Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. С. Рыбникова, О разрешимости бесконечных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, том 45, выпуск 3, 596–602

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp489>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 08:23:28

© 2000 г.

РЫБНИКОВА Т. С.*

О РАЗРЕШИМОСТИ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ¹⁾

В работе исследуется вопрос существования решений линейных стохастических дифференциальных уравнений в локально выпуклом пространстве $\mathbf{R}^\infty$. Доказана теорема существования непрерывного (или непрерывного в среднем степени p) сильного решения уравнения с непрерывной (соответственно непрерывной в среднем степени p) правой частью. Указаны необходимые и достаточные условия единственности решения.

Ключевые слова и фразы: линейное стохастическое дифференциальное уравнение, сильное решение, бесконечная система.

Во многих приложениях приходится рассматривать бесконечные системы стохастических дифференциальных уравнений вида

$$dX_n(t) = dW_n(t) + \sum_{k=1}^{m_n} a_{nk} X_k(t) dt.$$

Такие системы уравнений можно трактовать как линейные стохастические дифференциальные уравнения в пространстве $\mathbf{R}^\infty$ всех последовательностей. В настоящей работе исследуется вопрос существования сильных решений линейных стохастических дифференциальных уравнений в пространстве $\mathbf{R}^\infty$. В банаховых пространствах обыкновенное дифференциальное уравнение

$$X'(t) = AX(t) + f(t), \quad X(0) = X_0, \quad (1)$$

и стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX(t) = AX(t) dt + f(t) dt + d\xi(t), \quad X(0) = X_0, \quad (2)$$

где A — непрерывный линейный оператор, а $\xi(t) = W(t)$ — винеровский процесс в банаховом пространстве (определение см. ниже), однозначно разрешимы для любого начального условия. В отличие от банаховых пространств, в небанаховых локально выпуклых пространствах уравнения (1) и (2) могут быть неразрешимы или разрешимы неоднозначно (см. примеры в [1]). С. А. Шкариным [7] было доказано, что уравнение (1) разрешимо в пространстве $\mathbf{R}^\infty$. В работе Ю. В. Медницкого [6] доказывается существование сильного решения уравнения (1) в пространстве $\mathbf{R}^\infty$ для «естественного» винеровского процесса со значениями в пространстве $\mathbf{R}^\infty$. В [1], [6] высказано предположение, что уравнение (2) имеет сильное решение для произвольного винеровского процесса в $\mathbf{R}^\infty$. Основной результат настоящей работы состоит в том, что уравнение (2) в $\mathbf{R}^\infty$ имеет сильное решение для произвольного непрерывного (или непрерывного в среднем степени p) случайного процесса $\xi(\cdot)$. В работе используются методы, предложенные С. А. Шкариным [7] в случае детерминированных уравнений, некоторые из которых были перенесены Ю. В. Медницким [6] на случай стохастических уравнений.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия; e-mail: tatiana@rybnikov.mcsme.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 96-15-96865 и 97-01-00932.

1. Обозначения и терминология. Обозначим через $\mathbf{R}^\infty$ счетное произведение прямых, т.е. пространство всех последовательностей, наделенное топологией покоординатной сходимости. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, $\mathbf{R}_+ = [0; +\infty)$. Обозначим через $C(E, F)$ пространство непрерывных отображений топологического пространства E в топологическое пространство F . Через $C[a; b]$ обозначим банахово пространство непрерывных вещественных функций на $[a; b]$ с нормой $\|f\|_C = \max_{t \in [a; b]} |f(t)|$. Для локально выпуклого пространства E через E^* обозначается его сопряженное, а через $\mathcal{L}(E)$ — пространство непрерывных линейных операторов в E . Минимум из двух чисел a и b обозначим через $a \wedge b$. Случайный процесс $\xi(t, \omega)$, $t \in \mathbf{R}_+$, на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ со значениями в топологическом пространстве называется непрерывным, если все его траектории $\xi(\cdot, \omega)$ непрерывны.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, непрерывно и плотно вложенное в локально выпуклое пространство E , а $j: E^* \rightarrow H$ — вложение, определенное следующим образом. Для всякого $k \in E^*$ функционал $h \mapsto \langle k, h \rangle$ непрерывен на H . Значит, существует такой вектор $j(k) \in H$, что для всех $h \in H$ имеем $\langle k, h \rangle = (j(k), h)_H$.

О п р е д е л е н и е 1. Непрерывный случайный процесс $W(t)$, $t \geq 0$, на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ со значениями в E называется винеровским процессом, ассоциированным с H , если для каждого $k \in E^*$ с $\|j(k)\|_H = 1$ одномерный процесс $\langle k, W_t \rangle$ — винеровский.

В интересующем нас случае $E = \mathbf{R}^\infty$. Если положить $H = l^2$, то для всякой последовательности независимых винеровских процессов $W_n(t)$ процесс $W(t) = (W_n(t))_{n=1}^\infty$ является винеровским в смысле определения 1. Этот процесс и будет называться естественным винеровским процессом. Подробнее о бесконечномерных винеровских процессах см. [2], [4].

Пусть $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathbf{R}_+\}$ — неубывающее семейство σ -алгебр, т.е. фильтрация на Ω . Мы будем называть фильтрацию $\{\mathcal{F}_t\}$ полной, если $\mathcal{F}_0$ содержит все множества меры нуль. Напомним, что процесс $\xi(\cdot)$ со значениями в топологическом пространстве с борелевской σ -алгеброй называется $\{\mathcal{F}_t\}$ -согласованным, если случайный элемент $\xi(t)$ при каждом $t \in \mathbf{R}_+$ измерим относительно $\mathcal{F}_t$. Предсказуемой σ -алгеброй $\mathcal{P}_\infty$ на $[0; +\infty) \times \Omega$ называется σ -алгебра, порожденная множествами вида

$$(s; t] \times F \text{ для } 0 \leq s < t < \infty, F \in \mathcal{F}_s \text{ и } \{0\} \times F \text{ для } F \in \mathcal{F}_0.$$

Сужение $\mathcal{P}_\infty$ на $[0; T] \times \Omega$ обозначается как $\mathcal{P}_T$. Случайный процесс $\xi(\cdot, \cdot)$ на $[0; +\infty) \times \Omega$ (соответственно на $[0; T] \times \Omega$) со значениями в $\mathbf{R}^1$ называется предсказуемым, если он измерим относительно $\mathcal{P}_\infty$ (соответственно $\mathcal{P}_T$). Случайный процесс $\xi(\cdot, \cdot)$ на $[0; +\infty) \times \Omega$ (соответственно на $[0; T] \times \Omega$) со значениями в $\mathbf{R}^\infty$ называется предсказуемым, если все его координаты предсказуемы.

Предсказуемые процессы согласованы. Согласованные непрерывные скалярные процессы являются предсказуемыми (см. [4, раздел 3.3]).

Пусть заданы $f \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R}^\infty)$, $A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^\infty)$ и согласованный случайный процесс $\xi(\cdot)$ на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, принимающий значения в $\mathbf{R}^\infty$. Оператор A принадлежит $\mathcal{L}(\mathbf{R}^\infty)$ тогда и только тогда, когда его матрица A содержит в каждой строке лишь конечное число ненулевых элементов.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $\xi(t) = (\xi(t, \omega), \omega \in \Omega, t \in \mathbf{R}_+)$ — непрерывный (или непрерывный в среднем степени p) случайный процесс со значениями в $\mathbf{R}^\infty$. Процесс $X(t) = (X(t, \omega), \omega \in \Omega, t \in \mathbf{R}_+)$ со значениями в $\mathbf{R}^\infty$ называется сильным решением уравнения

$$dX(t) = AX(t)dt + f(t)dt + d\xi(t), \quad X(0) = \xi(0), \quad (3)$$

если он согласован и для почти всех ω удовлетворяет интегральному уравнению

$$X(t, \omega) = \int_0^t AX(s, \omega)ds + \int_0^t f(s)ds + \xi(t, \omega), \quad \forall t \geq 0, \quad (4)$$

понимаемому по координатам. В частности, необходимо, чтобы координаты процесса $AX(s, \omega)$ были локально интегрируемы по s .

Уравнение (3) эквивалентно уравнению

$$dX(t) = AX(t)dt + d\zeta(t), \quad X(0) = \zeta(0),$$

где $\zeta(t, \omega) = \int_0^t f(s) ds + \xi(t, \omega)$, однако в некоторых ситуациях удобно бывает использовать запись (3), например, когда процесс $\xi(\cdot, \cdot)$ — винеровский.

Будем говорить, что последовательность непрерывных случайных процессов $u_n(t, \omega)$ сходится к процессу $u(t, \omega)$ по вероятности равномерно по $t \in [0; T]$, если $P\{\omega: \|u_n(\cdot, \omega) - u(\cdot, \omega)\|_C > a\} \rightarrow 0$ для любого $a > 0$ при $n \rightarrow \infty$ (т.е. соответствующие $C[0; T]$ -значные случайные векторы сходятся по вероятности).

2. Вспомогательные результаты.

Лемма 1. Для любого непрерывного согласованного скалярного случайного процесса ξ_t , $t \in [0; T]$, существует последовательность согласованных случайных процессов с гладкими траекториями $u_n(\cdot, \omega)$, сходящаяся к ξ_t по вероятности равномерно по t из $[0; T]$, причем $u_n(0) \equiv \xi(0)$, $u_n^{(k)}(0) \equiv 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{p_n\}$ гладких вероятностных плотностей на прямой таких, что $\text{supp}(p_n) \subseteq [0; 1/n]$. Приближим ξ_t потраекторно свертками с p_n . Положим

$$u_n(t, \omega) = \xi(\cdot, \omega) * p_n(t) = \int_0^{1/n} \xi(t-s, \omega) p_n(s) ds = \int_{t-1/n}^t \xi(z, \omega) p_n(t-z) dz. \quad (5)$$

При $t < 0$ доопределим $\xi(t, \omega) \equiv \xi(0, \omega)$. Из равенства (5) видно, что при каждом ω траектория $u_n(\cdot, \omega)$ — гладкая, $u_n(0) \equiv \xi(0)$, $u_n^{(k)}(0) \equiv 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Поскольку

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_n(t) dt = 1 \quad \text{и} \quad \text{supp}(p_n) \subseteq \left[0; \frac{1}{n}\right],$$

легко видеть, что $\|u_n(\cdot, \omega) - \xi(\cdot, \omega)\|_C \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Иными словами, случайные элементы $u_n(\omega)$ со значениями в банаховом пространстве $C[0; T]$ сходятся к $\xi(\omega)$ при $n \rightarrow \infty$ при каждом ω . Следовательно, они сходятся и по вероятности, т.е. $P\{\|u_n(\cdot, \omega) - \xi(\cdot, \omega)\|_C > a\} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $a > 0$. Наконец, из (5) видно, что процесс u_n согласован с семейством $\{\mathcal{F}_t\}$. Лемма доказана.

Лемма 2. Уравнение, имеющее в координатной форме вид

$$dX_n(t) = X_{n+1}(t) dt + d\xi_n(t) + f_n(t) dt, \quad X(0) = \xi(0), \quad (6)$$

имеет сильное решение X для произвольных $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^\infty)$ и $\{\mathcal{F}_t\}$ -согласованного непрерывного случайного процесса $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, со значениями в $\mathbb{R}^\infty$, причем X — непрерывный процесс.

Доказательство. Построим решение на отрезке $[0; T]$. Для упрощения выкладок считаем, что $T = 1$.

I. Найдутся две последовательности $\{\mathcal{F}_t\}$ -согласованных случайных процессов $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$, при всех ω удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} \varphi_n(\cdot, \omega) &\in C^{n-1}[0; 1] \quad \text{при всех } n \in \mathbb{N}; \quad \varphi_1(0) \equiv \xi_1(0), \\ \varphi_n^{(k)}(0) &\equiv 0, \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad \text{при } n \geq 2; \end{aligned} \quad (7)$$

$$P\{\|\varphi_n^{(k)}(\cdot, \omega)\|_C > 2^{-n}\} \leq 2^{-n} \quad \text{при } n \geq 2, \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad t \in [0; 1]; \quad (8)$$

$$\psi_n(\cdot, \omega) \in C^\infty[0; 1], \quad \psi_n(0) \equiv \xi_{n+1}(0), \quad n \in \mathbb{N}; \quad \psi_0 \equiv 0; \quad (9)$$

$$\psi_n(t, \omega) = (\varphi_n^{(n-1)}(t, \omega) - \xi_n(t, \omega))' - f_n(t) + \psi_{n-1}'(t, \omega), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (10)$$

где дифференцирование производится по t при фиксированном ω . Существование этих последовательностей будет доказано ниже. Решение $X(t, \omega) = (X_1(t, \omega), X_2(t, \omega), \dots)$ уравнения (6) будем строить следующим образом: положим $X_1(\cdot, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\cdot, \omega)$, где ряд сходится по вероятности равномерно по $t \in [0; 1]$, а при $n \geq 2$ процесс X_n зададим равенством

$$X_n(t, \omega) = (X_{n-1}(t, \omega) - \xi_{n-1}(t, \omega))' - f_{n-1}(t). \quad (11)$$

С помощью (10) и (11) по индукции проверяется, что при почти всех ω

$$X_n(t, \omega) = \psi_{n-1}(t, \omega) + \sum_{j=n}^{\infty} \varphi_j^{(n-1)}(t, \omega) \quad (12)$$

при условии, что ряд $\sum_{j=n}^{\infty} \varphi_j^{(n-2)}(\cdot, \omega)$ можно почленно продифференцировать. Покажем корректность определения X_1 и правомерность почленного дифференцирования рядов из $\varphi_j^{(k)}$. Зафиксируем $n \in \mathbf{N}$. Последовательность частичных сумм $S_l = \sum_{j=n}^l \varphi_j^{(n-1)}$, $l \geq n$, фундаментальна по вероятности. Действительно, в силу условия (8) для любого $a > 0$ такого, что $a \geq 2^{-m}$, $m \in \mathbf{N}$, и натуральных $l \geq i \geq \max(m, n)$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\|S_l - S_i\|_C > a\} &\leq \mathbf{P}\{\|S_l - S_i\|_C > 2^{-m}\} = \mathbf{P}\left\{\left\|\sum_{j=i+1}^l \varphi_j^{(n-1)}\right\|_C > 2^{-m}\right\} \\ &\leq \mathbf{P}\left\{\sum_{j=i+1}^l \|\varphi_j^{(n-1)}\|_C > 2^{-m}\right\} \leq \sum_{j=i+1}^l \mathbf{P}\{\|\varphi_j^{(n-1)}\|_C > 2^{-j}\} \\ &\leq \sum_{j=i+1}^l 2^{-j} < 2^{-i}. \end{aligned} \quad (13)$$

Поэтому ряды $\sum_{j=n}^{\infty} \varphi_j^{(n-1)}(\cdot, \omega)$ и $\sum_{j=n-1}^{\infty} \varphi_j^{(n-2)}(\cdot, \omega)$ сходятся по вероятности равномерно по $t \in [0; 1]$ при всех $n \in \mathbf{N}$. Пусть $F(\cdot, \omega) = \sum_{j=n}^{\infty} \varphi_j^{(n-1)}(\cdot, \omega)$, $S(\cdot, \omega) = \sum_{j=n}^{\infty} \varphi_j^{(n-2)}(\cdot, \omega)$. Будем рассматривать случайные процессы $S(\cdot, \omega)$, $F(\cdot, \omega)$, $\varphi_j^{(n-1)}(\cdot, \omega)$ и $\varphi_j^{(n-2)}(\cdot, \omega)$ как случайные элементы со значениями в $C[0; 1]$. Обозначим $F_l = \sum_{j=n}^l \varphi_j^{(n-1)}$, $S_k = \sum_{j=n}^k \varphi_j^{(n-2)}$. Поскольку $F_l \rightarrow F$ при $l \rightarrow \infty$ и $S_k \rightarrow S$ при $k \rightarrow \infty$ по вероятности, то по теореме Рисса найдется возрастающая последовательность натуральных чисел $\{m_i\}$ такая, что $F_{m_i} \rightarrow F$ и $S_{m_i} \rightarrow S$ почти всюду, т.е. при почти всех ω траектории процессов сходятся равномерно. При почти всех ω выполнено равенство $F_{m_i}(t, \omega) = S'_{m_i}(t, \omega)$, и можно применить теорему о почленном дифференцировании функциональных последовательностей. Значит, $\sum_{j=n}^{\infty} \varphi_j^{(n-1)}(\cdot, \omega) = (\sum_{j=n}^{\infty} \varphi_j^{(n-2)}(\cdot, \omega))'$ при почти всех ω . Равенство (12) доказано.

Докажем согласованность X_n , $n \in \mathbf{N}$. Положим

$$F(\cdot, \omega) = \begin{cases} \lim_{m_i \rightarrow \infty} F_{m_i}(\cdot, \omega), & \text{если предел существует,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

причем подпоследовательность F_{m_i} выбрана так, что она сходится равномерно по t для почти всех ω . Зафиксируем $t \in [0; 1]$. По построению $\varphi_n^{(k)}(t)$ при $k \leq n-1$ измеримы относительно $\mathcal{F}_t$. Значит, F_{m_i} согласованы с семейством $\{\mathcal{F}_t\}$. Множество тех ω , при которых последовательность $F_{m_i}(t, \omega)$ имеет предел, $\mathcal{F}_t$ -измеримо, указанная модификация F согласована с семейством $\{\mathcal{F}_t\}$, как и процесс $X_n = \psi_{n-1} + F$. Отсюда и из равенства (11) следует, что $X = (X_n)_{n=1}^{\infty}$ — действительно решение уравнения (6). Из (4) вытекает непрерывность процесса X .

II. Осталось доказать существование процессов $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$. Для того чтобы построить φ_n при $n \in \mathbf{N}$, представим $f_n(t)$ на отрезке $[0; 1]$ в виде $f_n(t) = \tilde{f}_n(t) + \hat{f}_n(t)$, где $\tilde{f}_n(t)$ — гладкая, а $\hat{f}_n(t)$ удовлетворяет условию $|\hat{f}_n(t)| \leq \frac{1}{3 \cdot 2^n}$ на отрезке $[0; 1]$. Затем по лемме 1 выберем согласованный процесс u_n с гладкими траекториями такой, что

$$\mathbf{P}\left\{\|u_n(\cdot, \omega) - \xi_n(\cdot, \omega)\|_C > \frac{1}{3} \cdot 2^{-n}\right\} \leq 2^{-n},$$

и найдем согласованный процесс $g_n(\cdot, \omega)$ с гладкими траекториями на $[0; 1]$ такой, что $g_n(0) \equiv 0$, $g'_n(0, \omega) = \eta(\omega)$ и $\|g_n(\cdot, \omega)\|_C < K$ при всех ω , где

$$\eta(\omega) = \xi_{n+1}(0) + \tilde{f}_n(0) - \psi'_{n-1}(0) \quad \text{и} \quad K = \frac{1}{3 \cdot 2^n}.$$

В качестве g_n можно взять, например, свертку $g_n(t, \omega) = (t\eta(\omega) \wedge K/2) * p_l(t)$ при достаточно большом l , где p_l — такие же, как и в лемме 1. Положим $\varphi_1(t, \omega) = \xi_1(t, \omega) + \int_0^t \tilde{f}_1(u) du + g_1(t, \omega)$. При $n \geq 2$ для процесса φ_n , задаваемого уравнением

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(n-1)}(t, \omega) &= \xi_n(t, \omega) - u_n(t, \omega) + \int_0^t \tilde{f}_n(u) du + g_n(t, \omega), \\ \varphi_n^{(k)}(0) &\equiv 0, \quad 0 \leq k \leq n-1, \end{aligned} \quad (14)$$

выполнено условие (8). Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\|\varphi_n^{(n-1)}(\cdot, \omega)\|_C > 2^{-n}\} &\leq \mathbf{P}\left\{\|\xi_n(\cdot, \omega) - u_n(\cdot, \omega)\|_C > \frac{1}{3} \cdot 2^{-n}\right\} \\ &+ \mathbf{P}\left\{\left|\int_0^t \tilde{f}_n(u) du\right| > \frac{1}{3} \cdot 2^{-n}\right\} + \mathbf{P}\left\{\|g_n(\cdot, \omega)\| > \frac{1}{3} \cdot 2^{-n}\right\} \\ &= \mathbf{P}\left\{\|\xi_n(\cdot, \omega) - u_n(\cdot, \omega)\|_C > \frac{1}{3} \cdot 2^{-n}\right\} \leq 2^{-n}, \end{aligned}$$

а интегрирование по отрезку $[0; 1]$ не увеличивает C -норму функции. Зная $\psi_{n-1}(\cdot, \omega)$ и $\varphi_n(\cdot, \omega)$, найдем $\psi_n(\cdot, \omega)$ по формуле (10). Тогда

$$\psi_n(t, \omega) = -u'_n(t, \omega) - \tilde{f}_n(t) + g'_n(t, \omega) + \psi'_{n-1}(t, \omega)$$

является процессом с гладкими траекториями, причем $\psi_n(0) = \xi_{n+1}(0)$, $\varphi_n^{(k)}(0) = 0$ при $0 \leq k \leq n-1$, и условия (7)–(10) для φ_n и ψ_n выполнены. Из равенств (14) видно, что $\varphi_n^{(k)}$ при $k \leq n-1$ согласованы. Следовательно, в силу равенства (10) таковы же и ψ_n , $n \in \mathbf{N}$. Лемма доказана.

Аналогичными свойствами обладают и процессы $\xi(\cdot) = (\xi_n(\cdot))_{n=1}^\infty$ со значениями в пространстве $\mathbf{R}^\infty$, которые не непрерывны, но являются непрерывными в среднем степени $p \geq 1$, т.е. $\mathbf{E}|\xi_n(t) - \xi_n(s)|^p \rightarrow 0$ при $t \rightarrow s$ при каждом $n \in \mathbf{N}$. Другими словами, отображение $[0; T] \rightarrow L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $t \mapsto \xi_n(t, \cdot)$, непрерывно при всех $n \in \mathbf{N}$. При обсуждении свойств в среднем степени p мы будем предполагать, что фильтрация $\{\mathcal{F}_t\}$ полна; непрерывность, гладкость, интеграл и производная случайной функции будут пониматься в смысле сходимости в $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Производная случайного процесса определяется как предел в L^p величин $(\xi_{i+h} - \xi_i)/h$ при $h \rightarrow 0$, а интеграл — как предел интегральных сумм Римана, который существует для всех непрерывных в среднем степени $p \geq 1$ процессов. При этом если некоторая случайная функция ζ_t , $t \in [a; b]$, измерима и непрерывна в среднем степени $p \geq 1$, то почти наверное $((L^p) \int_a^b \zeta_t dt)(\omega) = \int_a^b \zeta_t(\omega) dt$, где слева стоит интеграл в среднем, а справа — интеграл, определенный отдельно для каждой реализации (см. [3, п. 2.1.4]). Отсюда следует, что если $\zeta(\cdot)$ — согласованный непрерывный в среднем степени $p \geq 1$ процесс, то процесс $\int_0^t \zeta_s(\omega) ds$ также согласован. Действительно, рассмотрим пространство $L^p(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P}|_{\mathcal{F}_t})$, имеем, что $((L^p) \int_0^t \zeta_s ds)(\omega) = \int_0^t \zeta_s(\omega) ds$ для $\mathbf{P}|_{\mathcal{F}_t}$ -почти всех ω . Отсюда вытекает, что множество $\{\omega: \int_0^t \zeta_s(\omega) ds \text{ определен}\}$ имеет полную меру и принадлежит σ -алгебре $\mathcal{F}_t$. Измеримость $\int_0^t \zeta_s(\omega) ds$ относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_t$ следует из теоремы Фубини. Детали см. в [3, п. 2.1.4].

Лемма 3. Пусть согласованный скалярный случайный процесс ξ_t , $t \in [0; T]$, непрерывен в среднем степени p , $p \geq 1$. Тогда существует последовательность гладких в среднем степени p согласованных скалярных случайных процессов $u_n(t)$, сходящаяся к ξ_t в $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ равномерно по t из $[0; T]$, причем $u_n(0) = \xi(0)$, $u_n^{(k)}(0) = 0$ при всех $k \in \mathbf{N}$.

Доказательство. Как и в лемме 1, рассмотрим последовательность p_n гладких вероятностных плотностей на прямой таких, что $\text{supp}(p_n) \subseteq [0; 1/n]$. Положим

$$u_n(t) = (\xi * p_n)(t) = \int_{t-1/n}^t \xi_z p_n(t-z) dz. \quad (15)$$

Рассматривая $u_n(t)$ и ξ_t как отображения, определенные на $[0; T]$, со значениями в банаховом пространстве L^p , заключаем, что $u_n(t) \rightarrow \xi_t$ в L^p равномерно по $t \in [0; T]$. Кроме того, функция $u_n(t)$ — гладкая в силу гладкости p_n . Осталось заметить, что в силу формулы (15), где интеграл рассматривается вдоль траекторий, процесс $u_n(t)$ согласован и $u_n(0) = \xi(0)$, $u_n^{(k)}(0) = 0$ для $k \in \mathbb{N}$. Лемма доказана.

Лемма 4. Уравнение, имеющее в координатной форме вид (6), имеет сильное решение для произвольных $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^\infty)$ и согласованного случайного процесса $\xi(t)$ со значениями в $\mathbb{R}^\infty$, непрерывного в среднем степени p , $p \geq 1$, на $\mathbb{R}_+$.

Доказательство отличается от доказательства леммы 2 только в сторону упрощения и поэтому опускается.

Следующий результат хорошо известен, но для полноты изложения мы приведем его доказательство. По поводу близких результатов см. [1, теорема 6.15], [8].

Лемма 5. Пусть E — банахово пространство и заданы некоторые $A \in \mathcal{L}(E)$, $f \in C(\mathbb{R}_+, E)$ и $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, — непрерывный (непрерывный в среднем степени p , $p \geq 1$) согласованный случайный процесс со значениями в E . Тогда уравнение

$$dX(t) = AX(t)dt + f(t)dt + d\xi(t), \quad X(0) = \xi(0), \quad (16)$$

имеет единственное сильное решение X со значениями в E , причем решение X непрерывно (соответственно непрерывно в среднем степени p).

Доказательство. Лемма доказывается методом последовательных приближений. Последовательные приближения определяются формулой

$$X^{(k+1)}(t) = \xi(0) + \int_0^t AX^{(k)}(s)ds + \int_0^t f(s)ds.$$

В качестве нулевого приближения возьмем решение обыкновенного неоднородного дифференциального уравнения

$$(X^{(0)}(t))' = X^{(0)}(t)dt + f(t)dt, \quad X^{(0)}(0) = 0,$$

увеличенное на $\xi(0)$. Из согласованности $X^{(k-1)}$ следует согласованность $X^{(k)}$, из непрерывности $X^{(k-1)}$ в соответствующем смысле следует непрерывность $X^{(k)}$ в этом же смысле, так что все $X^{(k)}$ определены.

Для случая непрерывных процессов при фиксированном ω уравнение (16) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение, и $X^{(k)}(\cdot, \omega)$ сходятся к $X(\cdot, \omega)$ на $[0; T]$, причем равномерно на этом отрезке. Решение $X(\cdot, \omega)$ существует и единственно; оно согласовано, так как является пределом согласованных процессов $X^{(k)}$, и непрерывно как предел непрерывных функций $X^{(k)}(\cdot, \omega)$ при равномерной сходимости. Для непрерывных процессов утверждение леммы доказано.

Во втором случае интегральное уравнение (4) разрешимо в L^p , $p \geq 1$, как и в всяком банаховом пространстве. Решение согласовано как предел согласованных процессов. Непрерывность решения следует из (4). Лемма доказана.

3. Основной результат.

Теорема 1. Уравнение

$$dX(t) = AX(t)dt + f(t)dt + d\xi(t), \quad X(0) = \xi(0),$$

имеет сильное решение для $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^\infty)$, $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^\infty)$ и непрерывного $\{\mathcal{F}_t\}$ -согласованного случайного процесса $\xi: \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^\infty$. Если фильтрация $\{\mathcal{F}_t\}$ полна, то сильное решение существует также для непрерывного в среднем степени $p \geq 1$ согласованного процесса $\xi: \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^\infty$.

Доказательство опирается на леммы 2, 4 и 5 и проходит по схеме, описанной в [6]. Доказательство теоремы в случае, когда $\xi(t)$ — естественный винеровский процесс, приведенное в работе [6], преобразованием координат сводит общий случай к двум частным. Первый случай — конечномерный, во втором случае уравнение записывается в пространстве $\mathbf{R}^\infty$, матрица A имеет некоторый специальный вид, а случайный процесс $\xi(t)$ — естественный винеровский. Для второго случая в [6] доказывается лемма. Однако сведение к этой лемме содержит пробел, так как ошибочно предполагается, что при производимых линейных преобразованиях образом естественного винеровского процесса вновь станет естественный винеровский процесс (в то время как может получиться процесс $(\alpha_n W_n)$ с $\alpha_n \rightarrow \infty$, для которого не проходит данное в [6] доказательство леммы). Доказанные в настоящей работе леммы 2, 4 не только устраняют этот пробел, но и переносят утверждение теоремы на более широкий класс процессов. Поскольку рассуждения в [6], которые сводят доказательство теоремы к лемме, применимы с учетом лемм 2, 4, 5 к рассматриваемым нами процессам, мы получаем доказательство теоремы.

З а м е ч а н и е 1. В случае, когда процесс $\xi(t)$ непрерывен, найденное решение $X(t)$ уравнения (3) предсказуемо, так как процесс $X(t)$ согласован с семейством $\{\mathcal{F}_t\}$ и непрерывен. По той же причине предсказуемым является и процесс $\xi(t)$.

З а м е ч а н и е 2. Как было отмечено в [6], единственность решения уравнения (3) эквивалентна единственности решения уравнения $dX(t) = AX(t)dt$ с $X(0) = 0$, так как разность двух решений уравнения (3) является при каждом ω решением однородного уравнения $dX(t) = AX(t)dt$ с нулевым начальным условием. Однозначная разрешимость последнего уравнения для $A \in \mathbf{R}^\infty$ эквивалентна (см. [1, пример 4.24]) существованию $\exp(tA)$ для всех t . Согласно [5], последнее имеет место, если и только если спектр A в произведении комплексных прямых не более чем счетен.

Автор благодарит В. И. Богачева за постановку задачи и внимание к работе, а также А. Ю. Пирковского и А. С. Токарева, прочитавших предварительный вариант статьи и сделавших ряд ценных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bogachev V. I. Deterministic and stochastic differential equations in infinite dimensional spaces. — Acta Appl. Math., 1995, v. 40, № 1, p. 25–93.
2. Богачев В. И. Гауссовские меры. М.: Физматлит, 1997, 352 с.
3. Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов. М.: Физматлит, 1996, 400 с.
4. Da Prato G., Zabczyk J. Stochastic Equations in Infinite Dimensions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992, 454 p.
5. Lemmert R., Weckbach A. Charakterisierungen zeilenendlicher Matrizen mit abzählbarem Spektrum. — Math. Z., 1984, v. 188, № 1, p. 119–124.
6. Медницкий Ю. В. О существовании сильных решений линейных стохастических дифференциальных уравнений на $\mathbf{R}^\infty$. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 4, с. 826–831.
7. Шкарин С. А. Несколько результатов о разрешимости обыкновенных линейных дифференциальных уравнений в локально выпуклых пространствах. — Матем. сб., 1990, т. 181, № 9, с. 1183–1195.
8. Sussman H. An interpretation of stochastic differential equations as ordinary differential equations which depend on the sample point. — Bull. Amer. Math. Soc., 1977, v. 83, p. 296–298.

Поступила в редакцию
23.VI.1999