}\left(1(L_{s_0} > t + s_0) 1(\gamma_n \leq t + s_0 < \gamma_{n+1}) \mid \hat{\mathcal{F}}_{s_0}\right) \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left[\mathbf{P}\{L_{s_0} > \gamma_n \mid \hat{\mathcal{F}}_{s_0}\} \right]^{1/a} \left[\mathbf{P}\{\gamma_{n+1} > t + s_0 \mid \hat{\mathcal{F}}_{s_0}\} \right]^{1/c}. \end{aligned}$$

Как мы уже знаем, $[\mathbf{P}\{L_{s_0} > \gamma_n \mid \hat{\mathcal{F}}_{s_0}\}]^{1/a} \leq (q^{1/a})^n$. По аналогии с доказательством теоремы 2, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\gamma_{n+1} > t + s_0 \mid \hat{\mathcal{F}}_{s_0}\} &\leq e^{-\delta t^\alpha} \mathbf{E}(e^{\delta \gamma_{n+1}^\alpha} \mid \hat{\mathcal{F}}_{s_0}) \\ &\leq e^{-\delta t^\alpha} C^{\delta n} \left[\mathbf{E}\left(1 + e^{|X_{s_0}|^\beta} + e^{|Y_{s_0}|^\beta} \mid \hat{\mathcal{F}}_{s_0}\right) \right]^\delta. \end{aligned}$$

При достаточно малом $\delta > 0$

$$\mathbf{P}\{L_{s_0} > t + s_0 \mid \hat{\mathcal{F}}_{s_0}\} \leq C e^{-\delta t^\alpha} \left[\mathbf{E}\left(1 + e^{|X_{s_0}|^\beta} + e^{|Y_{s_0}|^\beta} \mid \hat{\mathcal{F}}_{s_0}\right) \right]^\delta.$$

Отсюда, по теореме 3 и лемме 4,

$$\begin{aligned}
 \beta^x(t) &\leq \mathbf{E}_x \mathbf{P}\{L_{s_0} > t + s_0 \mid \widehat{\mathcal{F}}_{s_0}\} \\
 &\leq Ce^{-\delta t^\alpha} \mathbf{E}_x \left[\mathbf{E} \left(1 + e^{|X_{s_0}|^\beta} + e^{|Y_{s_0}|^\beta} \mid \widehat{\mathcal{F}}_{s_0} \right)^\delta \right] \\
 &\leq Ce^{-\delta t^\alpha} \mathbf{E}_x \left[\mathbf{E} \left(1 + e^{|X_{s_0}|^\beta} + e^{|Y_{s_0}|^\beta} \mid \widehat{\mathcal{F}}_{s_0} \right)^{\delta/\delta} \right]^\delta \\
 &\leq Ce^{-\delta t^\alpha} \left[\mathbf{E}_x \left(1 + e^{|X_{s_0}|^\beta} + e^{|Y_{s_0}|^\beta} \right) \right]^\delta \\
 &\leq Ce^{-\delta t^\alpha} \left(1 + \widehat{C} + \widetilde{C} \left(1 + e^{|x|^\beta} \right) \right)^\delta \leq Ce^{-\delta t^\alpha} \left(1 + e^{\delta|x|^\beta} \right).
 \end{aligned}$$

Теорема 4 доказана.

Автор выражает глубокую благодарность А. Ю. Веретенникову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Veretennikov A. Yu. On polynomial mixing bounds for stochastic differential equation. — Stochastic Process. Appl., 1996, v. 70, p. 115–127.
2. Veretennikov A. Yu. On polynomial mixing and convergence rate for stochastic difference and differential equations. — Preprint № 393. Berlin: WIAS, 1998.
3. Веретенников А. Ю. Об оценках скорости перемешивания для стохастических уравнений. — Теория вероятн. и ее примен., 1987, т. XXXII, в. 2, с. 299–308.
4. Веретенников А. Ю. Об оценках скорости перемешивания для марковских процессов. — Литов. матем. сб., 1991, т. 31, № 1, с. 40–49.
5. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969, 367 с.
6. Крылов Н. В. О стохастических интегральных уравнениях Ито. — Теория вероятн. и ее примен., 1969, т. XIV, в. 2, с. 340–348.
7. Крылов Н. В. О выделении марковского процесса из марковской системы процессов и построении квазидиффузионных процессов. — Изв. АН СССР, матем., 1973, т. 37, № 3, с. 691–708.
8. Крылов Н. В., Сафонов М. В. Об одном свойстве решений параболического уравнения с измеримыми коэффициентами. — Изв. АН СССР, матем., 1980, т. 44, № 1, с. 161–175.
9. Aspandiarov S., Iasnogorodski R., Menshikov M. Passage-time moments for non-negative stochastic processes and an application to reflected random walks in a quadrant. — Ann. Probab., 1996, v. 24, № 2, p. 932–960.
10. Ganidis H., Roynette B., Simonot F. Convergence rate of some semi-groups to their invariant probability. — Stochastic Process. Appl., 1999, v. 79, p. 243–263.
11. Калашиников В. В. Свойство γ -возвратности для марковских последовательностей. — Докл. АН СССР, 1973, т. 213, № 6, с. 1243–1246.
12. Menshikov M., Williams R. J. Passage-time moments for continuous non-negative stochastic processes and applications. — Adv. Appl. Probab., 1996, v. 28, p. 747–762.
13. Meyn S. P., Tweedie R. L. Markov Chains and Stochastic Stability. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
14. Sil'vestrov D. S. Recurrence relation for generalized hitting times for semi-Markov processes. — Ann. Appl. Probab., 1996, v. 6, № 2, p. 617–649.
15. Tuominen P., Tweedie R. L. Subgeometric rates of convergence of f -ergodic Markov chains. — Adv. Appl. Probab., 1994, v. 26, p. 775–798.
16. Asmussen S. Applied Probability and Queues. New York: Wiley, 1987.

Поступила в редакцию
7.IV.1999