Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Михайлов, Barbour A. D., Chen L. H. Y., eds. **An Introduction to Stein's Method** и **Stein's Method and Applications**, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, том 51, выпуск 3, 628–630

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp49>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 05:51:38

так сказать, по живописным местам, что позволяет читателю познакомиться с интересными понятиями, результатами и приемами доказательств. Книга содержит необходимые определения понятий теории вероятностей и математической логики, является самодостаточной, легко читается и отличается изяществом изложения.

Библиография к книге включает 23 наименования. Основными по теории графов являются ссылки на известную статью П. Эрдёша и А. Реньи [1], а также на монографии [2], [3]. Основная теорема была впервые представлена в [4], подход к ее доказательству, использованный в книге, описан в [5]. Обзор результатов о законе нуля-единицы в вероятностной комбинаторике содержится в [6], [7].

Автор отмечает, что одной из первых работ по тематике, которой посвящена книга, была статья Ю.В. Глебского, Д.И. Когана, М.И. Легонького и В.А. Таланова [8], в которой доказана следующая теорема.

Пусть A — произвольное свойство первого порядка графа $G(n, \frac{1}{2})$. Тогда свойство A выполняется для графа $G(n, \frac{1}{2})$ либо почти наверное, либо почти никогда.

Позднее это утверждение было независимо доказано Р. Фагином [9].

Книга несомненно представляет интерес для специалистов по теории вероятностей, а также для тех специалистов по математической логике, которые допускают использование теории вероятностей в своих исследованиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Erdős P., Rényi A. On the evolution of random graphs. — Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl., 1960, v. 5, p. 17–61.
2. Alon N., Spencer J. H. The Probabilistic Method. New York: Wiley, 2000, 301 p.
3. Bollobás B. Random Graphs. London: Academic Press, 1985, 447 p.
4. Shalah S., Spencer J. Zero-one laws for sparse random graphs. — J. Amer. Math. Soc., 1988, v. 1, № 1, p. 97–115.
5. Spencer J. Threshold spectra via the Ehrenfeucht gate. — Discrete Appl. Math., 1991, v. 30, № 2–3, p. 235–252.
6. Spencer J. Zero-one laws with variable probability. — J. Symbolic Logic, 1993, v. 58, № 1, p. 1–14.
7. Winkler P. Random structures and zero-one laws. — Finite and Infinite Combinatorics in Sets and Logic (Banff, 1991), Dordrecht: Kluwer, 1993, p. 399–420.
8. Глебский Ю. В., Коган Д. И., Легонький М. И., Таланов В. А. Область определения и степень реализуемости формул в ограниченном исчислении предикатов. — Кибернетика, 1969, в. 5, № 2, с. 17–27.
9. Fagin R. Probabilities in finite models. — J. Symbolic Logic, 1976, v. 41, № 1, p. 50–58.

В. Ф. Колчин

Barbour A. D., Chen L. H. Y., eds. **An Introduction to Stein's Method and Stein's Method and Applications.** World Scientific, River Edge, 2005, 225 p.; 297 p. (Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Nat. Univ. Singap., v. 4, 5).

Подход к оцениванию точности аппроксимаций вероятностных распределений, называемый ныне методом Стейна, был предложен его автором в 1972 г. Он принципиально отличается от ранее использовавшихся методов и выглядит как комбинация некоторых формальных приемов, неожиданно приводящих к цели. Уже первые применения показали необычную эффективность этого метода.

В первоначальном виде этот подход предназначался для оценивания точности нормальной аппроксимации распределений сумм зависимых случайных величин, обладающих свойством перемешивания. В 1975 г. этот прием был использован Л. Ченом при оценивании точности пуассоновской аппроксимации. В обоих случаях полученные оценки оказались заметно лучше оценок, имевшихся к тому времени. Дальней-

шие исследования, проведенные большой группой ученых, позволили распространить идеи Стейна на оценивание точности аппроксимаций распределениями весьма общей природы. К настоящему времени метод Стейна является одним из наиболее сильных инструментов для исследования асимптотических свойств распределений.

Первая из рецензируемых книг состоит из четырех обзорных статей, написанных специалистами в данной области теории вероятностей. Содержащийся в этих статьях материал суммирует многочисленные научные публикации по данной проблематике и является детальным введением в теорию и приложения метода Стейна в форме, достаточной (по мнению составителей) для использования в учебных программах и самостоятельного изучения.

Статья «Stein's method for normal approximation» (авторы L. H. Y. Chen и Q.-M. Shao) посвящена вопросам применения метода Стейна для оценивания точности нормальной аппроксимации. Помимо детального описания метода, в ней приведен вывод оценок точности нормальной аппроксимации для сумм независимых и локально зависимых случайных величин, описывается использование приема «пар переставляемых величин» (exchangeable pairs) при построении оценок точности. Несколько разделов статьи посвящены выводу с помощью метода Стейна неравенств типа Берри-Эссеена для сумм независимых и локально зависимых случайных величин. Основное внимание уделяется изложению идеи метода, а не его уточнениям. Поэтому константы в полученных оценках отличаются от рекордных.

Статья «Stein's method for Poisson and compound Poisson approximation» (автор T. Erhardsson) состоит из двух частей. В первой части изучаются свойства решения уравнения Стейна для распределения Пуассона и выводятся получаемые с помощью этого уравнения известные оценки точности пуассоновской аппроксимации для распределения суммы случайных индикаторов в терминах расстояния по вариации (здесь изложение во многом следует материалу соответствующих разделов книги Barbour A. D., Holst L., Janson S., Poisson Approximation, Oxford: Oxford Univ. Press, 1992). Описываемый метод часто называют методом Чена-Стейна. Кроме этого, здесь приводятся оценки точности аппроксимации распределения суммы независимых случайных индикаторов распределением Пуассона-Шарлье и результаты применения описываемого подхода в нескольких других задачах. Вторая часть статьи Т. Эрхардссона посвящена аппроксимациям сложным пуассоновским распределением и их обобщениям на аналогичные комбинации знаковых мер. Изучаются уравнения Стейна для этих мер, приводится краткое описание вывода различных оценок точности аппроксимации. Здесь, в отличие от пуассоновского случая, в качестве объекта аппроксимации выбрано распределение суммы целочисленных (а не только индикаторных) случайных величин.

Статья «Stein's method and Poisson process approximation» (автор A. Xia) посвящена оцениванию с помощью метода Стейна точности аппроксимации распределений точечных процессов на прямой и на локально компактных полных сепарабельных метрических пространствах распределениями соответствующих пуассоновских процессов. Отметим, что во второй рецензируемой книге имеется еще одна статья того же автора на эту тему.

В трех первых статьях метод Стейна использовался для исследования конкретных аппроксимаций: нормальной, пуассоновской и т.п., причем уравнения Стейна в этих случаях выписывались, исходя из конкретных соображений. В статье «Three general approaches to Stein's method» (автор G. Reinert) построение и изучение свойств решений уравнения Стейна проводится уже для случая произвольной вероятностной меры. В основе лежит операторный подход (generator approach), суть которого состоит в построении марковского процесса с заданным стационарным распределением и выводе стандартными методами уравнения для его инфинитезимального оператора. Полученное уравнение и представляет собой уравнение Стейна для стационарного распределения. Такой подход дает одновременно и метод построения уравнения

Стейна, и некоторые соображения по поводу его решения. Далее на нескольких задачах демонстрируется техника применения этого метода. Приведены и другие способы построения уравнения Стейна. Среди них есть прием, использующий преобразование, именуемое дискретной гиббсовской мерой, плотностной подход (здесь уравнение Стейна выписывается в терминах плотности и ее производной) и подход, названный в начале статьи методом каплинг-уравнений, предполагающий наличие у распределения по крайней мере двух конечных моментов.

Вторая книга содержит 16 статей разных авторов. Пять статей посвящены вопросам дальнейшей разработки различных вариантов метода Стейна. Это следующие работы:

Goldstein L., Reinert G. Zero biasing in one and higher dimensions, and applications;

Rotar V. Stein's method, Edgeworth's expansion and a formula of Barbour;

Xia A. Stein's method for compound Poisson approximation via immigration-death processes;

Barbour A. D. Multivariate Poisson-binomial approximation using Stein's method;

Hsu E. P. Characterization of Brownian motion on manifolds through integration by parts.

Остальные 11 статей демонстрируют успешное применение метода Стейна в разнообразных задачах теории вероятностей и вероятностной комбинаторики. О широте применений метода можно судить по перечню названий этих статей:

Chrysaphinou O., Papastavridis S., Vaggelatou E. Poisson limit theorems for the appearances of attributes;

Penrose M. D., Yukich J. E. Normal approximation in geometric probability;

Lee S., Su Z. The central limit theorem for the independence number for minimal spanning trees in the unit square;

Erhardsson T. Stein's method, Markov renewal point processes, and strong memoryless times;

Shao Q.-M. An explicit Berry-Esseen bound for Student's t -statistics via Stein's method;

Bai Z. D., Devroye L., Tsai T. H. An application of Stein's method to maxima in hypercubes;

Fill J. A., Steele J. M. Exact expectations of minimal spanning trees for graphs with random edge weights;

Götze F., Tikhomirov A. N. Limit theorems for spectra of random matrices with martingale structure;

Loh W.-L. On the asymptotic distribution of some randomized quadrature rules;

Barbour A. D., Chen L. H. Y. The permutation distribution of matrix correlation statistics;

Devroye L. Applications of Stein's method in the analysis of random binary search trees.

Разумеется, статьи обеих книг различны по характеру и качеству изложения. В первой книге в методическом плане особенно удачными являются работы Чена-Шао и Райнерт. Изложение в двух других статьях скорее монографично, более того, многие результаты в них приведены без (или почти без) доказательств. Эти статьи, как и статьи второй книги, менее других приспособлены для использования в учебном процессе. В целом же, авторам этих работ можно сделать лишь один упрек — статьи (за исключением обзора Райнет в первой книге) написаны без оглядки на остальные части книги, хотя некоторое количество взаимных ссылок было бы весьма полезно.

Обе книги, несомненно, будут интересны специалистам, а их материал, безусловно, найдет применение в учебном процессе.