Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Тимашёв, Об асимптотике больших уклонений в схемах размещения частиц по различным ячейкам при ограниченных объемах ячеек, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, том 45, выпуск 3, 521–535

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp483>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 15:35:45

© 2000 г.

ТИМАШЕВ А. Н.*

ОБ АСИМПТОТИКЕ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ В СХЕМАХ РАЗМЕЩЕНИЯ ЧАСТИЦ ПО РАЗЛИЧНЫМ ЯЧЕЙКАМ ПРИ ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЪЕМАХ ЯЧЕЕК

Рассматриваются равновероятные схемы размещения n одинаковых и различных частиц по N различным ячейкам при условии, что количество частиц, содержащихся в каждой ячейке, не превосходит некоторой постоянной $p \in \mathbb{N}$. Получены локальная и интегральная теоремы о больших отклонениях, оценивающие хвосты распределения случайной величины, равной числу пустых ячеек. Найдены асимптотики математического ожидания и дисперсии и доказана локальная нормальная теорема для распределения вероятностей этой случайной величины в центральной зоне изменения параметров n, N , когда $n, N \rightarrow \infty$ так, что $0 < \alpha_1 \leq \alpha = n/N \leq \alpha_2 < p$ (α_1, α_2 — постоянные).

Ключевые слова и фразы: равновероятная схема размещения, локальная предельная теорема, большие отклонения, метод перевала.

1. Введение. Пусть n — количество частиц, N — количество ячеек в равновероятной схеме размещения различных частиц по различным ячейкам при условии, что объем (т.е. количество содержащихся частиц) каждой ячейки не превосходит p . Всюду далее p — фиксированное натуральное число и $n \leq Np$. Положим

$$M_n(N, p) = \sum_{\substack{l_1 + \dots + l_N = n \\ 0 \leq l_1, \dots, l_N \leq p}} \frac{n!}{l_1! \dots l_N!}. \quad (1)$$

Будем предполагать, что все $M_n(N, p)$ размещений указанного типа имеют одинаковые вероятности, равные $(M_n(N, p))^{-1}$. Если ν_i — объем i -й ячейки, $i = 1, 2, \dots, N$, и $k_1, \dots, k_N$ — целые неотрицательные числа, для которых $k_1 + \dots + k_N = n$ и $k_i \leq p$; $i = 1, 2, \dots, N$, то

$$P\{\nu_1 = k_1, \dots, \nu_N = k_N\} = \frac{1}{M_n(N, p)} \frac{n!}{k_1! \dots k_N!}. \quad (2)$$

Пусть $\mu_0(p)$ — случайная величина, равная количеству пустых ячеек в рассматриваемой схеме случайных размещений, тогда $N - n/p \geq \mu_0(p) \geq$

* Академия ФСБ, Мичуринский пр., 70, 125040 Москва, Россия.

$N - n$ с вероятностью 1. В частности, при $p = 1$ из (1) следует, что $M_n(N, 1) = N(N - 1) \cdots (N - n + 1)$ и $\mu_0(1) = N - n$ с вероятностью 1; в этом случае получаем хорошо известную схему выбора без возвращения [1, с. 40]. Если $n \leq p$, то $M_n(N, p) = N^n$, и мы получаем классическую схему равновероятных размещений, исследовавшуюся многими авторами (см. обобщающую монографию [2]). Задача оценки распределения случайной величины $\mu_0(p)$ в этой схеме носит название классической задачи о дробинках [2, с. 9].

Известно [3, с. 123], что производящая функция чисел $M_n(N, p)$ имеет следующий вид ($M_0(N, p) = 1$):

$$\sum_{n=0}^{Np} M_n(N, p) \frac{z^n}{n!} = \left(\sum_{k=0}^p \frac{z^k}{k!} \right)^N. \quad (3)$$

Из (3) получаем

$$M_n(N, p) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{(1 + z + \cdots + z^p/p!)^N}{z^{n+1}} dz. \quad (4)$$

Интегрирование в (4) осуществляется по окружности произвольного радиуса с центром в нуле, пробегавшей в положительном направлении.

В работе, исходя из (4) и с использованием метода перевала (в одномерном и двумерном вариантах) получены локальная и интегральная теоремы о больших отклонениях, оценивающие хвосты распределения вероятностей случайной величины $\mu_0(p)$ в центральной зоне изменения параметров n, N [2, с. 13], когда $n, N \rightarrow \infty$ так, что

$$0 < \alpha_1 \leq \alpha = \frac{n}{N} \leq \alpha_2 < p \quad (5)$$

(α_1, α_2 — постоянные). Заметим, что в классической схеме равновероятных размещений локальная и интегральная многомерные теоремы о больших отклонениях получены автором в [4], [5].

Применяя полученные результаты, в работе найдена асимптотика математического ожидания и дисперсии случайной величины $\mu_0(p)$ при условии (5), а также доказана локальная нормальная предельная теорема для распределения $\mu_0(p)$. При этом используется метод сведения к суммам независимых одинаково распределенных целочисленных случайных величин, впервые реализованный В. Ф. Колчиным [2, с. 58].

Далее рассматривается равновероятная схема размещения n одинаковых частиц по N различным ячейкам при указанном выше ограничении на объемы ячеек. Пусть $f_n(N, p)$ — число всевозможных размещений такого типа, т.е. число решений уравнения $x_1 + \cdots + x_N = n$ в целых неотрицательных числах $x_1, \dots, x_N$ таких, что $x_i \leq p$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Предполагается, что все $f_n(N, p)$ размещений имеют одинаковые вероятности, равные $(f_n(N, p))^{-1}$. Пусть $\xi_0(p)$ — случайная величина,

равная количеству пустых ячеек в этой схеме случайных размещений, тогда $N - n/p \geq \xi_0(p) \geq N - n$ с вероятностью 1. В частности, при $p = 1$ $f_n(N, 1) = C_N^n$; $\xi_0(1) = N - n$ с вероятностью 1, и мы получаем известную статистику Ферми-Дирака [1, с. 52]. Если $n \leq p$, то $f_n(N, p) = C_{n+N-1}^{N-1}$, и мы получаем статистику Бозе-Эйнштейна [1, с. 52]. Предельные теоремы для распределения числа ячеек с заданным заполнением в этой схеме получены А. Н. Труновым в [6]; теоремы о больших уклонениях доказаны автором в [7].

Известно [3, с. 126], что производящая функция чисел $f_n(N, p)$ имеет вид

$$\sum_{n=0}^{Np} f_n(N, p) z^n = \left(\sum_{k=0}^p z^k \right)^N. \quad (6)$$

Из (6) следует, что

$$f_n(N, p) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(1 + z + \dots + z^p)^N}{z^{n+1}} dz. \quad (7)$$

Интегрирование в (7) осуществляется по тому же пути, что и в (4).

Исходя из (7) и используя метод перевала при условии (5), в работе получены локальная и интегральная теоремы о больших уклонениях, асимптотика математического ожидания и дисперсии, а также локальная нормальная предельная теорема для распределения случайной величины $\xi_0(p)$.

В теоремах 1 и 7 получены асимптотические оценки чисел $M_n(N, p)$ и $f_n(N, p)$ всевозможных размещений указанных типов, определяемых согласно (4) и (7), при условии, что $n, N \rightarrow \infty$ так, что выполнено (5). При этом остаточный член в обоих случаях имеет порядок $O(1/N)$. В теоремах 2 и 8 при условии (5) доказываются асимптотические формулы для вероятностей $P\{\mu_0(p) = m\}$ и $P\{\xi_0(p) = m\}$, если $m \rightarrow \infty$ так, что выполнено (16) (см. ниже), а в теоремах 3, 4 и 9, 10 — асимптотические формулы для вероятностей $P\{\mu_0(p) \geq m\}$, $P\{\mu_0(p) \leq m\}$ и $P\{\xi_0(p) \geq m\}$, $P\{\xi_0(p) \leq m\}$. При этом во всех случаях остаточный член также имеет порядок $O(1/N)$, а параметр m может попадать и в области больших уклонений. В теоремах 5 и 11 находятся асимптотические оценки для математических ожиданий $E\mu_0(p)$, $E\xi_0(p)$ и дисперсий $D\mu_0(p)$, $D\xi_0(p)$ при условии (5); для вычисления дисперсий в обоих случаях приходится использовать точную формулу для остаточного члена порядка $O(1/N)$ в асимптотических разложениях величин $M_n(N, p)$ и $f_n(N, p)$. Наконец, в теоремах 6 и 12 формулируются и доказываются утверждения о сходимости распределений случайных величин $\mu_0(p)$ и $\xi_0(p)$ к нормальному закону (в локальном варианте), из которых обычным образом следуют интегральные теоремы. Формулировки и доказательства всех изложенных результатов для распределения случайной величины $\xi_0(p)$ анало-

гичны соответствующим результатам для $\mu_0(p)$, поэтому теоремы 7–12 только формулируются. Заметим, что при выводе локальных и интегральных теорем о больших отклонениях (как и в классических схемах размещения — см. [4], [5], [7]) не удастся обойтись чисто вероятностными средствами исследования, что обуславливает необходимость использования многомерного метода перевала (в техническом отношении довольно сложного). Однако, в отличие от указанных классических схем, в рассматриваемых в работе случаях пока что не удалось получить ни одной пуассоновской предельной теоремы для случайных величин $\mu_0(p)$ и $\xi_0(p)$.

2. Случай, когда частицы различны.

Теорема 1. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что выполнено условие (5). Тогда равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$

$$M_n(N, p) = \frac{n! \beta_0^{-N} z_0^{-n}}{\sqrt{2\pi N (\alpha - (z_0 - \alpha)(p - \alpha))}} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right), \quad (8)$$

где $z = z_0$ — единственный вещественный положительный корень уравнения

$$\sum_{k=0}^p (k - \alpha) \frac{z^k}{k!} = 0 \quad (9)$$

и

$$\beta_0 = \beta_0(\alpha) = \left(\sum_{k=0}^p \frac{z_0^k}{k!}\right)^{-1} = \frac{p!(z_0 - \alpha)}{z_0^{p+1}}. \quad (10)$$

Доказательство. Согласно (4), имеем:

$$M_n(N, p) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{1}{z} \exp(N\omega(z)) dz,$$

где $\omega(z) = \ln(1 + z + \dots + z^p/p!) - \alpha \ln z$ и для логарифма выбирается та непрерывная ветвь, которая принимает вещественные значения на вещественной положительной полуоси.

Следовательно, $\omega'(z) = 0$, если $z = z_0$ — единственный вещественный положительный корень уравнения (9), и $\omega''(z_0) = [\alpha - (z_0 - \alpha)(p - \alpha)]/z_0^2 > 0$ [8, с. 192]. При условиях теоремы 1 значение интеграла в (4) асимптотически, с точностью до множителя $1 + O(1/N)$, равно вкладу точки перевала первого порядка $z = z_0$ функции ω , и притом равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$; вычисляя этот вклад стандартными методами [8, с. 194], приходим к соотношению (8), в котором величина β_0 определяется из (10). Теорема 1 доказана.

Заметим, что если положить

$$S_r(z) = \sum_{k=0}^r \frac{z^k}{k!} \quad (z > 0, r = 0, 1, \dots), \quad (11)$$

то окажется, что уравнение (9) можно записать в виде $zS_{p-1}(z)/S_p(z) = zS'_p(z)/S_p(z) = \alpha$; при этом функция $q(z) = zS'_p(z)/S_p(z)$ строго возрастает от 0 до p при возрастании z от 0 до $+\infty$ [8, с. 191]. Поэтому, полагая для любого $\alpha \in (0, p)$ $z_0 = z_0(\alpha)$, получаем, что функция $z_0(\alpha)$ строго возрастает от 0 до $+\infty$ при возрастании α от 0 до p . Отсюда, в частности, следует, что $\alpha < z_0(\alpha) < \alpha(1 + 1/(p - \alpha))$ для любого $\alpha \in (0, p)$.

Рассмотрим случайную величину $\mu_0(p)$, определенную выше во введении. Если случайный вектор $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N)$ имеет распределение вида (2), то $\mu_0(p) = \text{card} \{i \in N \mid 1 \leq i \leq N, \nu_i = 0\}$.

Факториальные моменты случайной величины $\mu_0(p)$ определяются из соотношений

$$\mathbf{E}(\mu_0(p))_j = N(N-1) \cdots (N-j+1) \frac{M_n(N-j, p)}{M_n(N, p)} \quad (12)$$

($j = 0, 1, \dots, N$, $M_n(0, p) = 0$). Из (4) и (12) следует, что производящая функция распределения вероятностей для $\mu_0(p)$ равна

$$\begin{aligned} P_{\mu_0(p)}(u) &= \sum_{m=0}^N \mathbf{P}\{\mu_0(p) = m\} u^m \\ &= \frac{n!}{M_n(N, p)} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(u + \sum_{k=1}^p z^k/k!)^N}{z^{n+1}} dz. \end{aligned} \quad (13)$$

По интегральной формуле Коши имеем, согласно (13),

$$\mathbf{P}\{\mu_0(p) = m\} = \frac{n!}{M_n(N, p)} \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint \frac{(f(z, u))^N}{z^{n+1} u^{m+1}} dz du \quad (14)$$

($m = 0, 1, \dots, N$), где

$$f(z, u) = u + \sum_{k=1}^p \frac{z^k}{k!}. \quad (15)$$

Всюду далее считаем, что m — натуральное число.

Теорема 2. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что выполнено условие (5); $p \geq 2$ и $m = \beta N \rightarrow \infty$, так, что

$$1 < \gamma_1 \leq \frac{\alpha}{1 - \beta} \leq \gamma_2 < p \quad (\gamma_1, \gamma_2 \text{ — постоянные}). \quad (16)$$

Тогда равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ и значений β , удовлетворяющих условию (16),

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mu_0(p) = m\} &= \sqrt{\frac{\alpha - (z_0 - \alpha)(p - \alpha)}{2\pi N \Delta_z}} \left(\frac{z_0}{z^*}\right)^n \\ &\times \beta_0^N \beta^{-m} \left(\frac{S_p(z^*) - 1}{1 - \beta}\right)^{N-m} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right), \end{aligned} \quad (17)$$

где $z = z_0$ — единственный вещественный положительный корень уравнения (9); $z = z^*$ — единственный вещественный положительный корень уравнения

$$\sum_{k=1}^p \left(k - \frac{\alpha}{1-\beta} \right) \frac{z^k}{k!} = 0; \quad (18)$$

$$\Delta_z = \beta(1-\beta)^2 \left(\frac{z^*(S_{p-1}(z^*) + z^*S_{p-2}(z^*))}{S_p(z^*) - 1} - \frac{\alpha^2}{(1-\beta)^2} \right) > 0;$$

значения β_0 , $S_{p-2}(z^*)$, $S_{p-1}(z^*)$, $S_p(z^*)$ определяются согласно (10), (11).

Доказательство. Для обоснования формулы (17) воспользуемся методом перевала, исходя из соотношений (14) и (15) и учитывая условия (5) и (16). Пусть (z^*, u^*) — точка перевала функции f , для которой $z^* > 0$ и $u^* > 0$, тогда $\max_{|z|=z^*, |u|=u^*} |f(z, u)|$ достигается только при $z = z^*$ и $u = u^*$. Чтобы найти значения z^* и u^* , составим систему уравнений

$$\begin{cases} Nz \frac{\partial f}{\partial z}(z, u) = n f(z, u), \\ Nu \frac{\partial f}{\partial u}(z, u) = m f(z, u). \end{cases}$$

Подставляя в эту систему $f(z, u)$ из (15) и вычисляя частные производные $(\partial f / \partial z)(z, u)$ и $(\partial f / \partial u)(z, u)$, после элементарных преобразований получаем, что

$$\sum_{k=1}^p \frac{z^k}{(k-1)!} = \frac{n}{N-m} \sum_{k=1}^p \frac{z^k}{k!} = \frac{\alpha}{1-\beta} \sum_{k=1}^p \frac{z^k}{k!}.$$

Отсюда следует, что $z = z^*$ удовлетворяет уравнению (18), которое при наших условиях имеет единственный вещественный положительный корень [8, с. 192]. Далее получаем, что

$$u^* = \frac{m}{N-m} \sum_{k=1}^p \frac{(z^*)^k}{k!} = \frac{\beta}{1-\beta} \sum_{k=1}^p \frac{(z^*)^k}{k!}, \quad (19)$$

$$f(z^*, u^*) = \frac{1}{1-\beta} \sum_{k=1}^p \frac{(z^*)^k}{k!}. \quad (20)$$

Из формул (11), (18), (19) и (20) следует, что при условиях теоремы 2

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint \frac{(f(z, u))^N}{z^{n+1} u^{m+1}} dz du = \frac{(f(z^*, u^*))^N}{(z^*)^n (u^*)^m 2\pi N \sqrt{\Delta_z}} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right) \quad (21)$$

равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ и значений β , удовлетворяющих условию (16). Здесь $\Delta_z = \det(\Delta_{ij})$ ($i, j = 1, 2$), значения Δ_{ij} указаны

ниже (при этом мы покажем, что $\Delta_z > 0$ при $p \geq 2$). Оценки (8), (14), (21) позволяют утверждать, что справедливо равенство (17), где

$$\begin{aligned}\Delta_z &= \Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}\Delta_{21}, \\ \Delta_{11} &= z \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial(\ln f)}{\partial z} \right) (z^*, u^*) = (1 - \beta) \frac{\sum_{k=1}^p [k(z^*)^k / (k-1)!]}{\sum_{k=1}^p (z^*)^k / k!} - \alpha^2, \\ \Delta_{22} &= u \frac{\partial}{\partial u} \left(u \frac{\partial(\ln f)}{\partial u} \right) (z^*, u^*) = \beta(1 - \beta), \\ \Delta_{12} &= \Delta_{21} = u \frac{\partial}{\partial u} \left(z \frac{\partial(\ln f)}{\partial z} \right) (z^*, u^*) = -\alpha\beta.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Delta_z = \beta(1 - \beta)^2 \left(\frac{\sum_{k=1}^p k^2 (z^*)^k / k!}{\sum_{k=1}^p (z^*)^k / k!} - \frac{\alpha^2}{(1 - \beta)^2} \right) > 0$$

при $p \geq 2$; действительно, согласно (18), это неравенство является неравенством Коши–Буняковского и справедливо при $p \geq 2$. Кроме того, путем элементарных преобразований нетрудно получить, что величина Δ_z имеет вид, указанный в формулировке теоремы 2. Теорема 2 доказана.

Заметим, что при условиях (5)

$$\begin{aligned}1 &< \inf_{\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]} \left\{ \frac{\alpha}{1 - \beta_0(\alpha)} \right\} = \frac{\alpha_1}{1 - \beta_0(\alpha_1)} < \frac{\alpha_2}{1 - \beta_0(\alpha_2)} \\ &= \sup_{\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]} \left\{ \frac{\alpha}{1 - \beta_0(\alpha)} \right\} < p.\end{aligned}$$

Если положить $\gamma_1 = \alpha_1 / [1 - \beta_0(\alpha_1)]$ и $\gamma_2 = \alpha_2 / [1 - \beta_0(\alpha_2)]$, то для любого $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, $1 < \gamma_1 \leq \alpha / [1 - \beta_0(\alpha)] \leq \gamma_2 < p$ и поэтому при $\beta = \beta_0(\alpha)$ из условия (5) следует (16). Сравнивая уравнения (9) и (18), получаем, что для любого $\alpha \in (0, p)$ $z^*(\alpha) = z_0(\alpha)$, если $\beta = \beta_0(\alpha)$. Поэтому если $n, N \rightarrow \infty$ так, что выполнено условие (5), то $S_p(z^*) = S_p(z_0) = \beta_0^{-1}$ при условии $\beta = \beta_0$, и оценка (17) позволяет утверждать, что при $\beta = \beta_0$ и $m = \beta_0 N \in \mathbb{N}$ в случае $p \geq 2$ имеем:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{\mu_0(p) = m\} &= \sqrt{\frac{\alpha - (z_0 - \alpha)(p - \alpha)}{2\pi N \Delta_0}} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right) \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi N \sigma_0^2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right)\end{aligned}\quad (22)$$

равномерно относительно $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2]$, где $\Delta_0 = \Delta_z$ при $\beta = \beta_0$ и

$$\sigma_0^2 = \frac{\Delta_0}{\alpha - (z_0 - \alpha)(p - \alpha)} > 0. \quad (23)$$

Далее будет показано, что оценка (22) — это частный случай локальной нормальной предельной теоремы для случайной величины $\mu_0(p)$. Из

соотношения (23) и формул для величины Δ_z , приведенных в формулировке теоремы 2, при $\beta = \beta_0$ легко получить, что для любого $\alpha \in (0, p)$

$$\sigma_0^2 = \frac{\alpha\beta_0(1-\beta_0)}{\alpha - (z_0 - \alpha)(p - \alpha)} \left(p + 1 + \left(1 - \frac{p}{\alpha} \right) z_0 - \frac{\alpha}{1 - \beta_0} \right). \quad (24)$$

Если $p \geq 2$, то $\sigma_0^2 > 0$; если же $p = 1$, то $\sigma_0^2 = 0$, поскольку в этом случае для любого $\alpha \in (0, 1)$ $z_0(\alpha) = \alpha/(1 - \alpha)$ и $\beta_0 = 1 - \alpha$. Заметим, что если $\alpha \in (0, p)$ и $1 < \alpha/(1 - \beta) < p$, то при $\beta > \beta_0(\alpha)$ $z^* > z_0(\alpha)$ и $u^* > 1$, а при $\beta < \beta_0(\alpha)$ $z^* < z_0(\alpha)$ и $0 < u^* < 1$.

Действительно, при $\beta = \beta_0(\alpha)$, как отмечено выше, имеем: $\forall \alpha \in (0, p)$ $z^*(\alpha) = z_0(\alpha)$, и поэтому $u^* = 1$ в силу (10). Если же $\beta > \beta_0(\alpha)$, то из (18) следует, что $\sum_{k=1}^p (k - \alpha/[1 - \beta_0(\alpha)]) (z^*)^k/k! > 0$; так как

$$\sum_{k=1}^p \left(k - \frac{\alpha}{1 - \beta_0(\alpha)} \right) \frac{z_0^k}{k!} = 0$$

и функция $h(z) = zS'_p(z)/[S_p(z) - 1]$ строго возрастает на интервале $(0, +\infty)$ от 1 до p , то в этом случае $z^* > z_0(\alpha)$, и поэтому

$$\sum_{k=1}^p \frac{(z^*)^k}{k!} > \sum_{k=1}^p \frac{(z_0(\alpha))^k}{k!} = \frac{1 - \beta_0(\alpha)}{\beta_0(\alpha)} > \frac{1 - \beta}{\beta},$$

так что, согласно (19), $u^* > 1$. Аналогично показывается, что в случае $\beta < \beta_0(\alpha)$ $z^* < z_0(\alpha)$ и $0 < u^* < 1$.

Теорема 3. Пусть при условиях теоремы 2 $\alpha_2/[1 - \beta_0(\alpha_2)] < \gamma_1$. Тогда равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ и значений β , удовлетворяющих условию (16),

$$\mathbf{P}\{\mu_0(p) \geq m\} = \frac{\mathbf{P}\{\mu_0(p) = m\}}{1 - (1 - \beta)/[\beta(S_p(z^*) - 1)]} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right). \quad (25)$$

Заметим, что при условиях (5) равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$

$$\mathbf{E}\mu_0(p) = N \frac{M_n(N - 1, p)}{M_n(N, p)} = N\beta_0 + O(1)$$

(это равенство будет установлено ниже), и поэтому «порог» в выборе значений β определяется отношением $\mathbf{E}\mu_0(p)/N = \beta_0 + O(1/N)$. Если $\alpha_2/[1 - \beta_0(\alpha_2)] < \gamma_1$, то из (5) получаем, что при любом $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ и при любых значениях β , удовлетворяющих условию (16), $\beta \geq \beta_0(\alpha) + C$, где $C > 0$ — постоянная, и поэтому $\inf_{(\alpha, \beta)} \{u^*\} > 1$. Отсюда нетрудно вывести, что

$$\mathbf{P}\{\mu_0(p) \geq m\} = \mathbf{P}\{\mu_0(p) = m\} \frac{u^*}{u^* - 1} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right)$$

равномерно относительно указанных значений α и β . Из этой формулы и (19) следует (25). Теорема 3 доказана.

Если, в частности, при условиях теоремы 3 α и β — постоянные, то

$$0 < \lim_{m,n,N \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{\mu_0(p) = m\}}{\mathbf{P}\{\mu_0(p) \geq m\}} = 1 - \frac{1 - \beta}{\beta(S_p(z^*) - 1)} < 1.$$

Теорема 4. Пусть при условиях теоремы 2 $\gamma_2 < \alpha_1/[1 - \beta_0(\alpha_1)]$. Тогда равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ и значений β , удовлетворяющих условию (16),

$$\mathbf{P}\{\mu_0(p) \leq m\} = \mathbf{P}\{\mu_0(p) = m\} \frac{1 - \beta}{1 - \beta S_p(z^*)} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right).$$

Доказательство теоремы 4 проводится аналогично доказательству теоремы 3. Следует заметить, что если $\gamma_2 < \alpha_1/[1 - \beta_0(\alpha_1)]$, то при любом $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ и при любых значениях β , удовлетворяющих условию (16), $\beta \leq \beta_0(\alpha) - C_1$, где $C_1 > 0$ — некоторая постоянная, и поэтому $\sup_{(\alpha, \beta)} \{u^*\} < 1$ и существует постоянная $\eta \in (0, 1)$ такая, что $1 - u^{m+1} = 1 + O(\eta^{N\beta})$ равномерно относительно переменных z, u , удовлетворяющих условиям $|z| = z^* > 0$ и $0 < |u| = u^* < 1$. Из равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mu_0(p) \leq m\} &= \frac{n!}{M_n(N, p)} \frac{1}{(2\pi i)^2} \\ &\times \oint \oint \frac{(f(z, u))^N}{(1 - u) z^{n+1} u^{m+1}} (1 - u^{m+1}) dz du \end{aligned}$$

так же, как и выше, получаем:

$$\mathbf{P}\{\mu_0(p) \leq m\} = \frac{\mathbf{P}\{\mu_0(p) = m\}}{1 - u^*} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right)$$

равномерно относительно указанных значений α и β . Из этой формулы и (19) получаем утверждение теоремы 4.

Если, в частности, при условиях теоремы 4 α и β — постоянные, то

$$0 < \lim_{m,n,N \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{\mu_0(p) = m\}}{\mathbf{P}\{\mu_0(p) \leq m\}} = \frac{1 - \beta S_p(z^*)}{1 - \beta} < 1.$$

Теорема 5. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что выполнено условие (5). Тогда равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$

$$\mathbf{E}\mu_0(p) = N\beta_0 + O(1), \quad \mathbf{D}\mu_0(p) = N\sigma_0^2 + O(1),$$

где величины β_0 и σ_0^2 определяются из соотношений (10) и (24).

Заметим, что при $p = 1$ $\mathbf{D}\mu_0(1) = 0$, если $n \leq N$, так как в этом случае $\mu_0(1) = N - n$ с вероятностью 1, и $\mathbf{E}\mu_0(1) = N - n$. Поскольку

при $p = 1$ для любого $\alpha \in (0, 1)$ $\beta_0 = 1 - \alpha$ и $\sigma_0^2 = 0$, то $E\mu_0(1) = N\beta_0$ и $D\mu_0(1) = N\sigma_0^2$. Пусть $p \geq 2$, тогда из (12) при $j = 1$ и $j = 2$ получаем:

$$E\mu_0(p) = N \frac{M_n(N-1, p)}{M_n(N, p)}, \quad (26)$$

$$E(\mu_0(p)(\mu_0(p) - 1)) = N(N-1) \frac{M_n(N-2, p)}{M_n(N, p)}. \quad (27)$$

Поскольку, согласно (4),

$$M_n(N-1, p) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{(S_p(z))^{N-1}}{z^{n+1}} dz$$

и $S_p(z_0) = \beta_0^{-1}$, то из (8) следует, что при условиях теоремы 5 $M_n(N-1, p) = \beta_0 M_n(N, p)(1 + O(1/N))$ равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, что с учетом (26) равносильно первому равенству в утверждении теоремы 5. Далее, из (26) и (27) получаем

$$\begin{aligned} D\mu_0(p) &= N(N-1) \frac{M_n(N-2, p)}{M_n(N, p)} \\ &+ N \frac{M_n(N-1, p)}{M_n(N, p)} \left(1 - N \frac{M_n(N-1, p)}{M_n(N, p)}\right). \end{aligned} \quad (28)$$

Пусть при условиях доказываемой теоремы равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$

$$\begin{aligned} M_n(N-j, p) &= \frac{n!}{\sqrt{2\pi N(\alpha - (z_0 - \alpha)(p - \alpha))}} \\ &\times \frac{\beta_0^{-N+j}}{z_0^n} \left(1 + \frac{\theta_j}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right) \quad (j = 0, 1, 2). \end{aligned}$$

Тогда из (28) можно вывести, что

$$D\mu_0(p) = N\beta_0(1 - \beta_0 + \beta_0(\theta_0 + \theta_2 - 2\theta_1)) + O(1)$$

равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, и

$$\sigma_0^2 = \beta_0(1 - \beta_0) + \beta_0^2(\theta_0 + \theta_2 - 2\theta_1). \quad (29)$$

Отсюда следует второе равенство в утверждении теоремы 5.

Теорема 6. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что выполнено условие (5). Тогда при $p \geq 2$ равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ и целых положительных значений $m = \beta_0 N + x\sqrt{N}$, для которых величина x заключена в любом фиксированном конечном промежутке,

$$P\{\mu_0(p) = m\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N\sigma_0^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right), \quad (30)$$

где величины β_0 и σ_0^2 определяются из соотношений (10) и (24).

Доказательство. При условии (5) формулу (30) можно получить из (17), полагая $\beta = \beta_0 + x/\sqrt{N}$; можно показать, в частности, что тогда

$$z^* = z_0 \left(1 + \frac{\alpha \beta_0 x}{(\alpha - (z_0 - \alpha)(p - \alpha)) \sigma_0^2 \sqrt{N}} + O\left(\frac{1}{N}\right) \right)$$

равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$. Однако, чтобы избежать громоздких выкладок, предпочтительнее использовать метод, позволяющий свести изучение асимптотического поведения вероятности $P\{\mu_0(p) = m\}$ к применению классической локальной нормальной предельной теоремы для последовательности независимых одинаково распределенных целочисленных случайных величин [2, с. 59]. Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_N, \dots$, таких, что

$$P\{\xi_1 = k\} = \frac{z_0^k}{k! S_p(z_0)} \quad (k = 0, 1, \dots, p).$$

Легко подсчитать, что $E\xi_1 = z_0 S_{p-1}(z_0)/S_p(z_0) = \alpha$ в силу (9) и $D\xi_1 = \alpha(p+1-\alpha) - (p-\alpha)z_0 > 0$, поскольку $z_0 < \alpha(1+1/(p-\alpha))$, если $\alpha \in (0, p)$. Согласно (8), локальной нормальной предельной теореме для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_N, \dots$, если $n, N \rightarrow \infty$ так, что выполнено условие (5), то равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$

$$\begin{aligned} P\{\xi_1 + \dots + \xi_N = n\} &= \frac{M_n(N, p)}{n!} z_0^n \beta_0^N \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi N(\alpha(p+1-\alpha) - (p-\alpha)z_0)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right) \end{aligned} \quad (31)$$

(см. [12]). Далее, рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_{N-m}^{(0)}, \dots$ таких, что

$$P\{\xi_1^{(0)} = k\} = P\{\xi_1 = k \mid \xi_1 \neq 0\} = \frac{z_0^k}{k!(S_p(z_0 - 1))} \quad (k = 1, 2, \dots, p).$$

Нетрудно показать, что $E\xi_1^{(0)} = \alpha/(1-\beta_0)$ и

$$D\xi_1^{(0)} = \frac{(p+1)\alpha - \alpha^2/(1-\beta_0) - (p-\alpha)z_0}{1-\beta_0} > 0 \quad (32)$$

при $p \geq 2$.

При условиях теоремы 6

$$\frac{n}{N-m} = \frac{\alpha}{1-\beta_0 - x/\sqrt{N}} = E\xi_1^{(0)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \right)$$

равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, поскольку величина $E\xi_1^{(0)}$ ограничена. Поэтому, согласно локальной нормальной предельной теореме для последовательности независимых случайных величин $\xi_1^{(0)}, \dots, \xi_{N-m}^{(0)}, \dots$, имеем равномерно по $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$:

$$\begin{aligned} P\{\xi_1^{(0)} + \dots + \xi_{N-m}^{(0)} = n\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi N(1-\beta_0)D\xi_1^{(0)}}} \\ &\times \exp\left(-\frac{\alpha^2 x^2}{2(1-\beta_0)^3 D\xi_1^{(0)}}\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right). \end{aligned} \quad (33)$$

При условиях теоремы 6, согласно локальной теореме Муавра-Лапласа,

$$\begin{aligned} C_N^m \beta_0^m (1-\beta_0)^{N-m} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi N \beta_0 (1-\beta_0)}} \\ &\times \exp\left(-\frac{x^2}{2\beta_0(1-\beta_0)}\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right) \end{aligned} \quad (34)$$

равномерно по $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$. Поскольку $P\{\xi_1 = 0\} = 1/S_p(z_0) = \beta_0$ в силу (10), то аналогично [2, с. 58] можно утверждать, что

$$P\{\mu_0(p) = m\} = C_N^m \beta_0^m (1-\beta_0)^{N-m} \frac{P\{\xi_1^{(0)} + \dots + \xi_{N-m}^{(0)} = n\}}{P\{\xi_1 + \dots + \xi_N = n\}}. \quad (35)$$

Из формул (24), (31)–(35) следует (30). Теорема 6 доказана.

Следствие 1. При условиях теоремы 6 случайная величина $[\mu_0(p) - \beta_0 N] / \sqrt{N \sigma_0^2}$ распределена в пределе по стандартному нормальному закону.

3. Случай одинаковых частиц.

Теорема 7. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что выполнено условие (5). Тогда равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$

$$f_n(N, p) = \frac{\gamma_0^{-N} x_0^{-n}}{\sqrt{2\pi N \gamma_0 \sum_{k=1}^p k(k-\alpha) x_0^k}} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right), \quad (36)$$

где $x = x_0$ — единственный вещественный положительный корень уравнения

$$\sum_{k=0}^p (k-\alpha) x^k = 0 \quad (37)$$

и

$$\gamma_0 = \left(\sum_{k=0}^p x_0^k\right)^{-1}. \quad (38)$$

Обоснование формулы (36) с учетом соотношений (37) и (38) проводится аналогично доказательству теоремы 1, исходя из (7); это обоснование имеется в [10].

Факториальные моменты случайной величины $\xi_0(p)$ определяются равенствами [3, с. 126]

$$\mathbf{E}(\xi_0(p))_j = N(N-1)\cdots(N-j+1) \frac{f_n(N-j, p)}{f_n(N, p)} \quad (39)$$

($j = 0, 1, \dots, N$; $f_n(0, p) = 0$). Из (7) и (39) следует, что производящая функция распределения вероятностей для $\xi_0(p)$ равна

$$P_{\xi_0(p)}(u) = (f_n(N, p))^{-1} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(u + \sum_{k=1}^p z^k)^N}{z^{n+1}} dz. \quad (40)$$

Из (40) получаем

$$\mathbf{P}\{\xi_0(p) = m\} = (f_n(N, p))^{-1} \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint \frac{(g(z, u))^N}{z^{n+1} u^{m+1}} dz du, \quad (41)$$

$m = 0, 1, \dots, N$, где

$$g(z, u) = u + \sum_{k=1}^p z^k. \quad (42)$$

Положим

$$T_r(x) = \sum_{k=0}^r x^k \quad (x > 0; r = 0, 1, 2, \dots). \quad (43)$$

Теорема 8. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что выполнено условие (5); $p \geq 2$ и $m = \beta N \rightarrow \infty$ так, что справедливо (16). Тогда равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ и значений β , удовлетворяющих условию (16),

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi_0(p) = m\} &= \sqrt{\frac{\gamma_0 \sigma}{2\pi N \Delta_x}} \left(\frac{x_0}{x^*}\right)^n \\ &\times \gamma_0^N \beta^{-m} \left(\frac{T_p(x^*) - 1}{1 - \beta}\right)^{N-m} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right), \end{aligned} \quad (44)$$

где $x = x_0$ — единственный вещественный положительный корень уравнения (37), $x = x^*$ — единственный вещественный положительный корень уравнения $\sum_{k=1}^p (k - \alpha/(1 - \beta)) x^k = 0$,

$$\sigma = \sum_{k=1}^p k(k - \alpha) x_0^k > 0, \quad (45)$$

$$\Delta_x = \beta(1 - \beta)^2 \left(\frac{\sum_{k=1}^p k^2 (x^*)^k}{T_p(x^*) - 1} - \frac{\alpha^2}{(1 - \beta)^2} \right) > 0,$$

значения $\gamma_0, T_p(x^*)$ определяются согласно (38), (43).

Доказательство формулы (44) проводится аналогично обоснованию формулы (17) с учетом соотношений (41) и (42).

Теорема 9. Пусть при условиях теоремы 8 $\alpha_2/[1 - \gamma_0(\alpha_2)] < \gamma_1$. Тогда равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ и значений β , удовлетворяющих условию (16),

$$\mathbf{P}\{\xi_0(p) \geq m\} = \frac{\mathbf{P}\{\xi_0(p) = m\}}{1 - (1 - \beta)/[\beta(T_p(x^*) - 1)]} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right).$$

Если, в частности, при условиях теоремы 9 α и β — постоянные, то

$$0 < \lim_{m, n, N \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{\xi_0(p) = m\}}{\mathbf{P}\{\xi_0(p) \geq m\}} = 1 - \frac{1 - \beta}{\beta(T_p(x^*) - 1)} < 1.$$

Теорема 10. Пусть при условиях теоремы 8 $\gamma_2 < \alpha_1/[1 - \gamma_0(\alpha_1)]$. Тогда равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ и значений β , удовлетворяющих условию (16),

$$\mathbf{P}\{\xi_0(p) \leq m\} = \mathbf{P}\{\xi_0(p) = m\} \frac{1 - \beta}{1 - \beta T_p(x^*)} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right).$$

Если, в частности, при условиях теоремы 10 α и β — постоянные, то

$$0 < \lim_{m, n, N \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{\xi_0(p) = m\}}{\mathbf{P}\{\xi_0(p) \leq m\}} = \frac{1 - \beta T_p(x^*)}{1 - \beta} < 1.$$

Теоремы 9 и 10 доказываются аналогично теоремам 3 и 4.

Теорема 11. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что выполнено условие (5). Тогда равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$

$$\mathbf{E}\xi_0(p) = N\gamma_0 + O(1), \quad \mathbf{D}\xi_0(p) = N\sigma_1^2 + O(1),$$

где

$$\sigma_1^2 = \gamma_0 \left(1 - \gamma_0 - \frac{\alpha^2}{\sigma}\right) \quad (46)$$

и величины γ_0 и σ определяются из соотношений (38) и (45).

Теорема 11 доказывается, исходя из (36) и (39) с использованием того же метода, который применялся при доказательстве теоремы 5. Заметим, что при $p = 1$ $\sigma_1^2 = 0$, а при $p \geq 2$ $\sigma_1^2 > 0$, согласно неравенству Коши–Буняковского.

Теорема 12. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что выполнено условие (5). Тогда при $p \geq 2$ равномерно относительно $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ и целых положительных значений $m = \gamma_0 N + x\sqrt{N}$, для которых величина x заключена в любом фиксированном конечном промежутке,

$$\mathbf{P}\{\xi_0(p) = m\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N\sigma_1^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right),$$

где величины γ_0 и σ_1^2 определяются из соотношений (38) и (46).

При доказательстве теоремы 12 применяется тот же метод, с использованием которого устанавливалось равенство (30). При этом предполагается, что соответствующие случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_N, \dots$ имеют усеченное геометрическое распределение с параметром x_0 , т.е.

$$P\{\xi_i = k\} = \frac{x_0^k}{T_p(x_0)} \quad (k = 0, 1, \dots, p, i = 1, 2, \dots, N, \dots).$$

Заметим, что теоремы 11 и 12 сформулированы в [11].

Следствие 2. При условиях теоремы 12 случайная величина $[\xi_0(p) - \gamma_0 N] / \sqrt{N \sigma_1^2}$ распределена в пределе по стандартному нормальному закону.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1967, 752 с.
2. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Случайные размещения. М.: Наука, 1976, 223 с.
3. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М.: ИЛ, 1963, 287 с.
4. Тимашев А. Н. Многомерные локальные теоремы о больших уклонениях в равновероятной схеме размещения. — Дискретн. матем., 1990, т. 2, в. 2, с. 145–149.
5. Тимашев А. Н. Многомерная интегральная теорема о больших уклонениях в равновероятной схеме размещения. — Дискретн. матем., 1992, т. 4, в. 4, с. 74–81.
6. Трунов А. Н. Предельные теоремы в задаче о размещении одинаковых частиц по различным ячейкам. — Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1986, т. 177, с. 147–166.
7. Тимашев А. Н. Теоремы о больших уклонениях в схеме размещения одинаковых частиц по различным ячейкам. — Дискретн. матем., 1993, т. 5, в. 4, с. 29–42.
8. Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977.
9. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978.
10. Тимашев А. Н. Пуассоновское предельное распределение числа пустых ячеек в обобщенной равновероятной схеме размещения частиц комплектами. — Дискретн. матем., 1995, т. 7, в. 2, с. 140–145.
11. Тимашев А. Н. Локальная нормальная теорема в схеме размещений одинаковых частиц по различным ячейкам при ограниченных объемах ячеек. — Обзорение прикл. промышл. матем., 1997, т. 4, в. 3, с. 411–412.
12. Holst L. On numbers related to partition of unlike objects and occupancy problems. — European J. Combin., 1981, v. 2, p. 231–237.

Поступила в редакцию
29.XII.1997

Исправленный вариант
2.XII.1998