Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. С. Мишура, Я. А. Ольчик, Выбор оптимального момента переключения на финансовом рынке с альтернативными стратегиями (полумартингальный подход), *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, том 45, выпуск 3, 505–520

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp482>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 12:07:58

© 2000 г.

МИШУРА Ю. С.*, ОЛЬЦИК Я. А.*

**ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОГО МОМЕНТА ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ
НА ФИНАНСОВОМ РЫНКЕ С АЛЬТЕРНАТИВНЫМИ
СТРАТЕГИЯМИ (ПОЛУМАРТИНГАЛЬНЫЙ ПОДХОД)**

Пусть инвестор оперирует на финансовом рынке с облигацией и акцией и имеет возможность на фиксированном промежутке времени $[0, T]$ один раз сделать выбор, т.е. переключение, между двумя альтернативными портфелями. Предполагается, что смена финансового портфеля описывается линейным стохастическим дифференциальным уравнением. Оптимальный момент переключения ищется с помощью теории «переломных» моментов остановки.

Ключевые слова и фразы: случайный процесс, оптимальный момент остановки, линейное стохастическое дифференциальное уравнение, инвестор, капитал.

1. Введение. Рассмотрим инвестора, оперирующего на финансовом рынке, который имеет возможность за счет своих средств создать портфель, состоящий из акций и облигаций. Пусть инвестор имеет некоторый начальный капитал X_0 , оперирует на фиксированном промежутке времени $[0, T]$ и имеет возможность не более одного раза перераспределить свой капитал: реализовать имеющиеся активы и на полученные средства создать новый портфель, уплачивая при этом некоторую цену за переключение. Задача инвестора состоит в том, чтобы найти оптимальный момент $\tau \in [0, T]$, в который следует переключиться, так чтобы максимизировать свой средний капитал в конечный момент. Пусть X_t — капитал инвестора в момент $t \in [\tau, T]$. Тогда целью является максимизация величины $\mathbb{E}X_T$.

Для отыскания оптимального момента переключения вводится понятие «переломного» момента остановки. Он определяется как такой момент, в который субмартингальное свойство некоторого процесса, связанного с капиталом, меняется на супермартингальное. В п. 2 рассматриваются некоторые свойства переломных моментов остановки, а также доказывается, что переломный момент, если такой существует, является оптимальным. В п. 3 ищется оптимальный момент переключения для

*Киевский университет им. Т. Шевченко, механико-математический факультет, ул. Владимирская, 64, 252601 Киев, Украина; e-mail: myus@mechmat.univ.kiev.ua, yana@mechmat.univ.kiev.ua

инвестора. В случае, когда цена выбора пропорциональна капиталу в момент выбора, задача решается с помощью переломных моментов остановки. В случае, когда цена включает в себя компоненту, не зависящую от величины капитала, оптимальный момент переключения ищется с применением формулы Ито.

2. Переломные и оптимальные моменты остановки на конечном промежутке времени. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — полное вероятностное пространство, $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ — возрастающий непрерывный справа поток σ -алгебр, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$. Пусть Y_t — некоторый $\{\mathcal{F}_t\}$ -согласованный непрерывный неотрицательный процесс, $t \in [0, T]$. Введем определение и рассмотрим некоторые свойства переломных моментов остановки.

О п р е д е л е н и е 1. Момент остановки (м.о.) $\sigma_0 \in [0, T]$ называется оптимальным для процесса Y_t , если

$$EY_{\sigma_0} = \sup_{\substack{\tau \in [0, T] \\ \tau - \text{м.о.}}} EY_{\tau}.$$

Огибающая Снелла [1] для процесса Y_t определяется как

$$f_t = \operatorname{ess\,sup}_{\substack{t \leq \tau \leq T \\ \tau - \text{м.о.}}} E(Y_{\tau} | \mathcal{F}_t).$$

Из [2] известно, что при выполнении условия $E \sup_{t \in [0, T]} Y_t < \infty$ момент остановки $\sigma = \inf\{t \in [0, T] : Y_t = f_t\}$ является оптимальным. Назовем этот момент σ минимальным. Заметим, что на конечном отрезке времени минимальный момент остановки всегда существует, поскольку $Y_T = f_T$.

Все рассматриваемые процессы будем считать согласованными и непрерывными.

Докажем некоторые вспомогательные утверждения, касающиеся оптимальных моментов остановки, а также представляющие самостоятельный интерес. Вначале рассмотрим случайные процессы, имеющие супермартингальное свойство «после» некоторого момента остановки θ_1 , и докажем в леммах 1 и 2, что $\sigma \leq \theta_1$ п.н.

Пусть $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_N \leq T$ — некоторое разбиение отрезка $[0, T]$.

Лемма 1. Пусть $\{\xi_{t_n}, \mathcal{F}_{t_n}, 0 \leq n \leq N\}$ — некоторый $\{\mathcal{F}_{t_n}\}$ -согласованный процесс с дискретным временем, $E|\xi_{t_n}| < \infty$, $0 \leq \theta_1 \leq t_N$ — некоторый момент остановки относительно потока σ -алгебр $\{\mathcal{F}_{t_n}, 0 \leq n \leq N\}$ и выполняется соотношение

$$E(\xi_{t_n} | \mathcal{F}_{t_k}) I\{t_l = \theta_1\} \leq \xi_{t_k} I\{t_l = \theta_1\}, \quad (1)$$

$0 \leq l \leq k \leq n \leq N$. Тогда для любого $0 \leq l \leq N$ и для любых моментов остановки ν, τ относительно потока $\{\mathcal{F}_{t_n}\}$ таких, что $0 \leq t_l \leq \nu \leq \tau \leq t_N$, имеет место неравенство

$$\mathbf{E}(\xi_\tau | \mathcal{F}_\nu) I\{t_l = \theta_1\} \leq \xi_\nu I\{t_l = \theta_1\} \quad \text{п.н.}$$

Доказательство следует из того факта, что при выполнении соотношения (1) случайный процесс с дискретным временем $\zeta_{t_n} = \xi_{t_n} I\{t_l = \theta_1\}$, $l \leq n \leq N$, при фиксированном l является супермартингалом, а также из того, что событие $\{\theta_1 = t_l\} \in \mathcal{F}_{\theta_1} \subset \mathcal{F}_\nu$.

Лемма 2. Пусть $\{\xi_t, \mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ — неотрицательный непрерывный случайный процесс, для которого

$$\mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} \xi_t < \infty, \quad (2)$$

$\theta_1 \in [0, T]$ — такой момент остановки, что для любых $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq s_4 \leq T$

$$\mathbf{E}(\xi_{s_4} | \mathcal{F}_{s_3}) I\{s_1 \leq \theta_1 < s_2\} \leq \xi_{s_3} I\{s_1 \leq \theta_1 < s_2\} \quad \text{п.н.} \quad (3)$$

Тогда $\mathbf{P}\{\sigma > \theta_1\} = 0$, где $\sigma \in [0, T]$ — минимальный момент остановки для процесса ξ .

Доказательство. Введем последовательность дискретных моментов остановки

$$\sigma_n = \begin{cases} \frac{i}{2^n} T, & \frac{i-1}{2^n} T \leq \theta_1 < \frac{i}{2^n} T, \quad 1 \leq i \leq 2^n, \quad n \geq 1, \\ T, & \theta_1 = T. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\sigma > \theta_1\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\sigma > \sigma_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2^n-1} \mathbf{P}\left\{\sigma > \frac{i}{2^n} T, \sigma_n = \frac{i}{2^n} T\right\} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2^n-1} \mathbf{P}\left\{\xi_{i2^{-n}T} < \operatorname{ess\,sup}_{\tau \geq i2^{-n}T} \mathbf{E}(\xi_\tau | \mathcal{F}_{i2^{-n}T}), \sigma_n = \frac{i}{2^n} T\right\}. \quad (4) \end{aligned}$$

Если $\tau \geq i2^{-n}T$ принимает конечное число значений, то в силу леммы 1 и соотношения (3)

$$\mathbf{E}(\xi_\tau | \mathcal{F}_{i2^{-n}T}) I\left\{\frac{i}{2^n} T = \sigma_n\right\} \leq \xi_{i2^{-n}T} I\left\{\frac{i}{2^n} T = \sigma_n\right\} \quad \text{п.н.}$$

Если $\tau \in [i2^{-n}T, T]$ — произвольный момент остановки, то рассмотрим последовательность моментов остановки $\{\tau_k, k \geq 1\}$:

$$\tau_k = \begin{cases} \frac{i}{2^n} T + \frac{j}{2^k} T \left(1 - \frac{i}{2^n}\right), & \frac{i}{2^n} T + \frac{j-1}{2^k} T \left(1 - \frac{i}{2^n}\right) \leq \tau < \frac{j}{2^k} T \left(1 - \frac{i}{2^n}\right), \quad j = 1, \dots, 2^k, \\ T, & \tau = T. \end{cases}$$

Тогда $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \dots \geq \tau \geq \sigma_n = i2^{-n}T$, и в силу леммы 1

$$\mathbf{E}(\xi_{\tau_k} | \mathcal{F}_{i2^{-n}T}) I\left\{\frac{i}{2^n}T = \sigma_n\right\} \leq \xi_{i2^{-n}T} I\left\{\frac{i}{2^n}T = \sigma_n\right\} \quad \text{п.н.} \quad (5)$$

При $k \rightarrow \infty$ $\xi_{\tau_k} \rightarrow \xi_{\tau}$ п.н. Кроме того, в силу условия (2) ξ_{τ_k} является равномерно интегрируемой, и из (5)

$$\mathbf{E}(\xi_{\tau} | \mathcal{F}_{i2^{-n}T}) I\left\{\frac{i}{2^n}T = \sigma_n\right\} \leq \xi_{i2^{-n}T} I\left\{\frac{i}{2^n}T = \sigma_n\right\} \quad \text{п.н.}$$

Поэтому, согласно определению существенного супремума,

$$\operatorname{ess\,sup}_{\tau \geq i2^{-n}T} \mathbf{E}(\xi_{\tau} | \mathcal{F}_{i2^{-n}T}) I\left\{\frac{i}{2^n}T = \sigma_n\right\} \leq \xi_{i2^{-n}T} I\left\{\frac{i}{2^n}T = \sigma_n\right\} \quad \text{п.н.,}$$

а тогда правая часть (4) равна нулю, и лемма доказана.

Теперь рассмотрим случайные процессы, имеющие субмартингаловое свойство «до» некоторого момента остановки θ_2 , и докажем в леммах 3–5, что $\sigma \geq \theta_2$ п.н.

Лемма 3. Пусть $\{\xi_{t_n}, \mathcal{F}_{t_n}, 0 \leq n \leq N\}$ — неотрицательный $\{\mathcal{F}_{t_n}\}$ -согласованный процесс с дискретным временем, $\mathbf{E}\xi_{t_n} < \infty$. Пусть также моменты остановки $0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq t_N$ относительно потока $\{\mathcal{F}_{t_n}, 0 \leq n \leq N\}$ и семейство $\zeta(t_l, t_n), 0 \leq l < n \leq N$, $\mathcal{F}_{t_l}$ -измеримых неотрицательных ограниченных в совокупности случайных величин удовлетворяют соотношению $\zeta(t_l, t_n) \mathbf{E}(\xi_{t_n} | \mathcal{F}_{t_l}) I\{\sigma_1 = t_k \leq t_l < t_n \leq \sigma_2\} \geq \xi_{t_l} I\{\sigma_1 = t_k \leq t_l < t_n \leq \sigma_2\}$ п.н., $0 \leq k \leq l < n \leq N$. Тогда

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{N-1} \zeta(t_k, t_{k+1}) I\{\sigma_1 \leq t_k < t_{k+1} \leq \sigma_2\} \xi_{\sigma_2} | \mathcal{F}_{\sigma_1}\right) I\{\sigma_1 < \sigma_2\} \\ & \geq \xi_{\sigma_1} I\{\sigma_1 < \sigma_2\} \quad \text{п.н.} \end{aligned}$$

Доказательство. Очевидно, случайные величины $I\{\sigma_1 < \sigma_2\}$ и $\mathbf{E}(\xi_{\sigma_2} | \mathcal{F}_{\sigma_1})$ являются $\mathcal{F}_{\sigma_1}$ -измеримыми, $\{\sigma_1 < \sigma_2\} \cap \{\sigma_1 = t_k\} \in \mathcal{F}_{t_k}$ для любого $0 \leq k \leq N$.

Пусть $A \in \mathcal{F}_{\sigma_1}$ — произвольное событие. Обозначим $\eta_k(s, t) = \zeta(t_k, t_{k+1}) I\{s = t_i < t_{k+1} \leq t\}$, $A_k = \{\sigma_1 = t_i < t_{k+1} \leq \sigma_2\}$, $k = i, \dots, N-1$, $i = 0, \dots, N-1$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{A \cap \{\sigma_1 < \sigma_2\}} \left(\prod_{k=1}^{N-1} \eta_k(\sigma_1, \sigma_2) \xi_{\sigma_2} - \xi_{\sigma_1} \right) d\mathbf{P} \\ & = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{A \cap \{\sigma_1 = t_i < \sigma_2\}} \left(\prod_{k=i}^{N-1} \eta_k(t_i, \sigma_2) \xi_{\sigma_2} - \xi_{t_i} \right) d\mathbf{P} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \sum_{i=0}^{N-1} \int_{A \cap A_i} \left(\prod_{k=i}^{N-1} \eta_k(t_i, \sigma_2) \xi_{\sigma_2} - \eta_i(t_i, \sigma_2) \xi_{t_{i+1}} \right) d\mathbf{P} \geq \dots \\
&\geq \sum_{i=0}^{N-1} \int_{A \cap A_{N-1}} \left(\prod_{k=i}^{N-1} \eta_k(t_i, t_N) \xi_{t_N} - \prod_{k=i}^{N-1} \eta_k(t_i, t_N) \xi_{t_N} \right) d\mathbf{P} = 0. \quad (6)
\end{aligned}$$

Доказательство леммы вытекает непосредственно из (6).

Пусть $A = \{0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq T\}$, обозначим

$$\phi(s, t) = \prod_{k \geq 0} \zeta(t_k, t_{k+1}) I\{s \leq t_k < t_{k+1} \leq t\}, \quad 0 \leq s < t \leq T.$$

Лемма 4. Пусть $\{\xi_{t_n}, \mathcal{F}_{t_n}, n \geq 0\}$ — неотрицательный непрерывный случайный процесс, заданный на множестве A и согласованный с потоком $\{\mathcal{F}_{t_n}\}$. Предположим, что выполняются следующие условия:

- 1) $\mathbf{E} \sup_{n \geq 0} \xi_{t_n} < \infty$;
- 2) $0 \leq \sigma_i \leq T$, $i = 1, 2$, — моменты остановки относительно $\{\mathcal{F}_{t_n}, n \geq 0\}$, принимающие значения из множества A ;
- 3) существует семейство $\zeta(t_l, t_n)$, $0 \leq t_l \leq t_n$, неотрицательных $\mathcal{F}_{t_l}$ -измеримых ограниченных в совокупности случайных величин таких, что

$$\begin{aligned}
&\zeta(t_l, t_n) I\{\sigma_1 \leq t_l < t_n \leq \sigma_2\} \leq 1, \\
&\zeta(t_l, t_n) \mathbf{E}(\xi_{t_n} | \mathcal{F}_{t_l}) I\{\sigma_1 = t_k \leq t_l < t_n \leq \sigma_2\} \\
&\geq \xi_{t_l} I\{\sigma_1 = t_k \leq t_l < t_n \leq \sigma_2\} \quad \text{п.н.}, \quad 0 \leq t_k \leq t_l \leq t_n \leq T.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\mathbf{E}(\phi(\sigma_1, \sigma_2) \xi_{\sigma_2} | \mathcal{F}_{\sigma_1}) I\{\sigma_1 < \sigma_2\} \geq \xi_{\sigma_1} I\{\sigma_1 < \sigma_2\} \quad \text{п.н.} \quad (7)$$

Доказательство. Положим $\sigma_i(N) = \sigma_i \wedge t_N$, $N \geq 0$, $i = 1, 2$. Тогда $\sigma_i(N)$ — дискретные моменты остановки относительно $\{\mathcal{F}_{t_n}, n \geq 0\}$, и для $n \leq N$

$$\begin{aligned}
&\zeta(t_l, t_n) \mathbf{E}(\xi_{t_n} | \mathcal{F}_{t_l}) I\{\sigma_1(N) = t_k \leq t_l < t_n \leq \sigma_2(N)\} \\
&\geq \xi_{t_l} I\{\sigma_1(N) = t_k \leq t_l < t_n \leq \sigma_2(N)\} \quad \text{п.н.} \quad (8)
\end{aligned}$$

В силу (8) можно применить лемму 3. Переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$, что возможно в силу условия 1), с использованием теоремы 1.6 [3, с. 25] получаем (7). Лемма доказана.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n, n \geq 1\} = \{0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{k_n}^n = T, n \geq 1\}$ — некоторая последовательность разбиений отрезка $[0, T]$, $\{\zeta(t_k^n, t_{k+1}^n), 1 \leq k \leq k_n - 1, n \geq 1\}$ — некоторое семейство случайных величин,

$\{\xi_t, \mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ — положительный непрерывный случайный процесс. Введем обозначения:

$$\zeta(s, t) = \frac{\xi_s}{\mathbf{E}(\xi_t | \mathcal{F}_s)}, \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad (9)$$

$$\phi_n(s, t) = \prod_{k=1}^{k_n-1} \zeta(t_k^n, t_{k+1}^n) I\{s \leq t_k^n < t_{k+1}^n \leq t\}. \quad (10)$$

Лемма 5. Пусть $\{\xi_t, \mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ — строго положительный непрерывный случайный процесс, который удовлетворяет условию (2), θ_2 — предсказуемый момент остановки такой, что для всех $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\zeta(s, t) I\{s < t \leq \theta_2\} < 1 \quad \text{п.н.} \quad (11)$$

Тогда $\mathbf{P}\{\sigma < \theta_2\} = 0$, где σ — минимальный момент остановки для процесса ξ_t .

Доказательство. Пусть σ — минимальный момент остановки для ξ_t , положим

$$\sigma_m = \begin{cases} \frac{i}{2^m} T, & \frac{i-1}{2^m} T \leq \sigma < \frac{i}{2^m} T, \quad 1 \leq i < 2^m, \quad m \geq 1, \\ T, & \sigma = T. \end{cases}$$

Поскольку θ_2 — предсказуемый момент остановки, то, согласно [4], существует последовательность $\{\tau_m, m \geq 1\}$ этажных моментов остановки, предвещающая θ_2 . Заметим, что $\mathbf{P}\{\sigma < \theta_2\} = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\sigma_m < \tau_m\}$. Пусть $\{0 \leq t_1^m < t_2^m < \dots\}$ — упорядоченное множество значений $\{\tau_m, \sigma_m\}$. Тогда имеют место соотношения

$$\begin{aligned} & \zeta(t_l^m, t_n^m) I\{\sigma_m < t_l^m < t_n^m < \tau_m\} < 1, \\ & \zeta(t_l^m, t_n^m) \mathbf{E}(\xi_{t_n^m} | \mathcal{F}_{t_l^m}) I\{\sigma_m = t_k^m < t_l^m < t_n^m \leq \tau_m\} \\ & = \xi_{t_l^m} I\{\sigma_m = t_k^m < t_l^m < t_n^m \leq \tau_m\} \quad \text{п.н.}, \end{aligned}$$

т.е. выполняется условие 3) леммы 4 для семейства случайных величин $\zeta(s, t)$, определенных соотношением (9). Поэтому в силу (10) и леммы 4 имеем:

$$\mathbf{E}(\phi_m(\sigma_m, \tau_m) \xi_{\tau_m} I\{\sigma_m < \tau_m\} | \mathcal{F}_{\sigma_m}) \geq \xi_{\sigma_m} I\{\sigma_m < \tau_m\} \quad \text{п.н.}$$

Очевидно, тогда

$$\mathbf{P}\{\sigma_m < \tau_m\} \leq \mathbf{P}\{\mathbf{E}(\phi_m(\sigma_m, \tau_m) \xi_{\tau_m} | \mathcal{F}_{\sigma_m}) \geq \xi_{\sigma_m}\}.$$

Пусть $m \rightarrow \infty$, тогда $\xi_{\sigma_m} \rightarrow \xi_\sigma$, $\xi_{\tau_m} \rightarrow \xi_{\theta_2}$, и в силу (11) $\lim_{m \rightarrow \infty} \phi_m(\sigma_m, \tau_m) < 1$. Следовательно, $\mathbf{P}\{\sigma < \theta_2\} \leq \mathbf{P}\{\mathbf{E}(\xi_{\theta_2} | \mathcal{F}_\sigma) >$

$\xi_\sigma\} = 0$, поскольку, согласно [2], при выполнении условия (2) имеет место равенство $f_\sigma = \xi_\sigma$. Лемма доказана.

Пусть теперь $\{\xi_t, \mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ — положительный п.н. непрерывный случайный процесс, для которого выполняется условие (2).

О п р е д е л е н и е 2. Предсказуемый момент остановки $\theta \in [0, T]$ будем называть переломным для процесса ξ_t , если θ удовлетворяет неравенствам (3) и (11), т.е. $\theta = \theta_1 = \theta_2$ п.н.

Термин «переломный момент остановки» можно объяснить тем, что до этого момента процесс ξ_t имеет свойства, сходные с субмартингальными, а после него — свойства типа супермартингальных.

Непосредственно из лемм 2 и 5 вытекает

Теорема 1. Пусть $\{\xi_t, \mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ — положительный непрерывный процесс, который удовлетворяет условию (2). Если для процесса ξ_t существует переломный момент остановки, то этот момент совпадает с минимальным, а следовательно, является оптимальным.

З а м е ч а н и е 1. В статье [5] приведен контрпример, показывающий, что огибающая Снелла не всегда совпадает с исходным процессом после минимального, в наших терминах, момента остановки. Теорема 1 фактически содержит одно из достаточных условий такого совпадения.

3. Отыскание оптимального момента переключения. Пусть $a_i(s), b_i(s), s \in [0, T]$, суть $\{\mathcal{F}_s\}$ -согласованные случайные функции, $a_i(s) \geq 0$, $\mathbf{E} \int_0^T a_i(s) ds < \infty$, $\mathbf{E} \int_0^T b_i^2(s) ds < \infty$, $i = 1, 2$. Не теряя общности, будем считать, что $a_1(0) > a_2(0)$ и что в момент $t = 0$ инвестор начинает формировать свой портфель, которому соответствует коэффициент роста $a_1(s)$ и коэффициент волатильности $b_1(s)$. Пусть начальный капитал инвестора равен X_0 . Для упрощения, не ограничивая общности, можем считать, что $X_0 = 1$ с вероятностью 1. Капитал инвестора описывается линейным стохастическим дифференциальным уравнением

$$\tilde{X}_t = 1 + \int_0^t a_1(s) \tilde{X}_s ds + \int_0^t b_1(s) \tilde{X}_s dw_s, \quad t \in [0, T], \quad (12)$$

где $\{w_t, \mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ — винеровский процесс. Пусть $\tau \in [0, T]$ — некоторый момент остановки, выбранный инвестором. В этот момент он забирает все средства с указанного первого счета, уплачивая при этом некоторую цену $C(\tau)$. После этого он распределяет оставшийся капитал $\tilde{X}_\tau - C(\tau)$ между облигациями и акциями, которым соответствуют коэффициент роста $a_2(s)$ и коэффициент волатильности $b_2(s)$. В зависимости от вида уплачиваемой цены $C(\tau)$ рассмотрим два случая.

1. Цена переключения пропорциональна капиталу. Пусть $C(\tau) = c_\tau \tilde{X}_\tau$, где c_t есть $\mathcal{F}_t$ -измеримая непрерывная случайная функция, $\mathbf{P}\{0 < c_t < 1, t \in [0, T]\} = 1$. По предположению, после момента переключения τ капитал инвестора описывается

линейным стохастическим дифференциальным уравнением

$$X_t = \tilde{X}_\tau(1 - c_\tau) + \int_\tau^t a_2(s)X_s ds + \int_\tau^t b_2(s)X_s dw_s, \quad t \in [\tau, T]. \quad (13)$$

Уравнения (12) и (13) имеют, соответственно, решения вида

$$\tilde{X}_t = \exp \left\{ \int_0^t \left(a_1(s) - \frac{b_1^2(s)}{2} \right) ds + \int_0^t b_1(s) dw_s \right\}, \quad t \in [0, \tau], \quad (14)$$

$$X_t = \tilde{X}_\tau(1 - c_\tau) \exp \left\{ \int_\tau^t \left(a_2(s) - \frac{b_2^2(s)}{2} \right) ds + \int_\tau^t b_2(s) dw_s \right\}, \quad t \in [\tau, T]. \quad (15)$$

Будем считать, что инвестор в любом случае забирает средства с первого счета и уплачивает цену, даже если $\tau = T$, но не забирает средства со второго счета. В этом случае, с учетом (15), задачей инвестора является максимизация величины

$$\mathbf{E}X_T = \mathbf{E}\tilde{X}_\tau(1 - c_\tau) \exp \left\{ \int_\tau^T \left(a_2(s) - \frac{b_2^2(s)}{2} \right) ds + \int_\tau^T b_2(s) dw_s \right\}, \quad (16)$$

где $\tilde{X}_\tau$ определяется из (14) при $t = \tau$.

Лемма 6. Пусть выполняются следующие условия:

1) случайный процесс $\{a_2(t), t \in [0, T]\}$ не зависит от совокупности процессов $\{b_2(t), w_t, t \in [0, T]\}$;

2) $\mathbf{E} \exp \{4 \int_0^T a_i(s) ds + 6 \int_0^T b_i^2(s) ds\} < \infty, i = 1, 2$;

3) $\mathbf{E} \exp \{8 \int_0^T b_i^2(s) ds\} < \infty, i = 1, 2$.

Тогда

$$\mathbf{E}X_T = \mathbf{E}\tilde{X}_\tau(1 - c_\tau) \exp \left\{ \int_\tau^T a_2(s) ds \right\}.$$

Доказательство. Обозначим $\tilde{a}(s) = a_1(s)I\{s \leq \tau\} + a_2(s)I\{s > \tau\}$, $\tilde{b}(s) = b_1(s)I\{s \leq \tau\} + b_2(s)I\{s > \tau\}$. Тогда в силу [6] и условия 3) процесс $\eta_t = \exp \{ \int_0^t 4\tilde{b}(s) dw_s - \int_0^t 8\tilde{b}^2(s) ds \}$ является мартингалом. Кроме того, $\eta_0 = 1$, следовательно, $\mathbf{E}\eta_T = 1$. Отсюда и из условия 2) вытекает, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X_T^2 &\leq \left(\mathbf{E} \exp \left\{ \int_0^T (4\tilde{a}(s) + 6\tilde{b}^2(s)) ds \right\} \right. \\ &\quad \left. \times \mathbf{E} \exp \left\{ \int_0^T 4\tilde{b}(s) dw_s - \int_0^T 8\tilde{b}^2(s) ds \right\} \right)^{1/2} < \infty, \end{aligned} \quad (17)$$

а также и конечность правой части (16).

Заметим, что, полагая $\tilde{a}(s) = a_2(s)I\{s > \tau\}$, $\tilde{b}(s) = b_2(s) \times I\{s > \tau\}$, аналогично можно доказать, что $E \exp\left\{\int_{\tau}^T (a_2(s) - b_2^2(s)/2) ds + \int_{\tau}^T b_2(s) dw_s\right\} < \infty$, в частности, для любого $t \in [0, T]$

$$E \exp\left\{\int_t^T \left(a_2(s) - \frac{b_2^2(s)}{2}\right) ds + \int_t^T b_2(s) dw_s\right\} < \infty. \quad (18)$$

Для доказательства леммы покажем сначала, что для любого момента остановки $\tau \in [0, T]$

$$\begin{aligned} E \left(\exp\left\{\int_{\tau}^T \left(a_2(s) - \frac{b_2^2(s)}{2}\right) ds + \int_{\tau}^T b_2(s) dw_s\right\} \middle| \mathcal{F}_{\tau} \right) \\ = E \left(\exp\left\{\int_{\tau}^T a_2(s) ds\right\} \middle| \mathcal{F}_{\tau} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Пусть сначала τ — дискретный момент остановки, принимающий значения $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n = T$. Тогда для любого $k = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} E \left(\exp\left\{\int_{\tau}^T \left(a_2(s) - \frac{b_2^2(s)}{2}\right) ds + \int_{\tau}^T b_2(s) dw_s\right\} \middle| \mathcal{F}_{\tau} \right) I\{\tau = t_k\} \\ = E \left(\exp\left\{\int_{t_k}^T \left(a_2(s) - \frac{b_2^2(s)}{2}\right) ds + \int_{t_k}^T b_2(s) dw_s\right\} \middle| \mathcal{F}_{t_k} \right) I\{\tau = t_k\} \quad \text{п.н.} \end{aligned} \quad (20)$$

Обозначим $\mathcal{F}_{a_2} = \sigma\{a_2(s), s \in [0, T]\}$, $\widehat{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{F}_{a_2}$. Тогда

$$\begin{aligned} E \left(\exp\left\{\int_{t_k}^T \left(a_2(s) - \frac{b_2^2(s)}{2}\right) ds + \int_{t_k}^T b_2(s) dw_s\right\} \middle| \mathcal{F}_{t_k} \right) \\ = E \left(\left(\exp\left\{\int_{t_k}^T \left(a_2(s) - \frac{b_2^2(s)}{2}\right) ds + \int_{t_k}^T b_2(s) dw_s\right\} \middle| \widehat{\mathcal{F}}_{t_k} \right) \middle| \mathcal{F}_{t_k} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Обозначим $\widehat{M}_{t,s} = \exp\{-\int_t^s (b_2^2(u)/2) du + \int_t^s b_2(u) dw_u\}$, $s \geq t \geq 0$. Очевидно, $E \widehat{M}_{t,T} < \infty$ в силу (18),

$$\begin{aligned} E \widehat{M}_{t,T}^2 &= E \exp\left\{-\int_t^T b_2^2(s) ds + 2 \int_t^T b_2(s) dw_s\right\} \\ &\quad \times \left(E \exp\left\{-8 \int_t^T b_2^2(s) ds + 4 \int_t^T b_2(s) dw_s\right\} \right. \\ &\quad \left. \times E \exp\left\{6 \int_t^T b_2^2(s) ds\right\} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Случайный процесс $\tilde{\eta}_s = \exp\{4 \int_t^s b_2(u) dw_u - 8 \int_t^s b_2^2(u) du\}$, $s \in [t, T]$, является мартингалом в силу условия 3) и $\tilde{\eta}_t = 1$. Поэтому $\mathbf{E}\tilde{\eta}_T = 1$, а тогда $\mathbf{E}\widehat{M}_{t,T}^2 \leq (\mathbf{E} \exp\{6 \int_t^T b_2^2(s) ds\})^{1/2} < \infty$ в силу условия 2). Далее, $\widehat{M}_{t,T} = 1 + \int_t^T b_2(s) \widehat{M}_{t,s} dw_s$, и при этом

$$\mathbf{E} \int_t^T b_2^2(s) \widehat{M}_{t,s}^2 ds = \mathbf{E} \left(\int_t^T b_2(s) \widehat{M}_{t,s} dw_s \right)^2 = \mathbf{E}(\widehat{M}_{t,T} - 1)^2 < \infty.$$

Поэтому

$$\mathbf{E}(\widehat{M}_{t_k,T} | \widehat{\mathcal{F}}_{t_k}) = 1 + \mathbf{E} \left(\int_{t_k}^T b_2(s) \widehat{M}_{t_k,s} dw_s | \widehat{\mathcal{F}}_{t_k} \right).$$

Пусть $\lambda_n = \{t_k = s_1^n < \dots < s_n^n = T\}$ — последовательность разбиений отрезка $[t_k, T]$, которые измельчаются. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\int_{t_k}^T b_2(s) \widehat{M}_{t_k,s} dw_s | \widehat{\mathcal{F}}_{t_k} \right) &= \lim_{|\lambda_n| \rightarrow 0} \mathbf{E} \left(\sum_i b_2(s_i^n) \widehat{M}_{t_k,s_i^n} \Delta w_{s_i^n} | \widehat{\mathcal{F}}_{t_k} \right) \\ &= \lim_{|\lambda_n| \rightarrow 0} \mathbf{E} \left(\sum_i b_2(s_i^n) \widehat{M}_{t_k,s_i^n} \mathbf{E}(\Delta w_{s_i^n} | \widehat{\mathcal{F}}_{s_i^n}) | \widehat{\mathcal{F}}_{t_k} \right). \end{aligned}$$

Поскольку $\Delta w_{s_i^n} = w_{s_{i+1}^n} - w_{s_i^n}$ не зависит от $\widehat{\mathcal{F}}_{s_i^n}$ в силу условия 1), то $\mathbf{E}(\Delta w_{s_i^n} | \widehat{\mathcal{F}}_{s_i^n}) = \mathbf{E}\Delta w_{s_i^n} = 0$. Следовательно, $\mathbf{E}(\widehat{M}_{t_k,T} | \widehat{\mathcal{F}}_{t_k}) = 1$. Поэтому правая часть (21) равна $\mathbf{E}(\exp\{\int_{t_k}^T a_2(s) ds\} | \widehat{\mathcal{F}}_{t_k})$, а тогда, учитывая (20), получаем (19) для любого дискретного момента остановки.

Пусть теперь τ — произвольный момент остановки, положим

$$\tau_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{kT}{2^n} I \left\{ \frac{(k-1)T}{2^n} \leq \tau < \frac{kT}{2^n} \right\} + TI\{\tau = T\}, \quad n \geq 1.$$

Тогда (19) имеет место для τ_n , $n \geq 1$, откуда

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \tilde{X}_{\tau_n} (1 - c_{\tau_n}) \exp \left\{ \int_{\tau_n}^T \left(a_2(s) - \frac{b_2^2(s)}{2} \right) ds + \int_{\tau_n}^T b_2(s) dw_s \right\} \\ = \mathbf{E} \tilde{X}_{\tau_n} (1 - c_{\tau_n}) \exp \left\{ \int_{\tau_n}^T a_2(s) ds \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Если $n \rightarrow \infty$, то случайные величины под знаком математического ожидания в левой и правой частях (22) стремятся к соответствующим значениям при τ вместо τ_n . Равномерная интегрируемость вытекает из оценки (17). Лемма доказана.

Рассмотрим теперь $\{\mathcal{F}_t\}$ -согласованный случайный процесс

$$Y_t = \tilde{X}_t (1 - c_t) \mathbf{E} \left(\exp \left\{ \int_t^T a_2(s) ds \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right).$$

В силу леммы 6 $\mathbf{E}Y_\tau = \mathbf{E}X_T$, и, таким образом, задача состоит в нахождении $\sup_{\tau \in [0, T]} \mathbf{E}Y_\tau$. Согласно теореме 1, $\sup_{\tau \in [0, T]} \mathbf{E}Y_\tau = \mathbf{E}Y_\theta$, где θ — переломный момент остановки, если он существует. В следующей теореме сформулируем условия, достаточные для существования переломного момента остановки для процесса Y_t . Для этого введем в рассмотрение случайную функцию

$$\psi(t) = (1 - c_t) \exp \left\{ \int_0^t (a_1(s) - a_2(s)) ds \right\}, \quad t \in [0, T].$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия леммы 6, а также следующие условия:

1) случайные процессы $\{a_1(t), a_2(t), c_t, t \in [0, T]\}$ не зависят в совокупности от случайных процессов $\{b_1(t), w_t, t \in [0, T]\}$;

2) $\int_0^T a_i(t) dt$ $\mathcal{F}_0$ -измеримы, $i = 1, 2$;

3) существует предсказуемый момент остановки θ такой, что $\mathbf{E}(\psi(t) | \mathcal{F}_s) I\{s < t \leq \theta\} > \psi(s) I\{s < t \leq \theta\}$ и $\psi(t)$ убывает на $[\theta, T]$.

Тогда θ — переломный момент остановки для процесса Y_t .

Доказательство. Заметим, что $Y_t > 0$ для всех $t \in [0, T]$ с вероятностью 1. Рассмотрим для всех $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y_t | \mathcal{F}_s) &= \mathbf{E} \left(\tilde{X}_t (1 - c_t) \exp \left\{ \int_t^T a_2(u) du \right\} \middle| \mathcal{F}_s \right) \\ &= \tilde{X}_s \mathbf{E} \left((1 - c_t) \exp \left\{ \int_s^t \left(a_1(u) - \frac{b_1^2(u)}{2} \right) du + \int_s^t b_1(u) dw_u \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_t^T a_2(u) du \right\} \middle| \mathcal{F}_s \right). \end{aligned}$$

При выполнении условия 1) теоремы аналогично лемме 6 можно доказать, что условное математическое ожидание в правой части последнего равенства равно $\mathbf{E} \left((1 - c_t) \exp \left\{ \int_s^t a_1(u) du + \int_t^T a_2(u) du \right\} \middle| \mathcal{F}_s \right)$. Поэтому, с учетом условия 2),

$$\mathbf{E}(Y_t | \mathcal{F}_s) = \frac{Y_s}{1 - c_s} \mathbf{E} \left((1 - c_t) \exp \left\{ \int_s^t (a_1(u) - a_2(u)) du \right\} \middle| \mathcal{F}_s \right). \quad (23)$$

Покажем теперь, что $\mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} Y_t < \infty$. Действительно,

$$\mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} Y_t \leq \left(\mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} \tilde{X}_t^2 \cdot \mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} \left[\mathbf{E} \left(\exp \left\{ \int_t^T a_2(u) du \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right) \right]^2 \right)^{1/2}.$$

Оценим каждый из сомножителей правой части последнего неравенства:

$$\mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} \tilde{X}_t^2 \leq \mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} \exp \left\{ \int_0^t (2a_1(s) - b_1^2(s)) ds + \int_0^t 2b_1(s) dw_s \right\}$$

$$\leq \left(\mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} \exp \left\{ \int_0^t (4a_1(s) + 2b_1^2(s)) ds \right\} \right. \\ \left. \times \mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} \exp \left\{ \int_0^t 4b_1(s) dw_s - \int_0^t 4b_1^2(s) ds \right\} \right)^{1/2}.$$

Поскольку, согласно [6], процесс $\exp\{\int_0^t 2b_1(s) dw_s - \int_0^t 2b_1^2(s) ds\}$ — мартингал, то по неравенству Дуба

$$\mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} \exp \left\{ \int_0^t 4b_1(s) dw_s - \int_0^t 4b_1^2(s) ds \right\} \\ \leq 4\mathbf{E} \exp \left\{ \int_0^T 4b_1(s) dw_s - \int_0^T 4b_1^2(s) ds \right\} < \infty$$

в силу условия 2) леммы 6, и, следовательно, с учетом этого же условия $\mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} \tilde{X}_t^2 < \infty$. Далее, снова в силу неравенства Дуба

$$\mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} \left[\mathbf{E} \left(\exp \left\{ \int_t^T a_2(u) du \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right) \right]^2 \leq 4\mathbf{E} \exp \left\{ 2 \int_0^T a_2(u) du \right\} < \infty.$$

Таким образом, мы показали, что $\mathbf{E} \sup_{t \in [0, T]} Y_t < \infty$.

Нетрудно проверить, что в силу условия 3) и равенства (23) для θ и процесса Y_t выполняются неравенства (3) и (11). Таким образом, θ является переломным моментом остановки для процесса Y_t , и теорема доказана.

Пример 1. Пусть c_t — дифференцируемая функция, функция $g_t = a_1(t) - a_2(t) - c'_t/(1 - c_t)$ непрерывна. Если существует предсказуемый момент остановки θ такой, что $\mathbf{E}(\exp\{\int_s^t (a_1(u) - a_2(u)) du\} (1 - c_t) g_t | \mathcal{F}_s) I\{s < t \leq \theta\} > 0$ и $g_t I\{t \geq \theta\} \leq 0$, то момент остановки θ является переломным. В частности, если g_t $\mathcal{F}_0$ -измерима и $g_0 > 0$, то момент остановки $\theta = \inf\{t: g_t = 0\}$ является переломным.

2. Цена переключения содержит компоненту, не зависящую от капитала. Пусть $C_\tau = c_\tau \tilde{X}_\tau + \gamma_\tau$, где c_t — дифференцируемая неслучайная функция, $0 < c_t < 1$, $\gamma_t = \gamma e^{-\beta t}$, $0 < \gamma \leq 1$, $\beta > 0$ — некоторые неслучайные постоянные, $a_1(s)$, $a_2(s)$ — непрерывные неслучайные функции, $a_1(0) > a_2(0) \geq 0$. Как и прежде, после переключения капитал инвестора описывается линейным стохастическим дифференциальным уравнением

$$X_t = \tilde{X}_\tau (1 - c_\tau) - \gamma e^{-\beta t} + \int_\tau^t a_2(s) X_s ds + \int_\tau^t b_2(s) X_s dw_s, \quad t \in [\tau, T],$$

где $\tilde{X}_t$ определяется из (14). В зависимости от условий договора рассмотрим два случая.

(а) Будем считать, что инвестор уплачивает цену в момент переключения τ , даже если $\tau = T$, и забирает средства с первого счета, но не забирает со второго. Отрицательный капитал будет означать взятие денег в долг.

Аналогично предыдущему, нетрудно показать, что задача максимизации EX_T сводится к отысканию оптимального момента остановки для процесса

$$Y_t = \left(\tilde{X}_t(1 - c_t) - \gamma e^{-\beta t} \right) \exp \left\{ \int_t^T a_2(s) ds \right\}. \quad (24)$$

Введем некоторые обозначения:

$$\begin{aligned} M_t &= \exp \left\{ \int_0^t b_1(s) dw_s - \int_0^t \frac{b_1^2(s)}{2} ds \right\}, \quad t \geq 0, \\ A_t &= \exp \left\{ \int_0^t (a_1(s) - a_2(s)) ds \right\}, \quad 0 \leq t \leq T, \\ a_t &= A_t [(1 - c_t)(a_1(t) - a_2(t)) - c'_t], \quad 0 \leq t \leq T, \\ b_t &= \gamma \exp \left\{ - \int_0^t (a_2(s) + \beta) ds \right\} (a_2(t) + \beta), \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

и будем считать, что $A_t = A_T$, $a_t = a_T$, $b_t = b_T$, $b_1(t) = b_1(T)$, $t \geq T$.

Теорема 3. Пусть выполняются условия:

- 1) функция $a_2(t) - a_1(t)$ строго возрастает по $t \in [0, T]$;
- 2) $c'_t < 0$ для всех $t \in [0, T]$ и возрастает по $t \in [0, T]$.

Тогда момент остановки

$$\sigma_0 = \inf \{ t > 0: M_t a_t + b_t = 0 \} \wedge T$$

является оптимальным моментом остановки для процесса Y_t .

Доказательство. Заметим, что процесс M_t является мартингалом, $M_0 = 1$, и по формуле Ито

$$M_t = 1 + \int_0^t b_1(s) M_s dw_s.$$

Рассмотрим процесс $\hat{X}_t = A_t M_t$. Используя формулу Ито, нетрудно получить равенства:

$$\begin{aligned} \hat{X}_t &= 1 + \int_0^t A_s dM_s + \int_0^t M_s A_s (a_1(s) - a_2(s)) ds, \\ \hat{X}_t(1 - c_t) &= 1 - c_0 + \int_0^t (1 - c_s) A_s dM_s + \int_0^t M_s a_s ds, \end{aligned} \quad (25)$$

$$- \gamma e^{-\beta t} \exp \left\{ - \int_0^t a_2(s) ds \right\} = -\gamma + \int_0^t b_s ds. \quad (26)$$

Тогда в силу (14)

$$\tilde{X}_t(1 - c_t) \exp\left\{-\int_0^t a_2(s) ds\right\} = A_t M_t(1 - c_t) = \hat{X}_t(1 - c_t). \quad (27)$$

Теперь перепишем (24) с учетом (25)–(27):

$$Y_t = \exp\left\{\int_0^T a_2(s) ds\right\} \left[1 - c_0 - \gamma + \int_0^t (1 - c_s) A_s dM_s + \int_0^t (M_s a_s + b_s) ds\right].$$

Поскольку $\int_0^t (1 - c_s) A_s dM_s$ является мартингалом и для любого момента остановки $\tau \in [0, T]$ выполнено равенство $\mathbf{E} \int_0^\tau (1 - c_s) A_s dM_s = 0$, то, таким образом, задача нахождения оптимального момента остановки для процесса Y_t сводится к отысканию момента остановки, на котором достигается $S := \sup_{\tau \in [0, T]} \mathbf{E} \int_0^\tau (M_s a_s + b_s) ds$.

Заметим, что

$$M_0 a_0 + b_0 = (1 - c_0)(a_1(0) - a_2(0)) - c'_0 + \gamma(a_2(0) + \beta) > 0.$$

Обозначим $\tau_0 = \inf\{t > 0: M_t a_t + b_t = 0\}$ и покажем, что момент остановки $\sigma_0 = \tau_0 \wedge T$ является оптимальным, т.е. $S = \mathbf{E} \int_0^{\sigma_0} (M_s a_s + b_s) ds$.

Покажем сначала, что любой момент остановки $\tau < \sigma_0$ не является оптимальным. Действительно, пусть $\tau \leq T$ — произвольный момент остановки. Рассмотрим множество $A_0 = \{\tau < \sigma_0\} \subset \Omega$, и пусть $\mathbf{P}(A_0) \neq 0$. Положим $\hat{\tau} = \tau I_{\bar{A}_0} + \sigma_0 I_{A_0}$. Тогда для любого $u \leq T$ имеем: $\{\hat{\tau} \leq u\} = \{\tau \leq u\} \cap \{\omega \in \bar{A}_0\} + \{\sigma_0 \leq u\} \cap \{\omega \in A_0\}$. Заметим, что $\{\tau < \sigma_0\} = \{\omega \in A_0\} \in \mathcal{F}_\tau$, $\{\tau \leq u\} \cap \{\omega \in \bar{A}_0\} \in \mathcal{F}_u$, $\{\sigma_0 \leq u\} \cap \{\omega \in A_0\} \in \mathcal{F}_u$. Значит, $\hat{\tau}$ — момент остановки относительно $\{\mathcal{F}_t, t \leq T\}$. Теперь

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \int_0^{\hat{\tau}} (M_s a_s + b_s) ds &= \mathbf{E} \int_0^\tau (M_s a_s + b_s) ds I_{\bar{A}_0} + \mathbf{E} \int_0^{\sigma_0} (M_s a_s + b_s) ds I_{A_0} \\ &> \mathbf{E} \int_0^\tau (M_s a_s + b_s) ds, \end{aligned}$$

т.е. τ — не оптимальный момент остановки. Таким образом, $S = \sup_{\tau \geq \sigma_0} \mathbf{E} \int_0^\tau (M_s a_s + b_s) ds$.

Покажем теперь, что для любого момента остановки $\tau \geq \sigma_0$

$$\mathbf{E} \int_0^\tau (M_s a_s + b_s) ds \leq \mathbf{E} \int_0^{\sigma_0} (M_s a_s + b_s) ds.$$

Заметим сначала, что если $a_t \geq 0$ на $[0, T]$, то $\sigma_0 = T$. Предположим, что существует $t_0 < T$ такое, что $a_{t_0} = 0$. Тогда, очевидно, $a_t > 0$ при $t \leq t_0$ и $a_t < 0$ при $t > t_0$. Очевидно также, что $\sigma_0 > t_0$. Рассмотрим отношение

$$-\frac{b_t}{a_t} = \frac{e^{-\beta t}(a_2(t) + \beta)}{\exp\left\{\int_0^t a_1(s) ds\right\}[(1 - c_t)(a_2(t) - a_1(t)) + c'_t]}.$$

Поскольку $-b_t/a_t$ убывает по t , то для любого t такого, что $\sigma_0 < t < T$, имеет место неравенство $-b_{\sigma_0}/a_{\sigma_0} \geq -b_t/a_t$. Рассмотрим случайный процесс $\zeta_s = \mathbf{E}(\int_{\sigma_0 \wedge s}^s (M_u a_u + b_u) du \mid \mathcal{F}_{s \wedge \sigma_0})$, $0 \leq s \leq T$. Для любых $0 \leq s < t \leq T$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\zeta_t - \zeta_s \mid \mathcal{F}_{s \wedge \sigma_0}) &= \mathbf{E}\left(\int_{\sigma_0}^t (M_u a_u + b_u) du I\{s \leq \sigma_0 < t\} \right. \\ &\quad \left. + \int_s^t (M_u a_u + b_u) du I\{\sigma_0 < s\} \mid \mathcal{F}_{s \wedge \sigma_0}\right). \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\left(\int_{\sigma_0}^t (M_u a_u + b_u) du I\{s \leq \sigma_0 < t\} \mid \mathcal{F}_{s \wedge \sigma_0}\right) \\ &= \mathbf{E}\left(\int_s^t (M_u a_u + b_u) I\{s \leq \sigma_0 \leq u \leq t\} du \mid \mathcal{F}_{s \wedge \sigma_0}\right) \\ &= \mathbf{E}\left(\int_s^t (\mathbf{E}(M_u \mid \mathcal{F}_{\sigma_0}) I\{\sigma_0 \leq u\} a_u + b_u) \right. \\ &\quad \left. \times I\{s \leq \sigma_0 \leq u \leq t\} du \mid \mathcal{F}_{s \wedge \sigma_0}\right) \\ &= \mathbf{E}\left(\int_s^t (M_{\sigma_0} a_u + b_u) I\{s \leq \sigma_0 \leq u \leq t\} du \mid \mathcal{F}_{s \wedge \sigma_0}\right) \leq 0. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали тот факт, что $(M_{\sigma_0} a_u + b_u) I\{\sigma_0 \leq u\} = a_u(-b_{\sigma_0}/a_{\sigma_0} + b_u/a_u) I\{\sigma_0 \leq u\} \leq 0$, а также равенство $\mathbf{E}(M_u \mid \mathcal{F}_{\sigma_0}) I\{\sigma_0 \leq u\} = M_{\sigma_0} I\{\sigma_0 \leq u\}$. Аналогично,

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\left(\int_s^t (M_u a_u + b_u) du I\{\sigma_0 < s\} \mid \mathcal{F}_{s \wedge \sigma_0}\right) \\ &= \mathbf{E}\left(\int_s^t (\mathbf{E}(M_u \mid \mathcal{F}_{\sigma_0}) I\{\sigma_0 < u\} a_u + b_u) du I\{\sigma_0 < s\} \mid \mathcal{F}_{s \wedge \sigma_0}\right) \\ &= \mathbf{E}\left(\int_s^t (M_{\sigma_0} a_u + b_u) du I\{\sigma_0 < s\} \mid \mathcal{F}_{s \wedge \sigma_0}\right) \leq 0. \end{aligned}$$

Значит, $\{\zeta_s, \mathcal{F}_{s \wedge \sigma_0}, 0 \leq s \leq T\}$ — супермартингал, причем $\zeta_0 = 0$, откуда для любого ограниченного момента остановки τ $\mathbf{E}\zeta_\tau \leq 0$. В частности, если $\sigma_0 \leq \tau \leq T$, то $\mathbf{E}\zeta_\tau = \mathbf{E} \int_{\sigma_0}^\tau (M_u a_u + b_u) du \leq 0$. Теорема доказана.

Заметим, что капитал инвестора в момент σ_0 равен

$$X_{\sigma_0} = \gamma e^{-\beta \sigma_0} \left[\frac{(a_2(\sigma_0) + \beta)(1 - c_{\sigma_0})}{(1 - c_{\sigma_0})(a_2(\sigma_0) - a_1(\sigma_0)) + c'_{\sigma_0}} - 1 \right] > 0,$$

и, значит, «переключаясь» в момент σ_0 , инвестору не нужно брать в долг.

(6) Пусть теперь инвестор платит цену в момент переключения τ , если $\tau < T$ и $X_\tau > 0$ или если $\tau = T$. Если же $\tau < T$ и $X_\tau \leq 0$, то он не

переключается и не платит цену до момента T . Тогда задачей является нахождение $\sup_{\tau \leq T} \mathbf{E} \hat{Y}_\tau$, где

$$\begin{aligned} \hat{Y}_t = & \left[\tilde{X}_t(1 - c_t) - \gamma e^{-\beta t} \right] \exp \left\{ \int_t^T a_2(s) ds \right\} \\ & \times \left(I \left\{ t < T, \tilde{X}_t > \frac{\gamma e^{-\beta t}}{1 - c_t} \right\} + I \{ t = T \} \right) \\ & + \left[\tilde{X}_T(1 - c_T) - \gamma e^{-\beta T} \right] I \left\{ t < T, \tilde{X}_t \leq \frac{\gamma e^{-\beta t}}{1 - c_t} \right\}. \end{aligned}$$

Обозначим $Z_t = \tilde{X}_t(1 - c_t) - \gamma e^{-\beta t}$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \hat{Y}_\tau = & \mathbf{E} Z_\tau \exp \left\{ \int_\tau^T a_2(s) ds \right\} I \{ \tau < T, Z_\tau > 0 \} \\ & + \mathbf{E} Z_T \left(I \{ \tau = T \} + I \{ \tau < T, Z_\tau \leq 0 \} \right). \end{aligned}$$

Пусть $\sigma(\tau) = \tau I \{ \tau < T, Z_\tau > 0 \} + T(I \{ \tau = T \} + I \{ \tau < T, Z_\tau \leq 0 \})$, тогда $\sigma(\tau)$ является моментом остановки, причем $\mathbf{E} \hat{Y}_\tau = \mathbf{E} Y_{\sigma(\tau)}$. Следовательно, $\sup_{\tau \leq T} \mathbf{E} \hat{Y}_\tau = \sup_{\sigma(\tau) \leq T} \mathbf{E} Y_{\sigma(\tau)} \leq \sup_{\tau \leq T} \mathbf{E} Y_\tau$, а значит, в этом случае инвестор не получает дополнительной выгоды.

З а м е ч а н и е 2. В данной статье рассматривается «последовательная» обработка двух активов с помощью процедуры переключения. «Параллельная» обработка двух активов, а именно, американский опцион купли с функцией выплаты, определяющейся максимумом из двух активов, рассмотрена в [7]. Отыскание оптимального момента остановки (без переключения) в аналогичной ситуации подробно рассмотрено в [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Morimoto H. Optimal stopping and a martingale approach to the penalty method. — Tohoku Math. J., 1982, v. 34, p. 407–416.
2. Факеев А. Г. Об оптимальной остановке случайных процессов с непрерывным временем. — Теория вероятн. и ее примен., 1970, т. XV, № 2, с. 336–344.
3. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974, 696 с.
4. Деллашери К. Емкости и случайные процессы. М.: Мир, 1975, 192 с.
5. Jacka S. D. Local times, optimal stopping and semimartingales. — Ann. Probab., 1993, v. 21, № 1, p. 329–339.
6. Новиков А. А. О моментных неравенствах для стохастических интегралов. — Теория вероятн. и ее примен., 1971, т. XVI, № 3, с. 548–551.
7. Brodie M., Detemple J. The valuation of American options on multiple assets. — Math. Finance, 1997, v. 7, № 3, p. 241–286.
8. Duffie D. Dynamic Asset Pricing Theory. Oxford: Princeton Univ. Press, 1992, 300 p.

Поступила в редакцию
25.III.1998