Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Фельдман, К теореме Скитовича–Дармуа для конечных абелевых групп, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, том 45, выпуск 3, 603–607

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp490>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 13:52:12

© 2000 г.

ФЕЛЬДМАН Г. М.*

К ТЕОРЕМЕ СКИТОВИЧА–ДАРМУА ДЛЯ КОНЕЧНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП¹⁾

Для независимых случайных величин ξ_1, ξ_2 со значениями в конечной абелевой группе X и с распределениями μ_1, μ_2 доказано, что независимость линейных статистик $L_1 = \alpha_1(\xi_1) + \alpha_2(\xi_2)$ и $L_2 = \beta_1(\xi_1) + \beta_2(\xi_2)$, где $\alpha_j, \beta_j \in \text{Aut}(X)$, влечет, что $\mu_j = m_{K_j} * E_{x_j}$, где K_j — подгруппа в X , а $x_j \in X$, $j = 1, 2$.

Ключевые слова и фразы: теорема Скитовича–Дармуа, абелевы группы, линейные статистики.

Пусть ξ_j , $j = 1, 2, \dots, n$, $n \geq 2$, — независимые вещественнозначные случайные величины. Рассмотрим две линейные статистики $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \dots + \beta_n\xi_n$, $n \geq 2$, где коэффициенты α_j, β_j отличны от нуля. Классическая теорема Скитовича–Дармуа утверждает, что если L_1 и L_2 независимы, то случайные величины ξ_j гауссовские ([1], [2], см. также [3, гл. 3]). Эта теорема была обобщена Гурье и Олкиным на случай, когда ξ_j — независимые случайные векторы в пространстве $\mathbb{R}^m$, а α_j, β_j — несингулярные матрицы. Они доказали, что независимость L_1 и L_2 влечет гауссовость случайных векторов ξ_j ([4], см. также [3, гл. 3]).

Рассмотрим следующую общую постановку задачи. Пусть X — локально компактная сепарабельная абелева метрическая группа, ξ_j , $j = 1, 2, \dots, n$, $n \geq 2$, — независимые случайные величины со значениями в X и с распределениями μ_j , пусть $\text{Aut}(X)$ — группа топологических автоморфизмов X . Пусть $L_1 = \alpha_1(\xi_1) + \dots + \alpha_n(\xi_n)$ и $L_2 = \beta_1(\xi_1) + \dots + \beta_n(\xi_n)$, $n \geq 2$, где $\alpha_j, \beta_j \in \text{Aut}(X)$. Обозначим через $\Gamma(X)$ множество гауссовских распределений на группе X (см. [5]) и через $I(X)$ — множество идемпотентных распределений на группе X , т.е. множество сдвигов распределений Хаара m_K компактных подгрупп K группы X .

З а д а ч а. Дать полное описание групп X , для каждой из которых независимость L_1 и L_2 влечет, что все $\mu_j \in \Gamma(X) * I(X)$. (Сдвиги на идемпотентные распределения возникают естественным образом в характеристизационных задачах на группах. См., например, [6]–[10], где рассмотрены групповые аналоги характеристизационных теорем Бернштейна и Поляка.)

Эта задача была решена в статьях [11]–[13] соответственно в классах конечных абелевых групп, компактных абелевых групп и дискретных периодических абелевых групп. Обозначим через $\mathbb{Z}(n)$ группу вычетов по модулю n . Следующий результат был получен, в частности, в [11].

Теорема А. (I) *Предположим, что конечная абелева группа X имеет вид*

$$\mathbb{Z}(2^{m_1}) + \dots + \mathbb{Z}(2^{m_l}), \quad 0 \leq m_1 < \dots < m_l. \quad (1)$$

Тогда независимость линейных статистик L_1 и L_2 влечет, что все μ_j — вырожденные распределения. Предположим, что X имеет вид

$$\mathbb{Z}(3) + G, \quad (2)$$

где группа G такая же, как в (1). Тогда или все μ_j — вырожденные распределения, или существуют такие сдвиги μ'_j распределений μ_j , что носители всех распределений μ'_j лежат в $\mathbb{Z}(3)$, и $\mu'_{j_1} = \mu'_{j_2} = m_{\mathbb{Z}(3)}$ по крайней мере для двух распределений μ_{j_1} и μ_{j_2} .

(II) *В случае, если конечная абелева группа X не изоморфна группам вида (1) или (2), существуют независимые случайные величины ξ_j , $j = 1, 2, \dots, n$, $n \geq 2$, со*

* ФТИНТ НАН Украины, пр. Ленина, 47, 310164 Харьков, Украина; e-mail: Feldman@ilt.kharkov.ua

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Programme de Bourses de Recherche Scientifique et Technique de l'OTAN (France).

значениями в группе X и с распределениями μ_j и автоморфизмы $\alpha_j, \beta_j \in \text{Aut}(X)$ такие, что линейные статистики L_1 и L_2 независимы, но все $\mu_j \notin I(X)$.

Построение независимых случайных величин ξ_j со значениями в X и с распределениями $\mu_j \notin I(X)$ и автоморфизмов $\alpha_j, \beta_j \in \text{Aut}(X)$ для конечной абелевой группы, которая не изоморфна группам вида (1) или (2), было дано в [11] для $n \geq 4$.

Настоящая работа стимулирована следующим достаточно неожиданным обстоятельством. Оказывается, что если мы ограничимся случаем $n = 2$, т.е. будем рассматривать только линейные статистики $L_1 = \alpha_1(\xi_1) + \alpha_2(\xi_2)$ и $L_2 = \beta_1(\xi_1) + \beta_2(\xi_2)$, то теорема Скитовича–Дармуа верна для всех конечных абелевых групп (см. ниже теорему 1)! Ситуация, противоположная классической, где нет разницы между случаем $n = 2$ и случаем произвольного n .

Прежде чем перейти к доказательству основной теоремы, напомним некоторые определения и условия об обозначениях.

Обозначим через $Y = X^*$ группу характеров группы X , через (x, y) — значение характера $y \in Y$ на элементе $x \in X$. Если H — подгруппа группы Y , обозначим через $A(X, H)$ ее аннулятор: $A(X, H) = \{x \in X: (x, y) = 1 \text{ для всех } y \in H\}$. Для любого $\alpha \in \text{Aut}(X)$ определим сопряженный автоморфизм $\tilde{\alpha} \in \text{Aut}(Y)$ по формуле $(x, \tilde{\alpha}(y)) = (\alpha(x), y)$ для всех $x \in X, y \in Y$. Сверточную полугруппу вероятностных распределений на X обозначим через $M^1(X)$. Если $\mu \in M^1(X)$, обозначим через $\hat{\mu}(y)$ его характеристическую функцию: $\hat{\mu}(y) = \int_X (x, y) d\mu(x)$. Обозначим через $\sigma(\mu)$ носитель $\mu \in M^1(X)$. Отметим, что если H — замкнутая подгруппа Y и $\hat{\mu}(y) \equiv 1$ при $y \in H$, то $\hat{\mu}(y + h) = \hat{\mu}(y)$ для всех $y \in Y, h \in H$ и $\sigma(\mu) \subset A(X, H)$. Для $\mu \in M^1(X)$ определим распределение $\bar{\mu} \in M^1(X)$ по формуле $\bar{\mu}(E) = \mu(-E)$ для всех борелевских множеств $E \subset X$. Заметим, что $\hat{\bar{\mu}}(y) = \overline{\hat{\mu}(y)}$. Обозначим через E_x вырожденное распределение, сосредоточенное в точке $x \in X$.

Теорема 1. Пусть ξ_1, ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в конечной абелевой группе X и с распределениями μ_1, μ_2 . Тогда независимость линейных статистик $L_1 = \alpha_1(\xi_1) + \alpha_2(\xi_2)$ и $L_2 = \beta_1(\xi_1) + \beta_2(\xi_2)$, где $\alpha_j, \beta_j \in \text{Aut}(X)$, влечет, что $\mu_j = t_{K_j} * E_{x_j}$, где K_j — подгруппа в X , а $x_j \in X, j = 1, 2$.

Доказательство. Заметим, что если μ — распределение случайной величины ξ со значениями в X и $\alpha \in \text{Aut}(X)$, то характеристическая функция распределения случайной величины $\alpha(\xi)$ равна $\hat{\mu}(\tilde{\alpha}(y))$. Поэтому, полагая $\zeta_j = \alpha_j(\xi_j), j = 1, 2$, мы сводим доказательство к случаю, когда линейные статистики L_1 и L_2 имеют вид $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \delta_1(\xi_1) + \delta_2(\xi_2)$, где $\delta_j \in \text{Aut}(X)$. Условие независимости L_1 и L_2 эквивалентно условию, что характеристические функции $\hat{\mu}_1(y)$ и $\hat{\mu}_2(y)$ удовлетворяют уравнению

$$\hat{\mu}_1(u + \tilde{\delta}_1 v) \hat{\mu}_2(u + \tilde{\delta}_2 v) = \hat{\mu}_1(u) \hat{\mu}_2(u) \hat{\mu}_1(\tilde{\delta}_1 v) \hat{\mu}_2(\tilde{\delta}_2 v), \quad u, v \in Y. \quad (3)$$

Очевидно, что без ограничения общности мы можем предполагать, что $\tilde{\delta}_1 = I$, где I — единичный автоморфизм группы Y . Положим $f(y) = \hat{\mu}_1(y), g(y) = \hat{\mu}_2(y), a = \tilde{\delta}_2$ и перепишем уравнение (3), используя эти обозначения. Мы получаем

$$f(u + v) g(u + av) = f(u) g(u) f(v) g(av), \quad u, v \in Y. \quad (4)$$

Заметим, что характеристические функции распределений $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j, j = 1, 2$, также удовлетворяют уравнению (4), и $\hat{\nu}_j(y) = |\hat{\mu}_j(y)|^2 \geq 0$. Это дает нам возможность решать уравнение (4) в предположении, что $f(y) \geq 0, g(y) \geq 0, f(-y) = f(y), g(-y) = g(y)$. Мы докажем, что $f(y) = g(y) = \hat{m}_K(y)$, где K — некоторая подгруппа X . Отсюда будет следовать утверждение теоремы.

Рассмотрим два возможных случая.

(I) Для каждого $y \in Y, y \neq 0$, выполнено неравенство $ay \neq y$.

Другими словами, гомоморфизм $b = I - a$ имеет нулевое ядро, а так как группа Y конечна, это значит, что $b \in \text{Aut}(X)$. Полагая $v = -u$ в (4), мы находим

$$g(bu) = f^2(u) g(u) g(au), \quad u \in Y. \quad (5)$$

Учитывая, что $f(u) \leq 1$, откуда получаем

$$g(bu) \leq g(u), \quad u \in Y. \quad (6)$$

Поскольку группа Y конечна, то конечна и ее группа автоморфизмов $\text{Aut}(Y)$, и, следовательно, $b^n = I$ для некоторого натурального n . Будем предполагать, что n здесь — наименьшее из возможных. Из (6) тогда следует $g(u) = g(b^n u) \leq \dots \leq g(bu) \leq g(u)$, $u \in Y$, и, следовательно,

$$g(u) = g(bu) = \dots = g(b^{n-1}u), \quad u \in Y.$$

Таким образом, на каждой из орбит $O_u = \{u, bu, \dots, b^{n-1}u\}$ функция $g(y)$ принимает постоянное значение, зависящее, вообще говоря, от u .

Положим теперь в (4) $u = -av$. Получаем

$$f(bv) = f(av)g^2(av)f(v), \quad v \in Y. \quad (7)$$

Рассуждая аналогично, мы находим, что функция $f(y)$ также принимает постоянное значение на каждой из орбит O_u .

Очевидно, что группу Y можно представить, как объединение непересекающихся орбит. Обозначим через E объединение орбит, где $g(y) > 0$, и представим Y , как объединение $Y = E \cup E'$. Из (5) следует, что $g(ay) = 1$ для всех $y \in E$. Это значит, в частности, что $a(E) \subset E$. Поскольку a — взаимно однозначное отображение и E — конечное множество, то $a(E) = E$. Следовательно, $g(y) = 1$ при $y \in E$. Принимая во внимание, что $g(y) = 0$ при $y \in E'$, мы видим, что $g(y) = \hat{m}_K(y)$, где $K = A(X, E)$.

Из (5) следует также, что $f(y) = 1$ при $y \in E$. Проверим, что $f(y) = 0$, если $y \in E'$. Предположим, что $v \in E'$. Поскольку $a(E') = E'$, то $av \in E'$ и, следовательно, $g(av) = 0$. Тогда из (7) находим, что $f(bv) = 0$. Поскольку $f(v) = f(bv)$, то $f(v) = 0$. Тем самым доказано, что и $f(y) = \hat{m}_K(y)$.

В случае (I) теорема доказана.

(II) Существует элемент $y_0 \in Y$, $y_0 \neq 0$, такой, что $ay_0 = y_0$.

Положим $B = \{y \in Y: ay = y\}$. Очевидно, что B — подгруппа Y , инвариантная относительно a . Рассмотрим ограничение уравнения (4) на B . Мы получим

$$f(u+v)g(u+v) = f(u)g(u)f(v)g(v), \quad u, v \in B. \quad (8)$$

Обозначим $h(y) = f(y)g(y)$. Из (8) следует, что функция $h(y)$ на подгруппе B удовлетворяет уравнению $h(u+v) = h(u)h(v)$, $u, v \in B$, и поэтому $h(y) = 1$ для каждого $y \in B$. Отсюда $f(y) = g(y) = 1$ при $y \in B$, а значит, $\sigma(\mu_j) \subset A(X, B)$, $j = 1, 2$.

Поскольку функции $f(y)$ и $g(y)$ являются B -инвариантными, они индуцируют функции $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ на фактор-группе Y/B , именно, $\tilde{f}([y]) = f(y)$, $\tilde{g}([y]) = g(y)$, $y \in [y]$. Автоморфизм a также индуцирует автоморфизм $\hat{a}$ на фактор-группе Y/B по формуле $\hat{a}[y] = [ay]$, $y \in [y]$. Это позволяет нам рассматривать уравнение (4) на фактор-группе Y/B . Индуцированный автоморфизм $\hat{a}$ может, как и ранее, удовлетворять условию (II). (Очевидно, что если $\hat{a}[y] = [y]$, то $b^2y = 0$ при $y \in [y]$.) Повторяя описанную процедуру, мы за конечное число шагов получим индуцированный автоморфизм, который уже удовлетворяет условию (I). (Отметим, кстати, что если $b^m y = 0$ при некотором m и каждом $y \in Y$, то это означает, что распределения μ_1 и μ_2 — вырожденные.)

Теорема 1 полностью доказана.

Теорема 1 позволяет доказать следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть ξ_1, ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе $X = \mathbf{R}^n + G$, где G — конечная абелева группа, и с распределениями μ_1, μ_2 . Тогда независимость линейных статистик $L_1 = \alpha_1(\xi_1) + \alpha_2(\xi_2)$ и $L_2 = \beta_1(\xi_1) + \beta_2(\xi_2)$, где $\alpha_j, \beta_j \in \text{Aut}(X)$, влечет, что $\mu_j \in \Gamma(X) * I(X)$, $j = 1, 2$.

Доказательство. Будем предполагать, чтобы не усложнять обозначения, что $n = 1$, т.е. считать, что $X = \mathbf{R} + G$. Тогда $Y = X^* \approx \mathbf{R} + H$, где $H = G^*$. Элементы группы Y будем обозначать через (s, h) , $s \in \mathbf{R}$, $h \in H$.

Заметим, что для произвольного автоморфизма $c \in \text{Aut}(Y)$ выполнено $c(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$, поскольку $\mathbf{R}$ — связная компонента нуля группы Y , и $c(H) = H$, поскольку H — подгруппа в Y , состоящая из всех компактных элементов. Поэтому любой автоморфизм $c \in \text{Aut}(Y)$ имеет вид $c(s, h) = (cs, ch)$ (мы сохраняем обозначение c для сужений автоморфизма $c \in \text{Aut}(Y)$ на $\mathbf{R}$ и на H). Рассуждая так же, как и при доказательстве

теоремы 1, мы сведем доказательство теоремы 2 к решению уравнения (4), которое в наших обозначениях имеет вид

$$\begin{aligned} f(s + s', h + h') g(s + as', h + ah') \\ = f(s, h) g(s, h) f(s', h') g(as', ah'), \quad (s, h), (s', h') \in Y. \end{aligned} \quad (9)$$

Полагая в (9) $h = h' = 0$, по теореме Скитовича-Дармуа получаем

$$f(s, 0) = \exp\{-\sigma_1 s^2 + it_1 s\}, \quad g(s, 0) = \exp\{-\sigma_2 s^2 + it_2 s\}, \quad (10)$$

где $\sigma_j \geq 0$, $t_j \in \mathbf{R}$, $j = 1, 2$.

Положим в (9) $s = s' = 0$. Мы получим функциональное уравнение

$$f(0, h + h') g(0, h + ah') = f(0, h) g(0, h) f(0, h') g(0, ah'), \quad h, h' \in Y. \quad (11)$$

Как следует из доказательства теоремы 1, любое решение уравнения (11) имеет вид

$$f(0, h) = \hat{m}_K(h)(g_1, h), \quad g(0, h) = \hat{m}_K(h)(g_2, h), \quad h \in H, \quad (12)$$

где K — подгруппа группы G , а $g_1, g_2 \in G$. Заменяя, если это необходимо, распределения μ_j их сдвигами, можно считать, что в (12) $g_1 = g_2 = 0$. Положим $E = A(H, K)$, тогда

$$f(0, h) = g(0, h) = \begin{cases} 1, & h \in E, \\ 0, & h \notin E. \end{cases} \quad (13)$$

Из равенств (13) следует, что характеристические функции $f(0, h)$ и $g(0, h)$ E -инвариантны. Как следует из доказательства теоремы 1, подгруппа E инвариантна относительно a . Это позволяет естественным образом рассмотреть уравнение (9) на фактор-группе Y/E , полагая

$$\tilde{f}([y]) = f(y), \quad \tilde{g}([y]) = g(y), \quad \tilde{a}[y] = [ay].$$

По существу это означает, что мы переходим от рассмотрения случайных величин со значениями в группе $\mathbf{R} + G$ к случайным величинам со значениями в группе $\mathbf{R} + K$. Положим $L = K^*$. Тогда для индуцированного функционального уравнения мы будем иметь

$$\{l \in L: \tilde{f}(0, l) = 1\} = \{l \in L: \tilde{g}(0, l) = 1\} = \{0\}. \quad (14)$$

Обозначим $E_1 = \{l \in L: \tilde{a}l = l\}$. Из (11) следует, что $\tilde{f}(0, l) = \tilde{g}(0, l) = 1$ при всех $l \in E_1$, а в силу (14) это значит, что $E_1 = \{0\}$, т.е. $I - \tilde{a} \in \text{Aut}(L)$.

Сказанное выше позволяет нам с самого начала считать выполненными следующие условия:

$$f(0, h) = g(0, h) = \begin{cases} 1, & h = 0, \\ 0, & h \neq 0, \end{cases} \quad (15)$$

$$I - a \in \text{Aut}(H). \quad (16)$$

Полагая в (9) $s = 0$, $h' = 0$, получаем

$$f(s', h) g(as', h) = f(0, h) g(0, h) f(s', 0) g(as', 0), \quad s' \in \mathbf{R}, h' \in H. \quad (17)$$

При $h \neq 0$ правая часть уравнения (17), как следует из (15), обращается в нуль. Значит,

$$f(s', h) g(as', h) \equiv 0, \quad s' \in \mathbf{R}.$$

Из (10) следует, что при любом фиксированном $h \in H$ функции $f(s, h)$ и $g(s, h)$ являются целыми по s (см. [14, гл. 2]). Поэтому либо $f(s, h) \equiv 0$, либо $g(s, h) \equiv 0$, $s \in \mathbf{R}$, $h \neq 0$.

Выберем произвольный элемент $h_0 \in H$, $h_0 \neq 0$. Найдем h и h' из системы уравнений

$$\begin{cases} h + h' = 0, \\ h + ah' = h_0, \end{cases}$$

которая в силу (16) имеет единственное решение. Подставляя найденные h и h' в (9) и учитывая (10), получаем, что $g(s, h_0) \equiv 0$, $s \in \mathbf{R}$. Отсюда вытекает представление

$$g(s, h) = \begin{cases} \exp\{-\sigma_2 s^2 + it_2 s\}, & h = 0, \\ 0, & h \neq 0. \end{cases}$$

Аналогичное представление получаем и для $f(s, h)$. Теорема 2 полностью доказана.

Автор выражает свою благодарность профессорам Ж.-Ж. Лоебу и П. Грачику за интересные обсуждения характеристизационных задач на неабелевых группах. Настоящая работа возникла в результате этих дискуссий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скитович В. П. Об одном свойстве нормального распределения. — Докл. АН СССР, 1953, т. 89, с. 217–219.
2. Darrois G. Analyse générale des liaisons stochastiques. — Rev. Inst. Internat. Statist., 1953, v. 21, p. 2–8.
3. Казан А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р. Характеризационные задачи математической статистики. М.: Наука, 1972, 656 с.
4. Ghurye S. G., Olkin I. A characterization of the multivariate normal distribution. — Ann. Math. Statist., 1962, v. 33, p. 553–541.
5. Parthasarathy K. R., Ranga Rao R., Varadhan S. R. S. Probability distributions on locally compact Abelian groups. — Illinois J. Math., 1963, v. 7, p. 337–369.
6. Рухин А. Л. Об одной теореме С. Н. Бернштейна. — Матем. заметки, 1969, т. 6, с. 301–307.
7. Рухин А. Л. Некоторые статистические и вероятностные задачи на группах. — Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1970, т. 11, с. 52–109.
8. Heyer H., Rall Ch. Gauss'sche Wahrscheinlichkeitsmasse auf Corwischen Gruppen. — Math. Z., 1972, v. 128, p. 343–361.
9. Фельдман Г. М. Гауссовские распределения в смысле Бернштейна на группах. — Теория вероятн. и ее примен., 1986, т. XXXI, в. 1, с. 47–58.
10. Fel'dman G. M. The Polya characterization of a Gaussian measure on groups. — Studia Math., 1987, v. 87, p. 9–21.
11. Фельдман Г. М. К теореме Скитовича–Дармуа на абелевых группах. — Теория вероятн. и ее примен., 1992, т. 37, в. 4, с. 695–708.
12. Фельдман Г. М. Теорема Скитовича–Дармуа для компактных групп. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 4, с. 901–906.
13. Фельдман Г. М. Теорема Скитовича–Дармуа для дискретных периодических абелевых групп. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 4, с. 747–756.
14. Fel'dman G. M. Arithmetic of Probability Distributions and Characterisation Problems on Abelian Groups. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993, 223 p.

Поступила в редакцию
1.XII.1998

© 2000 г.

GEIGER J.*, KERSTING G.*

THE SURVIVAL PROBABILITY OF A CRITICAL BRANCHING PROCESS
IN RANDOM ENVIRONMENT¹⁾

В статье описывается асимптотическое поведение вероятности выживания для критического ветвящегося процесса в случайной среде. В частном случае, когда число потомков определяется независимыми одинаково (геометрически) распределенными случайными величинами, и в несколько более общем случае, когда распределение числа потомков имеет дробно-линейную производящую функцию, М. В. Козлов [10] доказал,

* Universität Frankfurt am Main, Fachbereich Mathematik, Postfach 11 19 32, D-60054 Frankfurt/Main, Deutschland.

¹⁾ Partially supported by the German Research Foundation (DFG).