Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Печинкин, Система $MAP/G/1/\infty$ с дисциплиной SQRT, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, том 45, выпуск 3, 589–595

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp488>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 16:48:09

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. М.: Наука, 1975, 656 с.
2. Бурбаки Н. Спектральная теория. М.: Мир, 1972, 184 с.
3. Parthasarathy K. R., Schmidt K. Stable positive definite functions. — Trans. Amer. Math. Soc., 1975, v. 203, p. 161–174.
4. Пармасарати К. Р., Ранга Рао Р., Вараджан С. Р. С. Распределение вероятностей на локально компактных абелевых группах. — Математика, 1965, т. 9, № 2, с. 113–146.
5. Фельдман Г. М. Арифметика вероятностных распределений и характеристические задачи на абелевых группах. Киев: Наукова думка, 1990, 168 с.
6. Гренандер У. Вероятности на алгебраических структурах. М.: Мир, 1965, 276 с.

Поступила в редакцию
1.IV.1999

© 2000 г.

ПЕЧИНКИН А. В.*

СИСТЕМА $MAP/G/1/\infty$ С ДИСЦИПЛИНОЙ SRPT

Для системы $MAP/G/1/\infty$ с марковским входящим потоком требований, произвольным распределением длины требования и дисциплиной обслуживания наикратчайшего требования с прерыванием обслуживания (SRPT) найдено совместное распределение основных характеристик обслуживания.

Ключевые слова и фразы: теория массового обслуживания, дисциплина обслуживания, марковский входящий поток.

1. Постановка задачи. Рассмотрим однолинейную систему массового обслуживания с ожиданием и временем обслуживания (далее будем говорить длиной) каждого требования, имеющим непрерывную функцию распределения $B(x)$ (несоблюдение этого условия приводит к тому, что нужно задать дисциплину выбора на обслуживание требований одинаковой длины). Для упрощения выкладок будем предполагать существование у распределения $B(x)$ непрерывной плотности $b(x) = B'(x)$.

Входящий в систему поток требований является марковским (MAP, см., например, [1]) и описывается следующим образом. Имеется неприводимый марковский процесс с конечным множеством состояний $\{1, \dots, I\}$ и непрерывным временем, который назовем управляющим процессом. Предположим, что управляющий процесс находится в состоянии i , $i = \overline{1, I}$. Тогда за «малое» время Δ с вероятностью $\mu_{ij}\Delta + o(\Delta)$ управляющий процесс переходит в состояние j , $j = \overline{1, I}$, $j \neq i$, причем с системой обслуживания ничего не происходит. Кроме того, за то же время Δ управляющий процесс может перейти в состояние j , $j = \overline{1, I}$, с вероятностью $\lambda_{ij}\Delta + o(\Delta)$, но в отличие от предыдущего случая такой переход влечет за собой поступление требования в систему. Матрицу, состоящую из элементов λ_{ij} , будем обозначать через Λ , а матрицу из элементов μ_{ij} — через M . Инфинитезимальная матрица Λ^* управляющего процесса имеет вид $\Lambda^* = \Lambda + M$.

Дисциплина обслуживания наикратчайшего требования с прерыванием обслуживания (SRPT) описывается следующим образом. Предположим, что в момент поступления в систему каждого требования становится известной его длина. В любой момент времени обслуживается то из находящихся в системе требований, (остаточная)

* Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, 2-я Бауманская ул., 5, 107005 Москва, Россия.

длина которого минимальна. В частности, если в момент поступления некоторого требования в систему окажется, что его длина меньше (остаточной) длины требования, находящегося на приборе, то оно прерывает обслуживание и само становится на прибор. Требования с прерванным обслуживанием дообслуживаются.

Система $M/G/1/\infty$ с дисциплиной SRPT исследовалась в работах [2]–[10]. В настоящей статье результаты работы [9] обобщаются на систему с марковским входящим потоком.

Обозначим через π_i стационарные вероятности состояний управляющего процесса, а через $\lambda = \sum_{i,j=1}^I \pi_i \lambda_{ij}(k)$ — суммарную интенсивность входящего потока требований в стационарном режиме функционирования системы. Всюду в дальнейшем там, где говорится о стационарных распределениях, будем предполагать, что для рассматриваемой системы выполнено условие существования стационарного режима $\rho < 1$, где $\rho = \lambda \bar{b}$ — загрузка системы, а $\bar{b} = \int_0^\infty [1 - B(x)] dx$ — средняя длина требования.

Прежде чем переходить к дальнейшему изложению, примем следующие соглашения. Будем обозначать скалярные величины наклонными буквами, векторные величины — строчными прямыми буквами и матрицы — заглавными прямыми буквами. При этом всегда компоненты вектора будут нумероваться индексами i , $i = \overline{1, I}$, означающими номер состояния, в котором находится управляющий процесс. Аналогично, элементы матрицы будут нумероваться индексами i, j , $i = \overline{1, I}$, $j = \overline{1, I}$, причем первый индекс означает номер состояния, в котором управляющий процесс находился в начальный момент времени, а второй — в конечный момент. Кроме того, через $z = z(x)$ и $z_i = z_i(x)$, $0 \leq z, z_i \leq 1$, будем обозначать измеримые функции аргумента x , $x \geq 0$, имеющие смысл аргумента обобщенной производящей функции (ПФ) числа обслуженных или числа находящихся в системе требований длины x (см., например, [1]).

2. Периоды занятости системы. Предположим сначала, что в момент 0 в свободную систему поступает требование длины меньше x . Обозначим через τ_x первый момент, в который система полностью освободится от требований длины меньше x , через μ — число требований, обслуженных за время τ_x , через $\xi_1, \dots, \xi_\mu$ — их длины, через ν — число требований, находящихся в системе в момент τ_x , через $\eta_1, \dots, \eta_\nu$ — их длины. Положим

$$\Gamma_x(z_1, z_2, s) = E z_1(\xi_1) \cdots z_1(\xi_\mu) z_2(\eta_1) \cdots z_2(\eta_\nu) e^{-s\tau_x}.$$

Функция $\Gamma_x(z_1, z_2, s)$ представляет собой тройное преобразование совместного распределения следующих величин: периода занятости τ_x системы требованиями длин меньше x (преобразование Лапласа–Стилтьеса — ПЛС аргумента s); числа требований, обслуженных на периоде занятости τ_x (ПФ аргумента z_1); числа требований, остающихся в системе в конце этого периода (ПФ аргумента z_2). Как уже говорилось, наряду с числом требований в определении ПФ входят и их длины. Напомним, что здесь и далее матричное обозначение $\Gamma_x(z_1, z_2, s) = (\gamma_{xij}(z_1, z_2, s))$ соответствует следующему. Рассматривается условное распределение периода занятости и остальных перечисленных характеристик при условии, что в начале периода занятости управляющий процесс находился в состоянии i , и при этом выражение, от которого берется математическое ожидание, умножается на индикатор события «в момент окончания периода занятости управляющий процесс будет находиться в состоянии j ».

Функция $\Gamma_x^*(z_1, z_2, s | y)$ определяется точно так же, как и $\Gamma_x(z_1, z_2, s)$, но при условии, что в начальный момент в систему поступает требование длины y , $y \leq x$, которое не учитывается в числе обслуженных требований.

Для того чтобы выписать соотношение, которому удовлетворяет $\Gamma_x^*(z_1, z_2, s | y)$, достаточно заметить, что в соответствии с рассматриваемой дисциплиной на периоде занятости τ_x будут обслужены те и только те требования, длины которых при поступлении в систему были меньше x . Наоборот, требования с длинами больше x начнут обслуживаться только после момента τ_x . Ясно также, что период занятости и обслуженные на нем требования полностью совпадают с аналогичными характеристиками для системы $MAP/G/1/\infty$ с дисциплиной FCFS, в которую принимаются только требования длин меньше x ; поток таких требований является марковским с

матрицей интенсивностей переходов управляющего процесса $B(x)\Lambda$. Поэтому получаем

$$\Gamma_x^*(z_1, z_2, s | y) = \exp \left\{ y \left[B(x) \Lambda \Gamma_x(z_1, z_2, s) + \int_x^\infty z_2(u) dB(u) \Lambda + M - sE \right] \right\}, \quad (1)$$

где E — единичная матрица.

Усредняя по длине открывающего период занятости требования, получаем для $\Gamma_x(z_1, z_2, s)$ интегральное уравнение

$$\Gamma_x(z_1, z_2, s) = \frac{1}{B(x)} \int_0^x z_1(y) \exp \left\{ y \left[B(x) \Lambda \Gamma_x(z_1, z_2, s) + \int_x^\infty z_2(u) dB(u) \Lambda + M - sE \right] \right\} dB(y). \quad (2)$$

Положим

$$\Gamma(z, s) = \Gamma_\infty(z, z_1, s), \quad \Gamma^*(z_1, z_2, s | x) = \Gamma_x^*(z_1, z_2, s | x).$$

Обозначим теперь через $\tilde{\tau}_{x,y}^*$ время, за которое поступившее в свободную систему требование длины x обслужится до длины y , $y < x$, через μ — число обслуженных за это время требований, через $\xi_1, \dots, \xi_\mu$ — их длины, через ν — число требований (за исключением требования, поступившего в начальный момент), находящихся в системе в момент $\tilde{\tau}_{x,y}^*$, через $\eta_1, \dots, \eta_\nu$ — их длины. Пусть

$$\tilde{\Gamma}_y^*(z_1, z_2, s | x) = E z_1(\xi_1) \cdots z_1(\xi_\mu) z_2(\eta_1) \cdots z_2(\eta_\nu) e^{-s \tilde{\tau}_{x,y}^*}.$$

Рассматривая наряду с остаточной длиной y остаточную длину $y - \Delta$, где Δ — «малое» изменение длины, и устремляя Δ к нулю, получаем для $\tilde{\Gamma}_y^*(z_1, z_2, s | x)$ уравнение

$$\frac{\partial}{\partial y} \tilde{\Gamma}_y^*(z_1, z_2, s | x) = \tilde{\Gamma}_y^*(z_1, z_2, s | x) \times \left\{ sE - M - \int_y^\infty z_2(u) dB(u) \Lambda - B(y) \Lambda \Gamma_y(z_1, z_2, s) \right\}. \quad (3)$$

Уравнение (3) представляет собой систему обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка.

Поскольку изменение длины требования от x до x происходит за время 0 и за это время не обслужится и не поступит в систему ни одно требование, то для уравнения (3) справедливо начальное условие

$$\tilde{\Gamma}_x^*(z_1, z_2, s | x) = E. \quad (4)$$

В дальнейшем нам понадобится также функция $\Gamma_x'(z_1, z_2, s)$, которую мы определим следующим образом. Пусть $\Gamma_x^{(\delta)}(z_1, z_2, s)$ — решение «протравлированного» уравнения (2), т.е. уравнения

$$\Gamma_x^{(\delta)}(z_1, z_2, s) = \frac{1}{B(x)} \int_0^x z_1(y) \exp \left\{ y \left[B(x) \Lambda \Gamma_x^{(\delta)}(z_1, z_2, s) + \left(\delta + \int_x^\infty z_2(u) dB(u) \right) \Lambda + M - sE \right] \right\} dB(y).$$

Тогда

$$\Gamma_x'(z_1, z_2, s) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\Gamma_x^{(\delta)}(z_1, z_2, s) - \Gamma_x(z_1, z_2, s)}{\delta}.$$

Смысл введенной функции заключается в том, что $b(y) dy \Gamma_x'(z_1, z_2, s)$ с точностью до $o(dy)$ представляет собой (при $y \geq x$) функцию, аналогичную функции $\Gamma_x(z_1, z_2, s)$, но с дополнительным событием, что в систему поступило еще одно требование длины $(y, y + dy)$, не учтенное производящей функцией аргумента z_2 .

Таким же образом определяется функция $\Gamma^{**}(z_1, z_2, s | x)$.

3. Характеристики на одном периоде занятости. Снова предположим, что в момент 0 в свободную систему поступило требование длины меньше x . Обозначим через $\chi_x(t)$ индикатор события, заключающегося в том, что система к моменту t ни разу не освободилась от требований длины меньше x (период занятости τ_x требованиями длины меньше x не закончился к моменту t), через μ — число обслуженных к моменту t требований, через $\xi_1, \dots, \xi_\mu$ — их длины, через ν — число требований, находящихся в момент t в системе, через $\eta_1, \dots, \eta_\nu$ — их длины. Положим

$$Q_x(z_1, z_2, s) = \int_0^\infty e^{-st} \mathbf{E} \chi_x(t) z_1(\xi_1) \cdots z_1(\xi_\mu) z_2(\eta_1) \cdots z_2(\eta_\nu) dt.$$

Функция $Q^*(z_1, z_2, s | x)$ определяется точно так же, как и $Q_x(z_1, z_2, s)$, но при условии, что в начальный момент в систему поступает требование длины x .

Наконец, предполагая, что в момент 0 в свободную систему поступило требование длины x , обозначим через $\chi_{x,y}(t)$ индикатор события, заключающегося в том, что к моменту t длина этого требования не достигнет значения y , $y < x$. (В частности, $\chi_{x,0}(t)$ — индикатор события «к моменту t обслуживание требования не закончилось».) Величины $\mu, \xi_1, \dots, \xi_\mu, \nu, \eta_1, \dots, \eta_\nu$ имеют прежний смысл. Положим

$$Q_y^*(z_1, z_2, s | x) = \int_0^\infty e^{-st} \mathbf{E} \chi_{x,y}(t) z_1(\xi_1) \cdots z_1(\xi_\mu) z_2(\eta_1) \cdots z_2(\eta_\nu) dt.$$

Выпишем уравнения, которым удовлетворяют $Q_x(z_1, z_2, s)$, $Q^*(z_1, z_2, s | x)$ и $Q_y^*(z_1, z_2, s | x)$.

Начнем с $Q_x(z_1, z_2, s)$. Рассмотрим обслуживавшееся за время t требование максимальной длины y (очевидно, $y < x$). Это требование может поступить в начальный момент 0 (с плотностью вероятностей $b(y)/B(x)$), и тогда к моменту t не должен закончиться период занятости системы требованиями длины меньше y , открываемый требованием длины y (тройное преобразование задается функцией $Q^*(z_1, z_2, s | y)$). Кроме того, такое требование может поступить и в промежуточный момент. В этом случае в начальный момент поступает требование длины меньше y (с вероятностью $B(y)/B(x)$), открываемый им период занятости системы требованиями длины меньше y заканчивается в некоторый промежуточный момент v , $0 < v < t$, за время v поступает требование длины $(y, y + dy)$ (тройное преобразование $\Gamma'_y(z_1, z_2, s) b(y) dy$), и период занятости требованиями длины меньше y , открываемый требованием длины y , не закончится за время $(v, t - v)$ (тройное преобразование $Q^*(z_1, z_2, s | y)$). Формула полной вероятности приводит нас к равенству

$$Q_x(z_1, z_2, s) = \frac{1}{B(x)} \int_0^x [E + B(y) \Gamma'_y(z_1, z_2, s)] Q^*(z_1, z_2, s | y) dB(y). \quad (5)$$

Выражение для $Q^*(z_1, z_2, s | x)$ получается аналогично: либо к моменту t не закончилось обслуживание поступившего требования длины x (тройное преобразование $Q_0^*(z_1, z_2, s | x)$); либо обслуживание этого требования закончилось, а максимальная длина обслуживавшихся после него требований была y . Во втором случае мы поделим интервал длины t на три части, причем первую составляет время, в течение которого длина выделенного требования уменьшилась от x до y (тройное преобразование $\tilde{\Gamma}_y^*(z_1, z_2, s | x)$), вторую — период занятости системы требованиями длины меньше y , открываемый требованием длины y и соответствующий продолжению обслуживания начального требования и всех поступивших после требований длины меньше y (с учетом того, что именно на этом периоде и должно поступить требование длины y , тройное преобразование $\Gamma'^*(z_1, z_2, s | y)$), и третью — время, прошедшее с начала обслуживания поступившего на последнем периоде занятости требования длины y до момента t (тройное преобразование $Q^*(z_1, z_2, s | y)$). Отсюда получаем

$$Q^*(z_1, z_2, s | x) = Q_0^*(z_1, z_2, s | x) + z_1(x) \int_0^x \tilde{\Gamma}_y^*(z_1, z_2, s | x) \Gamma'^*(z_1, z_2, s | y) Q^*(z_1, z_2, s | y) dB(y). \quad (6)$$

Наконец, для $Q_y^*(z_1, z_2, s | x)$ справедливо дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial y} Q_y^*(z_1, z_2, s | x) = -z_2(y) \tilde{\Gamma}_y^*(z_1, z_2, s | x) [E + B(y) \Lambda Q_y(z_1, z_2, s)], \quad (7)$$

для вывода которого, как обычно, наряду с длиной y рассмотрим длину $y - \Delta$. Тогда если к моменту t длина начального требования не достигнет значения y , то она, естественно, не достигнет и значения $y - \Delta$. Однако значение $y - \Delta$ не достигается еще и в том случае, когда время изменения длины требования от x до y лежит в интервале $(t - \Delta, t)$, при этом длина требования, достигнув значение y после момента $t - \Delta$, к моменту t не успевает достичь значения $y - \Delta$ (тройное преобразование $\tilde{\Gamma}_y^*(z_1, z_2, s | x)$). Кроме того, значение y длина требования может достичь и в произвольный промежуточный момент v , однако затем за время уменьшения его длины на Δ поступит требование длины меньше y (с вероятностью $\Delta B(y)$), которое откроет период занятости системы требованиями длины меньше y , не окончившийся к моменту t (тройное преобразование $Q_y(z_1, z_2, s)$). Учитывая исходное требование, приходим к соотношению

$$Q_{y-\Delta}^*(z_1, z_2, s | x) = Q_y^*(z_1, z_2, s | x) + z_2(y) \Delta \tilde{\Gamma}_y^*(z_1, z_2, s | x) + z_2(y) \tilde{\Gamma}_y^*(z_1, z_2, s | x) \Delta B(y) Q_y(z_1, z_2, s) + o(\Delta),$$

откуда после предельного перехода получаем уравнение (7).

Решение уравнения (7) с учетом очевидного начального условия $Q_x^*(z_1, z_2, s | x) = 0$ имеет вид:

$$Q_0^*(z_1, z_2, s | x) = \int_0^x z_2(y) [E + B(y) \Delta Q_y(z_1, z_2, s)] \tilde{\Gamma}_y^*(z_1, z_2, s | x) dy. \quad (8)$$

Из соотношений (5), (6) и (8) нетрудно получить окончательное интегральное уравнение для $Q^*(z_1, z_2, s | x)$:

$$\begin{aligned} Q^*(z_1, z_2, s | x) = & \int_0^x z_2(y) \tilde{\Gamma}_y^*(z_1, z_2, s | x) dy \\ & + \int_0^x \left\{ \Delta [E + B(y) \Gamma_y'(z_1, z_2, s)] Q^*(z_1, z_2, s | y) \right. \\ & \times \int_y^x z_2(u) \tilde{\Gamma}_u^*(z_1, z_2, s | x) du \\ & \left. + z_1(x) \tilde{\Gamma}_y^*(z_1, z_2, s | x) \Gamma^{*'}(z_1, z_2, s | y) Q^*(z_1, z_2, s | y) \right\} dB(y). \quad (9) \end{aligned}$$

В дальнейшем нам понадобится только функция $Q(z_1, z_2, s) = Q_\infty(z_1, z_2, s)$.

4. Нестационарные характеристики обслуживания. Будем предполагать, что в начальный момент времени 0 система свободна от требований, хотя полученные результаты легко переносятся на систему с любыми начальными условиями.

Обозначим, как и прежде, через μ число обслуженных к моменту t требований, через $\xi_1, \dots, \xi_\mu$ — их длины, через ν — число требований, находящихся в системе в момент t , через $\eta_1, \dots, \eta_\nu$ — их остаточные длины (за вычетом уже обслуженной части). Положим

$$P(s, z_1, z_2) = \int_0^\infty e^{-st} E z_1(\xi_1) \cdots z_1(\xi_\mu) z_2(\eta_1) \cdots z_2(\eta_\nu) dt.$$

Функция $P(s, z_1, z_2)$ представляет собой преобразование Лапласа (ПЛ) по времени (аргумент s) числа обслуженных к моменту t требований (ПФ от аргумента z_1) и числа находящихся в системе в момент t требований (ПФ от аргумента z_2).

Рассмотрим два процесса восстановления, один из которых порожден моментами освобождения системы, а другой — моментами поступления требований в свободную систему. Учитывая число обслуженных на периоде занятости требований, видим, что интервалы между восстановлениями и числа обслуженных на них требований имеют у этих процессов двойные преобразования $(sE - M)^{-1} \Delta \Gamma(z, s)$ и $\Gamma(z, s) (sE - M)^{-1} \Delta$, а функции восстановления — соответственно

$$\begin{aligned} H_1(s, z) &= [E - (sE - M)^{-1} \Delta \Gamma(z, s)]^{-1}, \\ H_2(s, z) &= (sE - M)^{-1} \Delta [E - \Gamma(z, s) (sE - M)^{-1} \Delta]^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда приходим к формуле

$$P(s, z_1, z_2) = [sE - M - \Lambda \Gamma(z_1, s)]^{-1} [E + \Lambda Q(z_1, z_2, s)]. \quad (10)$$

5. Стационарные характеристики обслуживания. Предполагая теперь, что загрузка $\rho < 1$, рассмотрим стационарный режим функционирования системы.

Начнем со стационарного распределения числа требований в системе. Обозначим через μ число обслуженных требований, но, в отличие от ранее принятых обозначений, только на последнем периоде занятости (в частности, если система свободна от требований, то $\mu = 0$), через $\xi_1, \dots, \xi_\mu$ — их длины, через ν — число требований, находящихся в системе, через $\eta_1, \dots, \eta_\nu$ — их остаточные длины (за вычетом уже обслуженной части). Положим

$$p(z_1, z_2) = E z_1(\xi_1) \cdots z_1(\xi_\mu) z_2(\eta_1) \cdots z_2(\eta_\nu).$$

Функция $p(z_1, z_2)$ является ПФ указанных выше характеристик.

Для того чтобы найти $p(z_1, z_2)$, введем матрицу $\tilde{\Lambda} = M + \Lambda \Gamma(1, 0)$, представляющую собой инфинитезимальную матрицу управляющего процесса, рассматриваемого только на свободных периодах функционирования системы. Найдем вектор $\tilde{\pi}$ стационарных вероятностей состояний этого процесса из обычной системы уравнений равновесия

$$\tilde{\pi} \tilde{\Lambda} = \tilde{\pi} \quad (11)$$

с условием нормировки

$$\sum_{i=1}^I \tilde{\pi}_i = 1. \quad (12)$$

Тогда

$$p(z_1, z_2) = (1 - \rho) \tilde{\pi} [E + \Lambda Q(z_1, z_2, 0)]. \quad (13)$$

Перейдем к стационарному распределению времени ожидания начала обслуживания требования длины v . Для этого положим

$$\tilde{z}_v(z_1, z_2, s) = \begin{cases} z_2(x), & \text{если } x > v; \\ z_1(x) e^{-sx}, & \text{если } x \leq v. \end{cases}$$

Функция $\tilde{p}_v(z_1, z_2, s) = p(1, \tilde{z}_v(z_1, z_2, s))$ представляет собой тройное преобразование следующих стационарных характеристик системы: числа находящихся в системе требований длины больше v (ПФ аргумента z_2), числа находящихся в системе требований длины не более v (ПФ аргумента z_1), суммарной длины требований, каждое из которых имеет длину не более v (ПЛС аргумента s). Через $\tilde{r}_v(z_1, z_2, y)$ обозначим обратное по s преобразование Фурье к функции $\tilde{p}_v(z_1, z_2, s)$, т.е. плотность стационарного распределения суммарной длины требований, каждое из которых имеет длину не более v , и двойное преобразование двух других названных выше характеристик.

Пусть теперь ζ_v — время ожидания начала обслуживания требования длины v , поступающего в функционирующую в стационарном режиме систему, μ — число обслуженных за время ζ_v требований, $\xi_1, \dots, \xi_\mu$ — их длины (если требование уже находилось в системе в момент поступления требования длины v , то его длиной считаем остаточную длину в этот момент), через ν — число требований, находящихся в системе в момент ζ_v , через $\eta_1, \dots, \eta_\nu$ — их остаточные длины. Положим

$$w_v(z_1, z_2, s) = E z_1(\xi_1) \cdots z_1(\xi_\mu) z_2(\eta_1) \cdots z_2(\eta_\nu) e^{-s\zeta_v}.$$

Тогда

$$w_v(z_1, z_2, s) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \tilde{r}_v(z_1, z_2, y) \Lambda \Gamma_v^*(z_1, z_2, s | y) dy. \quad (14)$$

Функция $w_v(z_1, z_2, s)$ определяет стационарное распределение времени ожидания начала обслуживания требования длины v и некоторых связанных с этим временем характеристик.

6. Время обслуживания. Время обслуживания требования длины x совпадает с временем $\tilde{\tau}_{x,0}^*$, за которое поступившее в свободную систему требование длины x обслужится до длины 0. Поэтому, обозначая через $D_x(z_1, z_2, s)$ тройное преобразование времени обслуживания требования длины x (ПЛС аргумента s), числа обслуженных за это время других требований (ПФ аргумента z_1) и числа требований, остающихся в системе в момент окончания обслуживания требования длины x (ПФ аргумента z_2), имеем

$$D_x(z_1, z_2, s) = \tilde{\Gamma}_0^*(z_1, z_2, s | x),$$

где $\tilde{\Gamma}_y^*(z_1, z_2, s | x)$ определяется из уравнения (3) с начальным условием (4).

7. Заключение. Полученные результаты позволяют находить в терминах преобразований (ПЛ, ПЛС и ПФ) основные характеристики системы $M/M/1/\infty$ с дисциплиной SRPT, причем как в стационарном, так и в нестационарном случае.

Методы решения уравнений (2) и (11) с условием нормировки (12) хорошо известны.

Вычисление характеристик по формулам (1), (10), (13) и (14) также не представляет особых трудностей. Правда, при нахождении функции $w_v(z_1, z_2, s)$ по формуле (14) необходимо обратить ПЛС. В принципе, эту операцию можно заменить введением ПФ матричного аргумента Z_2 вместо скалярного аргумента z_2 , что, однако, увеличивает размерность матриц в I раз.

Уравнение (3) с начальным условием (4) решается стандартными методами численного интегрирования, а уравнение (9) удобно решать методом последовательных приближений.

Наконец, функции $\Gamma'_x(z_1, z_2, s)$ и $\Gamma^{**}(z_1, z_2, s | x)$ можно вычислить разложением матричной экспоненты в ряд Тейлора с использованием метода итераций.

Справедливости ради следует сказать, что полученные результаты представляют теоретический интерес и вряд ли могут быть использованы для численных расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бочаров П. П., Печинкин А. В. Теория массового обслуживания. М.: Изд-во РУДН, 1995.
2. Schrage L., Miller L. The queue $M/G/1$ with the shortest remaining processing time discipline. — Oper. Res., 1966, v. 14, p. 670–684.
3. Schrage L. A proof of the optimality of the shortest remaining processing time discipline. — Oper. Res., 1968, v. 16, p. 687–690.
4. Козлов В. В. Оптимальная дисциплина обслуживания для систем массового обслуживания. — Научн. труды Кубан. ун-та, 1977, т. 247, с. 33–37.
5. Печинкин А. В., Соловьев А. Д., Яшков С. Ф. О системе с дисциплиной обслуживания первым требованием с минимальной оставшейся длиной. — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1979, № 5, с. 51–58.
6. Печинкин А. В. Неординарный входящий поток в СМО с дисциплиной SRPT. — Техника средств связи. Системы связи, 1990, в. 4, с. 3–16.
7. Schassberger R. The steady-state appearance of the $M/G/1$ queue under the discipline of shortest remaining processing time. — Adv. Appl. Probab., 1990, v. 22, p. 456–479.
8. Grishechkin S. A. On a relationship between processor-sharing queues and Cramp-Mode-Jagers branching processes. — Adv. Appl. Probab., 1992, v. 24, p. 653–698.
9. Печинкин А. В. Нестационарные характеристики СМО с дисциплиной SRPT. — Системное моделирование (Новосибирск: НГУ), 1991, в. 17, с. 179–186.
10. Печинкин А. В. Нестационарные характеристики системы обслуживания с дисциплиной SRPT. — Вестник РУДН. Прикл. матем. информ., 1996, № 1, с. 77–85.

Поступила в редакцию
10.IX.1998