Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Габриелян, Об автоморфно устойчивых распределениях на абелевых группах, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, том 45, выпуск 3, 584–589

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp487>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:24:36

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2000 г.

ГАБРИЕЛЯН С. С.*

ОБ АВТОМОРФНО УСТОЙЧИВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ
НА АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

На локально компактной абелевой группе X рассматриваются G — автоморфно устойчивые распределения, где G — подгруппа группы $\text{Aut}(X)$. Показано, что если μ G -автоморфно устойчиво, то 1) μ либо абсолютно непрерывно, либо сингулярно, либо дискретно относительно меры Хаара группы X ; 2) если μ дискретно, то μ — сдвиг распределения Хаара конечной G -характеристической подгруппы группы X ; 3) если G состоит из элементов конечного порядка, то μ — сдвиг распределения Хаара компактной G -автоморфно устойчивой подгруппы группы X .

Ключевые слова и фразы: G -автоморфно устойчивые распределения и подгруппы, G -характеристическая подгруппа, распределение Хаара.

Пусть X — локально компактная абелева группа, Y — группа ее характеров, (x, y) — значение характера $y \in Y$ на элементах $x \in X$. Под распределением μ на X будем понимать неотрицательную борелевскую меру такую, что $\mu(X) = 1$. Свертка $\mu * \nu$ двух распределений μ и ν , характеристическая функция $\hat{\mu}$ распределения μ и распределение $\bar{\mu}$ определяются обычным образом:

$$(\mu * \nu)(E) = \int_X \mu(E - x) d\nu(x), \quad \hat{\mu}(y) = \int_X (x, y) d\mu(x), \quad \bar{\mu}(E) = \mu(-E).$$

Распределение, сосредоточенное в точке $x \in X$, обозначим через E_x , через m_K обозначим распределение Хаара компактной подгруппы K группы X .

Рассмотрим группы X_1 и X_2 с группами характеров Y_1 и Y_2 . Пусть $p: X_1 \rightarrow X_2$ — непрерывный гомоморфизм. Для каждого $y_2 \in Y_2$ определим отображение $\tilde{p}: Y_2 \rightarrow Y_1$ формулой $\tilde{p}(y_2) = y_2 \circ p$, т.е. $(p(x_1), y_2) = (x_1, \tilde{p}(y_2))$ для любых $x_1 \in X_1$, $y_2 \in Y_2$. Отображение $\tilde{p}$ — непрерывный гомоморфизм. Он называется сопряженным к p [1, с. 497]. Пусть μ — распределение на X_1 , через $p(\mu)$ обозначим распределение на X_2 , определенное формулой $p(\mu)(E) = \mu(p^{-1}(E))$, где E — борелевское множество в X_2 . Тогда $\hat{p}(\mu)(y_2) = \hat{\mu}(\tilde{p}(y_2))$, $y_2 \in Y_2$ [2]. В частности, если p — автоморфизм группы X , т.е. $p \in \text{Aut}(X)$, то $\tilde{p} \in \text{Aut}(Y)$ [1, с. 498] и $\hat{p}(\mu)(y) = \hat{\mu}(\tilde{p}(y))$.

Если L — подмножество Y , то через $A(X, L)$ обозначим аннулятор L .

Пусть G — некоторая подгруппа группы $\text{Aut}(X)$. Обозначим через G^* множество всех сопряженных автоморфизмов $\tilde{p}$, где $p \in G$. Легко видеть, что G^* — подгруппа группы $\text{Aut}(Y)$ ($p_1 \circ p_2$ соответствует $\tilde{p}_2 \circ \tilde{p}_1$), причем если G конечно порождена, то и G^* конечно порождена. Подгруппа L группы X называется характеристической подгруппой для G или G -характеристической подгруппой, если $p(L) = L$ для любого $p \in G$.

О п р е д е л е н и е. Пусть G — подгруппа группы $\text{Aut}(X)$. Распределение μ назовем G -автоморфно устойчивым на группе X , если для любых $A, B \in G$ существуют $C \in G$ и $x_0 \in X$ такие, что

$$A(\mu) * B(\mu) = E_{x_0} * C(\mu), \quad (1)$$

* Харьковский государственный политехнический университет, ул. Фрунзе, 21, 61002 Харьков, Украина; e-mail: gabr@kpi.kharkov.ua

или, в терминах характеристических функций: для любых $\alpha, \beta \in G^*$ существуют $\gamma \in G^*$ и $x_0 \in X$ такие, что

$$\hat{\mu}(\alpha(y)) \cdot \hat{\mu}(\beta(y)) = (x_0, y) \cdot \hat{\mu}(\gamma(y)). \quad (2)$$

По индукции из (1) и (2) легко следует: если $A_1, \dots, A_s \in G$, то существуют $x_0 \in X$ и $A_0 \in G$ такие, что

$$A_1(\mu) * A_2(\mu) * \dots * A_s(\mu) = E_{x_0} * A_0(\mu), \quad (3)$$

или, в терминах сопряженных автоморфизмов,

$$\hat{\mu}(\alpha_1(y)) \cdot \hat{\mu}(\alpha_2(y)) \cdot \dots \cdot \hat{\mu}(\alpha_s(y)) = (x_0, y) \cdot \hat{\mu}(\alpha_0(y)). \quad (4)$$

Обозначим через $AS(G)$ множество всех G -автоморфно устойчивых распределений на группе X . Очевидно, что если $\mu \in AS(G)$, то μ безгранично делимо и распределения $E_x * \mu$, $\forall x \in X$, $\bar{\mu}$ и $\mu * \bar{\mu}$ также принадлежат $AS(G)$. В случае, когда $X = \mathbf{R}$, а $G = Aut(\mathbf{R})$, мы получим классическое определение устойчивых распределений на числовой прямой. При этом $AS(G)$ не является полугруппой.

Общее определение было введено в работе [3]. Там же показано, что если $G = GL(n, \mathbf{R})$, то $AS(G)$ состоит из гауссовских распределений в $\mathbf{R}^n$, а если $G = SL(n, \mathbf{R})$, то $AS(G)$ состоит только из вырожденных распределений. Ниже мы установим аналогичный результат для произвольной подгруппы G ортогональной группы $O(n)$.

О п р е д е л е н и е. Пусть X — произвольная группа, G — подгруппа группы $Aut(X)$. Подгруппу L группы X назовем G -автоморфно устойчивой, если выполнено условие

$$\forall \alpha, \beta \in G \exists \gamma \in G: \alpha(L) \cap \beta(L) = \gamma(L). \quad (5)$$

Множество G -автоморфно устойчивых подгрупп обозначим через $ASG(G)$.

Ниже приводятся примеры, выясняющие связь между G -автоморфно устойчивыми и G -характеристическими подгруппами группы X . Доказательства приведены только для примеров 4 и 5, так как только они понадобятся нам в дальнейшем.

П р и м е р ы. 1. Если L — характеристическая подгруппа для G , то $L \in ASG(G)$.

2. Пусть $X = \mathbf{Q}$, $L = \mathbf{Z}$ и $G = Aut(\mathbf{Q})$. Тогда $L \in ASG(G)$, но L не является характеристической подгруппой для G .

3. Пусть G — циклическая группа, порождаемая автоморфизмом α , тогда $ASG(G)$ состоит из характеристических подгрупп и из подгрупп таких, что $\alpha^k(L)$ образуют строго монотонное семейство, т.е. либо $\alpha^{k+1}(L) \subsetneq \alpha^k(L)$, $\forall k \in \mathbf{Z}$, либо $\alpha^{k+1}(L) \supsetneq \alpha^k(L)$, $\forall k \in \mathbf{Z}$.

4. Пусть G — конечная подгруппа группы $Aut(X)$, тогда $ASG(G)$ состоит из характеристических подгрупп.

Действительно, если $\{\alpha_i\}_{i=0}^n = G$, то существует индекс i_0 такой, что

$$\alpha_0(L) \cap \alpha_1(L) \cap \dots \cap \alpha_n(L) = \alpha_{i_0}(L) \quad \text{или} \quad \alpha_{i_0}^{-1} \alpha_0(L) \cap \dots \cap \alpha_{i_0}^{-1} \alpha_n(L) = L.$$

Но $\alpha_{i_0}^{-1} G = G$, поэтому для любого $\alpha \in G$ имеем $\alpha(L) \supset L$, и это верно, в частности, для α^{-1} , т.е. $\alpha^{-1}(L) \supset L$. Поэтому $\alpha(L) = L$.

5. Если подгруппа L является характеристической для G^* , то ее аннулятор $A(X, L)$ является характеристической подгруппой для G .

Действительно, пусть $\gamma(L) = L$. Если $x \in C(A(X, L))$ и $h \in A(X, L)$ таков, что $C(h) = x$, то при $y \in L$ имеем:

$$(x, y) = (C(h), y) = (h, \gamma(y)) = 1,$$

т.е. $x \in A(X, L)$ и $C(A(X, L)) \subset A(X, L)$. Так как это рассуждение можно провести и для автоморфизма γ^{-1} , то $C^{-1}(A(X, L)) \subset A(X, L)$, или $A(X, L) \subset C(A(X, L))$. Значит, $C(A(X, L)) = A(X, L)$.

Лемма 1. 1) Если $\mu \in AS(G)$, то множество $E = \{y: \hat{\mu}(y) \neq 0\}$ есть открытая G^* -автоморфно устойчивая подгруппа группы Y .

2) $t_K \in AS(G)$, если и только если $A(K, Y) \in ASG(G^*)$.

3) Если $\mu \in AS(G)$ и $|\hat{\mu}(y)|$ принимает лишь два значения 0 и 1, то $\mu = E_x * t_K$, где $t_K \in AS(G)$.

Доказательство. 1) Так как μ безгранично делимо, то E — открытая подгруппа группы Y [4]. Покажем, что $E \in ASG(G^*)$. По определению для любых $\alpha, \beta \in G^*$ существуют $\gamma \in G^*$ и $x_0 \in X$ такие, что

$$\hat{\mu}(\alpha^{-1}(y)) \cdot \hat{\mu}(\beta^{-1}(y)) = (x_0, y) \cdot \hat{\mu}(\gamma^{-1}(y)). \quad (6)$$

Если $y \in \alpha(E) \cap \beta(E)$, то $\alpha^{-1}(y) \in E$ и $\beta^{-1}(y) \in E$, поэтому левая часть (6) не равна нулю. Значит, $\hat{\mu}(\gamma^{-1}(y)) \neq 0$ и $\gamma^{-1}(y) \in E$, т.е. $y \in \gamma(E)$. Следовательно, $\alpha(E) \cap \beta(E) \subset \gamma(E)$. Обратно, если $y \in \gamma(E)$, то $\gamma^{-1}(y) \in E$ и, по (6), $\alpha^{-1}(y), \beta^{-1}(y) \in E$, или $y \in \alpha(E) \cap \beta(E)$. Поэтому $\alpha(E) \cap \beta(E) = \gamma(E)$.

2) Прежде всего, отметим, что $\hat{m}_K(y) = 1$, если $y \in A(K, Y)$, и $\hat{m}_K(y) = 0$, если $y \in Y \setminus A(K, Y)$. Поэтому $E = A(K, Y)$ и, согласно п. 1, если $m_K \in AS(G)$, то $A(K, Y) \in ASG(G^*)$.

Обратно. Пусть $\alpha, \beta \in G^*$. Тогда существует $\gamma \in G^*$ такой, что

$$\alpha^{-1}(A(K, Y)) \cap \beta^{-1}(A(K, Y)) = \gamma^{-1}(A(K, Y)). \quad (7)$$

Если $y \notin \gamma^{-1}(A(K, Y))$, т.е. $\gamma(y) \notin A(K, Y)$, то y не принадлежит, скажем, $\alpha^{-1}(A(K, Y))$, т.е. $\alpha(y) \notin A(K, Y)$, поэтому равенство

$$\hat{m}_K(\alpha(y)) \cdot \hat{m}_K(\beta(y)) = \hat{m}_K(\gamma(y)) \quad (8)$$

выполнено. Если $y \in \gamma^{-1}(A(K, Y))$, то, по (7), $\alpha(y), \beta(y), \gamma(y) \in A(K, Y)$ и равенство (8) также выполнено. Поэтому $m_K \in AS(G)$.

3) Распределение $\nu = \mu * \bar{\mu} \in AS(G)$. Тогда $E = \{y: \hat{\nu}(y) = 1\}$. Поэтому ν можно рассматривать как меру на $A(E, X)$, и при этом $\hat{\nu}([y]) \neq 0$, если и только если $[y] = 0$, где $[y] \in A(E, X)^*$ [5, с. 14]. Следовательно, $\nu = m_{A(E, X)}$, где $K = A(E, X)$ — компактная подгруппа [1, с. 470], т.е. $\nu = m_K \in AS(G)$. Рассмотрим ограничение $\hat{\mu}(y)|_E = f(y)$. По условию $f(y)$ — непрерывная положительно определенная на E функция такая, что $|f(y)| \equiv 1$. Поэтому $f(y) = ([x], y)$, где $[x] \in X/A(E, X)$, $y \in E$ [6]. Так как E — открытая подгруппа, то существует $x_0 \in X$ такой, что $(x_0, y)|_E = ([x], y)$ [1, с. 480]. Следовательно, $\hat{\mu}(y) = (x_0, y) \cdot \hat{m}_K(y)$, $y \in Y$, или $\mu = E_{x_0} * m_K$. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 1. Для того чтобы доказать, что $AS(G)$ состоит только из сдвигов распределений Хаара компактных подгрупп, из п. 3 леммы 1 следует, что достаточно показать следующее: если $\mu \in AS(G)$ и $\hat{\mu}(y) \geq 0, \forall y \in Y$, то $\hat{\mu}(y)$ принимает лишь два значения: 0 и 1.

Следующие предположение, справедливое и для неабелевых локально компактных групп, полностью выясняют структуру автоморфно устойчивых распределений.

Предложение 1. Пусть X — не дискретная группа и $\mu \in AS(G)$. Тогда μ либо абсолютно непрерывно, либо сингулярно, либо дискретно.

Доказательство. Заметим сначала, что если $\tau \in \text{Aut}(X)$, то $\tau(m_X) = c \cdot m_X$ [1, с. 268]. Поэтому если μ — либо абсолютно непрерывна, либо сингулярна, либо дискретна, то таковой же будет и $\tau(\mu)$.

Далее, пусть $\mu = \alpha_1 \mu_a + \alpha_2 \mu_s + \alpha_3 \mu_d$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, $\alpha_i \geq 0$, — разложение Лебега распределения μ . Полагая в (1) $A = B = E$, получим $\mu * \mu = E_{x_0} * C(\mu)$, или

$$\begin{aligned} & [\alpha_1 \mu_a * \mu + (\alpha_2 \mu_1 + \alpha_3 \mu_d) * \alpha_1 \mu_a] + [\alpha_2 \mu_s * (\alpha_2 \mu_s + \alpha_3 \mu_d) + \alpha_3 \mu_d * \alpha_2 \mu_s] \\ & + \alpha_3 \mu_d * \alpha_3 \mu_d = E_{x_0} * \alpha_1 C(\mu_a) + E_{x_0} * \alpha_2 C(\mu_s) + E_{x_0} * \alpha_3 C(\mu_d), \end{aligned}$$

откуда

$$\alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3) \cdot \alpha_1 \leq \alpha_1 \quad \text{и} \quad \alpha_3^2 = \alpha_3.$$

Поэтому если $\alpha_3 = 1$, то $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ и μ — дискретна. Если $\alpha_3 = 0$, то из первого неравенства получаем $\alpha_2 \cdot \alpha_1 \leq 0$, т.е. либо $\alpha_2 = 0, \alpha_1 = 1$ и μ абсолютно непрерывна, либо $\alpha_2 = 1, \alpha_1 = 0$ и μ сингулярна.

Теорема, доказываемая ниже, полностью описывает все дискретные G -автоморфно устойчивые распределения на группе X .

Теорема 1. Если распределение $\mu \in AS(G)$ — дискретное, то μ является сдвигом распределения Хаара конечной G -характеристической подгруппы группы X .

Доказательство. Согласно замечанию 1, можно считать, что $\hat{\mu}(y) \geq 0, \forall y \in Y$. Обозначим через $\sigma(\mu) = \{x \in X: \mu(\{x\}) > 0\}$. Тогда $\sigma(\mu) = \{x_i\}$ — симметричное множество и $0 \in \sigma(\mu)$. Доказательство разобьем на четыре этапа.

1) Так как для любого n существует C_n такое, что $\mu^{*n} = C_n(\mu)$, то, если $\mu = \sum a_i E_{x_i}$, мы имеем

$$\sum a_i E_{C_n(x_i)} = \left(\sum a_i E_{x_i} \right)^{*n} = \sum \sum \cdots \sum a_{i_1} \cdots a_{i_n} E_{x_{i_1} + \cdots + x_{i_n}}.$$

Отсюда следует, что $\sigma(\mu) + \cdots + \sigma(\mu) = (n)\sigma(\mu) = C_n(\sigma(\mu))$. Обозначим через L не более чем счетную подгруппу в X , порожденную $\sigma(\mu)$. Тогда

$$\begin{aligned} (n^2)\sigma(\mu) &= (n)\sigma(\mu) + \cdots + (n)\sigma(\mu) = C_n(\sigma(\mu)) + \cdots + C_n(\sigma(\mu)) \\ &= C_n(\sigma(\mu) + \cdots + \sigma(\mu)) = C_n((n)\sigma(\mu)), \\ (n^{k+1})\sigma(\mu) &= (n^k)\sigma(\mu) + \cdots + (n^k)\sigma(\mu) \\ &= C_n((n^{k-1})\sigma(\mu)) + \cdots + C_n((n^{k-1})\sigma(\mu)) = C_n((n^k)\sigma(\mu)), \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$C_n(L) = C_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (n^k)\sigma(\mu)\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_n((n^k)\sigma(\mu)) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (n^{k+1})\sigma(\mu) = L.$$

Значит, подгруппа L является характеристической для автоморфизмов $C_n, n \geq 2$. Пусть G_0 — подгруппа группы G , состоящая из всех автоморфизмов $C \in G$, для которых подгруппа L характеристическая.

2) Покажем, что $\mu \in AS(G_0)$. Действительно, пусть $A, B \in G_0$, тогда существует $C \in G$ такой, что $\hat{\mu}(A^*(y)) \cdot \hat{\mu}(B^*(y)) = \hat{\mu}(C^*(y))$. В частности, мера $C(\mu)$ сосредоточена на $C(\sigma(\mu)) \subset C(L)$. С другой стороны, $C(\sigma(\mu)) = A(\sigma(\mu)) + B(\sigma(\mu))$. Откуда $C(L) = A(L) + B(L) = L + L = L$. Поэтому $C \in G_0$.

3) Введем на группе L дискретную топологию. Тогда G_0 можно рассматривать как подгруппу $Aut(L)$. Значит, μ можно рассматривать как G_0 -автоморфно устойчивое распределение на счетной группе L . В силу дискретности L L^* — компактна и по лемме 1 $\hat{\mu}(y) \neq 0$ на открытой компактной подгруппе $Y_1 \subset L^*$. По теореме Вейерштрасса существует $y_0 \in Y_1$ такой, что $\hat{\mu}(y_0) = \inf\{\hat{\mu}(y), y \in Y_1\} > 0$. В силу устойчивости существует $C \in G_0$ такой, что

$$\hat{\mu}(y) \cdot \hat{\mu}(y) = \hat{\mu}(C(y)).$$

Это равенство при $y = y_0$ может иметь место лишь в случае $\hat{\mu}(y_0) = 1$, т.е. μ — распределение Хаара некоторой подгруппы группы L . Но так как μ конечна, а группа L порождается $\sigma(\mu)$, то $L = \sigma(\mu)$ — конечная группа.

4) Покажем, что подгруппа L — характеристическая для G . Пусть $A \in G$, тогда существует $B \in G$ такой, что $A(\mu) * \mu = B(\mu)$. Поэтому $A(L) + L = B(L)$. Если $A(L) \setminus L \neq \emptyset$, то множество $A(L) + L$ имеет большее число элементов, чем L , тогда как $B(L)$ равно L по числу элементов. Поэтому $A(L) \subset L$, но так как A — автоморфизм, то $A(L) = L$. Теорема доказана.

Следствие. Если группа X конечна, то распределение μ принадлежит $AS(G)$, если и только если μ является сдвигом распределения Хаара характеристической для G подгруппы группы X .

Следующие группы определены в [3]. Пусть $\mu \in AS(G)$ такое, что $\hat{\mu}(y) \geq 0, \forall y \in Y$. Обозначим через $G_o^*(\mu)$ множество таких $h \in G^*$, что существует $r \in \mathbb{Q}$ такое, что $[\hat{\mu}(y)]^r = \hat{\mu}(h(y))$. Положим

$$G_{oo}^*(\mu) = \{h \in G^*: \hat{\mu}(y) = \hat{\mu}(h(y)), y \in Y\}.$$

Очевидно, что $G_o^*(\mu)$ и $G_{oo}^*(\mu)$ — подгруппы группы G^* и $G_o^*(\mu) \subset G_{oo}^*(\mu)$. Более того, $\mu \in AS(G_o(\mu))$. Действительно, пусть $h_1, h_2 \in G_o^*(\mu)$, тогда существует $h \in G^*$ такой, что $\hat{\mu}(h_1(y)) \cdot \hat{\mu}(h_2(y)) = \hat{\mu}(h(y))$. Откуда $\hat{\mu}(h(y)) = [\hat{\mu}(y)]^{r_1+r_2}$ и $h \in G_o^*(\mu)$.

Лемма 2. Пусть $G_o^*(\mu)$ удовлетворяет одному из условий: 1) $G_o^*(\mu)$ конечно порождена; 2) в $G_o^*(\mu) \setminus G_{oo}^*(\mu)$ существует элемент h_o конечного порядка.

Тогда $\mu = m_K$, где K компактна и $A(K, Y) \in ASG(G^*)$.

Доказательство. 1) Пусть $G_o^*(\mu)$ порождается элементами $h_1, \dots, h_n$, которым соответствуют рациональные числа $r_1, \dots, r_n$, т.е. $\hat{\mu}(h_i(y)) = [\hat{\mu}(y)]^{r_i}$. Пусть простое число p не является делителем числителей и знаменателей несократимых дробей $r_1, \dots, r_n$, а автоморфизм h таков, что $\hat{\mu}(h(y)) = [\hat{\mu}(y)]^p$. Имеем: $h = h_{i_1} \dots h_{i_m}$ и

$$[\hat{\mu}(y)]^p = \hat{\mu}(h(y)) = \hat{\mu}(h_{i_1} \dots h_{i_m}(y)) = [\hat{\mu}(y)]^{r_{i_1} \dots r_{i_m}}.$$

Это равенство в силу выбора p возможно тогда и только тогда, когда $\hat{\mu}(y)$ равно либо 0, либо 1 для всех $y \in Y$. По лемме 1 $\mu = m_K$, где $A(K, Y) \in ASG(G^*)$.

Аналогично рассматривается и второй случай.

2) По условию h_o соответствует отличное от единицы рациональное число r_o . Пусть порядок h_o есть n . Тогда $\hat{\mu}(y) = \hat{\mu}(h_o^n(y)) = [\hat{\mu}(y)]^{r_o^n}$, что возможно лишь в случае, когда $\hat{\mu}(y)$ равно либо 0, либо 1. Учитывая лемму 1, лемма 2 доказана.

В качестве следствия получаем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть группа G состоит из элементов конечного порядка. Тогда любое G -устойчивое распределение является сдвигом распределения Хаара компактной подгруппы группы X . В частности, если G конечна и $\mu \in AS(G)$, то $\mu = E_x * m_K$, где K является G -характеристической компактной подгруппой группы X .

Доказательство. Пусть $\mu \in AS(G)$ и $\hat{\mu}(y) \geq 0, \forall y \in Y$. Так как G^* также состоит из элементов конечного порядка, то и $G_o^*(\mu)$ состоит из элементов конечного порядка. Если $G_o^*(\mu) \setminus G_{oo}^*(\mu) \neq \emptyset$, то теорема вытекает из леммы 2. В противном случае $G_o^*(\mu) = G_{oo}^*(\mu)$, и, значит, для любого $h \in G_o^*(\mu)$ имеем $\hat{\mu}(h(y)) = \hat{\mu}(y)$. Тогда существует $h \in G_o^*$ такой, что

$$[\hat{\mu}(y)]^2 = \hat{\mu}(h(y)) = \hat{\mu}(y),$$

откуда следует, что $\hat{\mu}(y)$ равно либо нулю, либо единице. Поэтому по лемме 1.3) (или по замечанию 1) $\mu = E_x * m_K$.

Если G конечна, то и G^* конечна. Поэтому по лемме 1 $E = \{y: \hat{\mu}(y) \neq 0\}$ является G^* -автоморфно устойчивой. По примеру 4 E является G^* -характеристической, а по примеру 5 $K = A(E, X)$ — характеристическая для G компактная подгруппа группы X . Теорема доказана.

В заключение мы дополним исследования работы [3] об описании G -устойчивых распределений для $X = \mathbf{R}^n$ следующим утверждением.

Предложение 2. Пусть $X = \mathbf{R}^n$ и G — произвольная подгруппа ортогональной группы $O(n)$. Тогда $AS(G)$ состоит только из вырожденных распределений.

Доказательство. Пусть $\mu \in AS(G)$ и $\hat{\mu}(y) \geq 0, \forall y \in Y$. Достаточно показать, что $\hat{\mu}(y) \equiv 1, \forall y \in Y$. Положим $a = \min\{\hat{\mu}(y), \|y\| = 1\}$. Так как сопряженный к $C \in G$ автоморфизм γ также принадлежит $O(n)$, то $\|\gamma(y)\| = 1$ при $\|y\| = 1$. Полагая в (2) $\alpha = \beta = E$, получим

$$[\hat{\mu}(y)]^2 = \hat{\mu}(\gamma(y)). \quad (9)$$

Пусть y_o такой, что $\|y_o\| = 1$ и $\hat{\mu}(y_o) = a$, тогда $\hat{\mu}(\gamma(y_o)) \geq a$. Полагая в равенстве (9) $y = y_o$, получим

$$a \leq \hat{\mu}(\gamma(y_o)) = [\hat{\mu}(y_o)]^2 = a^2.$$

Поэтому либо $a = 1$, либо $a = 0$. Так как μ безгранично делимо, то $a = 1$. Следовательно, $\hat{\mu}(y) = 1$ на единичной окружности. Пусть $n > 1$. Так как подгруппа $L = \{y: \hat{\mu}(y) = 1\}$ содержит подгруппу порожденную единичными векторами, то, очевидно, $L = \mathbf{R}^n$. Значит, $\hat{\mu}(y) \equiv 1$.

Если $n = 1$, то $O(1) = \{E, -E\}$. Поэтому $\hat{\mu}(y)$ удовлетворяет уравнению $[\hat{\mu}(y)]^2 = \hat{\mu}(y)$. Откуда снова $\hat{\mu}(y) \equiv 1$. Предложение доказано.

Автор благодарит Г. М. Фельдмана за постановку задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. М.: Наука, 1975, 656 с.
2. Бурбаки Н. Спектральная теория. М.: Мир, 1972, 184 с.
3. Parthasarathy K. R., Schmidt K. Stable positive definite functions. — Trans. Amer. Math. Soc., 1975, v. 203, p. 161–174.
4. Пармасарати К. Р., Ранга Рао Р., Вараджан С. Р. С. Распределение вероятностей на локально компактных абелевых группах. — Математика, 1965, т. 9, № 2, с. 113–146.
5. Фельдман Г. М. Арифметика вероятностных распределений и характеристизационные задачи на абелевых группах. Киев: Наукова думка, 1990, 168 с.
6. Гренандер У. Вероятности на алгебраических структурах. М.: Мир, 1965, 276 с.

Поступила в редакцию
1.IV.1999

© 2000 г.

ПЕЧИНКИН А. В.*

СИСТЕМА $MAP/G/1/\infty$ С ДИСЦИПЛИНОЙ SRPT

Для системы $MAP/G/1/\infty$ с марковским входящим потоком требований, произвольным распределением длины требования и дисциплиной обслуживания наикратчайшего требования с прерыванием обслуживания (SRPT) найдено совместное распределение основных характеристик обслуживания.

Ключевые слова и фразы: теория массового обслуживания, дисциплина обслуживания, марковский входящий поток.

1. Постановка задачи. Рассмотрим однолинейную систему массового обслуживания с ожиданием и временем обслуживания (далее будем говорить длиной) каждого требования, имеющим непрерывную функцию распределения $B(x)$ (несоблюдение этого условия приводит к тому, что нужно задать дисциплину выбора на обслуживание требований одинаковой длины). Для упрощения выкладок будем предполагать существование у распределения $B(x)$ непрерывной плотности $b(x) = B'(x)$.

Входящий в систему поток требований является марковским (MAP, см., например, [1]) и описывается следующим образом. Имеется неприводимый марковский процесс с конечным множеством состояний $\{1, \dots, I\}$ и непрерывным временем, который назовем управляющим процессом. Предположим, что управляющий процесс находится в состоянии i , $i = \overline{1, I}$. Тогда за «малое» время Δ с вероятностью $\mu_{ij}\Delta + o(\Delta)$ управляющий процесс переходит в состояние j , $j = \overline{1, I}$, $j \neq i$, причем с системой обслуживания ничего не происходит. Кроме того, за то же время Δ управляющий процесс может перейти в состояние j , $j = \overline{1, I}$, с вероятностью $\lambda_{ij}\Delta + o(\Delta)$, но в отличие от предыдущего случая такой переход влечет за собой поступление требования в систему. Матрицу, состоящую из элементов λ_{ij} , будем обозначать через Λ , а матрицу из элементов μ_{ij} — через M . Инфинитезимальная матрица Λ^* управляющего процесса имеет вид $\Lambda^* = \Lambda + M$.

Дисциплина обслуживания наикратчайшего требования с прерыванием обслуживания (SRPT) описывается следующим образом. Предположим, что в момент поступления в систему каждого требования становится известной его длина. В любой момент времени обслуживается то из находящихся в системе требований, (остаточная)

* Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, 2-я Бауманская ул., 5, 107005 Москва, Россия.