Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Коростелев, А. Л. Рухин, Риск по Бахадуру рекуррентных оценок многомерного параметра, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, том 45, выпуск 4, 639–656

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp496>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 15:41:45

© 2000 г.

КОРОСТЕЛЕВ А. П.*, РУХИН А. Л.**

РИСК ПО БАХАДУРУ РЕКУРРЕНТНЫХ ОЦЕНОК МНОГОМЕРНОГО ПАРАМЕТРА

Исследуется рекуррентная оценка многомерного параметра в ситуации, когда качество оценивания характеризуется бинарной 0–1 функцией потерь. Вычисляются вероятности больших уклонений и асимптотическая эффективность этих процедур. Результаты распространены на случай рекуррентного поискового алгоритма в полупространстве с нормальным отражением на границе.

Ключевые слова и фразы: риск по Бахадuru, большие уклонения, марковские процессы, рекуррентное оценивание, стохастическая аппроксимация.

1. Введение. Пусть независимые одинаково распределенные наблюдения $X_1, \dots, X_n$ имеют общую плотность вероятности $f(x, \theta)$, которая зависит от неизвестного параметра θ . В задаче рекуррентного оценивания параметра θ оценка δ_k в каждый момент k может зависеть лишь от значения оценки в предыдущий момент δ_{k-1} и текущего наблюдения X_k .

Невельсон и Хасьминский [10] исследовали связь между задачами рекуррентного оценивания и стохастической аппроксимации. В этой монографии обсуждается вопрос о том, как построить последовательность рекуррентных оценок, которые были бы асимптотически эффективны при квадратичной функции потерь. Такая последовательность оценок, впервые построенная Сакрисоном [13], может рассматриваться как ряд последовательных приближений решения уравнения правдоподобия. Аналогичные процедуры были разработаны Саксом [12] и Фабианом [3] при разных условиях регулярности. Вероятности больших уклонений были использованы Коростелевым [6] для анализа условий сходимости процедур стохастической аппроксимации и рекуррентного оценивания. Рухин [11] изучал пошаговую или рекуррентную задачу принятия решений.

В настоящей работе мы исследуем асимптотическое поведение риска по Бахадuru при рекуррентном оценивании. Пусть D_θ является открытым множеством, содержащим θ . Поведение оценки $\delta_n = \delta_n(X_1, \dots, X_n)$

*Department of Mathematics, Wayne State University, Detroit MI 48202, USA.

**Department of Mathematics and Statistics, UMBC, Baltimore MD 21250, USA;
e-mail: rukhin@pc19.math.umbc.edu

параметра θ будет измеряться вероятностью (так называемый риск по Бахадуру)

$$\beta_n(\delta_n, \theta, D_\theta) = n^{-1} \ln \mathbf{P}_\theta\{\delta_n \notin D_\theta\}. \quad (1)$$

Если D_θ — шар радиуса c с центром в θ , то мы получаем классическую вероятностную характеристику δ_n , которой часто описывают качество доверительных интервалов. Она также является основой теории асимптотической эффективности по Бахадуру [1].

Предположим, что $\psi(x, \vartheta)$ — измеримая вектор-функция, зависящая от $x, \vartheta \in \mathbf{R}^p$. (Обычно ψ — это градиент выпуклой функции.) Определим оценку δ_k следующей рекуррентной формулой:

$$\delta_k = \delta_{k-1} + \frac{J^{-1}\psi(X_k, \delta_{k-1})}{k}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

с начальным условием δ_0 . Здесь мы полагаем, что J — невырожденная матрица нормализации, которая выбирается на основе знания ψ и f .

Оценку (1) можно интерпретировать как рекуррентную оценку минимального контраста или М-оценку. Эта оценка обладает многими замечательными свойствами классической М-оценки, определяемой как корень уравнения

$$\sum_{k=1}^n \psi(X_k, \vartheta) = 0. \quad (3)$$

В том случае, когда $\psi(x, \vartheta) = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln f(x, \vartheta)$, а J является информационной матрицей Фишера, соотношение (2) приводит к упомянутой выше оценке Сакрисона — рекуррентному аналогу оценки максимального правдоподобия.

Когда параметрическое семейство $f(x, \vartheta)$ известно, такой выбор ψ оптимален. Однако иной выбор функции ψ может быть интересен при не полностью определенной модели или при робастном оценивании, например, когда желательно использовать ограниченные функции.

В одномерном случае, когда $p = 1$, $D_\theta = (\theta - c, \theta + c)$, $c > 0$, и ψ, J удовлетворяют некоторым условиям регулярности, явная величина предельного значения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n(\delta_n, \theta, D_\theta) = -V_\theta(x)$$

была найдена в [9].

В п. 2 в предположениях регулярности найдено предельное выражение для $\beta_n(\delta_n, \theta, D_\theta)$ при произвольной размерности p . Как обычно в теории больших отклонений (см. [5]), формула для $\beta_n(\delta_n, \theta, D_\theta)$ получена в форме минимального значения интегрального функционала. Особенностью задачи в нашем случае является то, что этот функционал неоднороден по времени.

Как правило, в рекуррентном оценивании траектория δ_k сходится к θ при $k \rightarrow \infty$, где точка θ может быть интерпретирована как точка экстремума некоторой задачи оптимизации. Если эта точка экстремума находится в области, отличной от всего пространства $\mathbf{R}^p$, то имеет смысл ограничить траектории поисковой процедуры (2) той же самой областью.

В п. 3 мы изучаем ситуацию, когда поиск ограничен полупространством и рекуррентная оценка (2) модифицируется условием нормального отражения на границе области. Пример линейной системы при гауссовском шуме рассмотрен в п. 2. Он может быть интересен для сравнения с классической асимптотической нормальностью. В п. 3 исследуется более сложный пример, иллюстрирующий несколько неожиданное поведение модифицированной оценки с отражением на границе. Доказательства всех результатов отнесены в приложение (п. 4).

2. Рекуррентные процедуры и риск по Бахадур. Для изучения асимптотического поведения риска по Бахадур (1) при заданной области D_θ нам потребуются некоторые условия. Во-первых, мы предполагаем априори, что θ принадлежит кубу $[-A, A]^p$, $A > 0$, и существует некий больший куб $[-K, K]^p$ такой, что при всех $\theta \in [-A, A]^p$ имеет место включение: $D_\theta \subseteq [-K, K]^p$. Введем обозначения

$$m_\theta(\vartheta) = J^{-1} \mathbf{E}_\theta \psi(X, \vartheta) = J^{-1} \int_{\mathbf{R}^p} \psi(x, \vartheta) f(x, \theta) dx, \quad \vartheta \in \mathbf{R}^p,$$

$$v_k(x, z) = z + \frac{J^{-1} \psi(x, z)}{k}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad \forall z \in \mathbf{R}^p,$$

где J — невырожденная матрица.

Предположение 1. Функция $m_\theta(\cdot)$ задает гладкое векторное поле в $\mathbf{R}^p$. Для любого фиксированного $\theta \in [-A, A]^p$ точка $\vartheta = \theta$ является единственным устойчивым положением равновесия динамической системы $\dot{x}_t = m_\theta(x_t)$ в кубе $[-K, K]^p$; для любого начального условия $x_0 \in [-K, K]^p$ траектория x_t , $t \geq 0$, остается в этом кубе и $x_t \rightarrow \theta$ при $t \rightarrow \infty$.

Зададим модифицированную рекуррентную процедуру (2) посредством усечения:

$$\delta_k = \begin{cases} v_k(X_k, \delta_{k-1}), & \text{если } v_k(X_k, \delta_{k-1}) \in [-K, K]^p, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (4)$$

при нулевом начальном условии $\delta_0 = 0$. Усечение в (4) принимает во внимание возможную неединственность решения уравнения $m_\theta(\vartheta) = 0$ во всем пространстве $\mathbf{R}^p$. В предположении 1 такое решение единственно в кубе $[-K, K]^p$.

Предположение 2. Кумулянта

$$G_\theta(v, \vartheta) = \ln \int_{\mathbf{R}^p} \exp \{v^T J^{-1} \psi(x, \vartheta)\} f(x, \theta) dx$$

конечна для любого $v \in \mathbf{R}^p$ и липшицева по ϑ , $\vartheta \in [-K, K]^p$, равномерно относительно $\theta \in [-A, A]^p$.

Определим

$$H_\theta(u, \vartheta) = \sup_v [u^T v - G_\theta(v, \vartheta)], \quad u \in \mathbf{R}^p,$$

как преобразование Лежандра функции $G_\theta(v, \vartheta)$ по переменной v . Следующее предположение позволяет применить теорию больших уклонений для марковских процессов, следуя работе [14].

Предположение 3. Функция $H_\theta(u, \vartheta)$ конечна при всех $u \in \mathbf{R}^p$ и дважды непрерывно дифференцируема по u на любом компактном множестве, причем равномерно по $\vartheta \in [-K, K]^p$ и $\theta \in [-A, A]^p$.

Введем множество вектор-функций $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_p(t))^T$:

$$\begin{aligned} \Phi(x) = \{ & \varphi(t), t \in (-\infty, 0]: \varphi(t) \text{ кусочно абсолютно непрерывны;} \\ & \varphi \in [-K, K]^p; \text{ в каждой точке разрыва } \varphi(t-0) \in \partial[-K, K]^p, \\ & \varphi(t+0) = 0; \quad \varphi(0) = x \in [-K, K]^p \}. \end{aligned}$$

Функции из $\Phi(x)$ призваны отразить свойства траекторий системы (4) в иной шкале времени: они начинаются в $t = -\infty$ и заканчиваются в момент времени $t = 0$ в заданной точке x .

Для неотрицательных τ определим функционал действия $I_{(\tau, 0)}(\varphi)$ как

$$I_{(\tau, 0)}(\varphi) = \int_{\tau}^0 e^t H_\theta(\dot{\varphi}(t), \varphi(t)) dt,$$

где $\dot{\varphi}(t) = (\frac{d}{dt}\varphi_1(t), \dots, \frac{d}{dt}\varphi_p(t))^T$. Следующая функция, называемая квазипотенциалом, описывает асимптотическое поведение риска по Бахаду-ру рекуррентной процедуры (1):

$$V_\theta(x) = \inf_{\varphi \in \Phi(x)} I_{(-\infty, 0)}(\varphi), \quad x \in [-K, K]^p, \quad \theta \in [-A, A]^p.$$

Отметим, что $V_\theta(x) \geq 0$ и $V_\theta(\theta) = 0$. Действительно, функция $H_\theta(u, \vartheta)$ выпукла по u , неотрицательна и $H_\theta(0, \theta) = 0$ (см. [5, раздел 5.1]).

Теорема 1. В предположениях 1–3 риск по Бахадуру (1) рекуррентной оценки (4) сходится равномерно относительно $\theta \in [-A, A]^p$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n(\delta_n, \theta, D_\theta) = - \inf_{x \notin D_\theta} V_\theta(x). \quad (5)$$

З а м е ч а н и е 1. Множества уровней $W_\theta(\lambda)$ квазипотенциала, определяемые для любого $\lambda \geq 0$ как

$$W_\theta(\lambda) = \{x: V_\theta(x) \leq \lambda\},$$

играют важную роль в описании асимптотического поведения процедуры (4). Действительно, формула (5) может быть переписана в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n(\delta_n, \theta, D_\theta) = \inf \left\{ \lambda: D_\theta^c \cap W_\theta(\lambda) \neq \emptyset \right\},$$

где D_θ^c обозначает дополнение к D_θ . В частности, если множество $W_\theta^c(\lambda) \cap [-K, K]^p$ непусто, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n(\delta_n, \theta, W_\theta(\lambda)) = -\lambda,$$

т.е. $W_\theta(\lambda)$ очерчивает множество равных вероятностей больших отклонений.

Асимптотическое поведение $\beta_n(\delta_n^*, \theta, D_\theta)$ оценки максимального правдоподобия δ_n^* было детально изучено Бахадуром [1]. В наших обозначениях результат его теоремы 6.1 может быть сформулирован так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n(\delta_n, \theta, W_\theta(\lambda)) = -\lambda[1 + o_\lambda(1)],$$

где $o_\lambda(1) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$, а

$$W_\theta(\lambda) = \left\{ x \in \mathbf{R}^p: \frac{1}{2} (x - \theta)^T I_f(\theta) (x - \theta) \leq \lambda \right\}$$

— эллипсоид, определяемый информационной матрицей Фишера $I_f(\theta)$.

Как было показано в [4], [5], малые значения λ соответствуют гауссовской аппроксимации вероятностей больших отклонений в (4). Следующий пример иллюстрирует некоторые детали.

П р и м е р 1. Если $\vartheta - \theta$ мало, то $m_\theta(\vartheta) \approx -\mathcal{K}[\vartheta - \theta]$, где $-\mathcal{K} = \nabla_v m_\theta(v)|_{v=\theta}$. Пусть

$$F = F(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} J^{-1} \psi(x, \theta) \psi^T(x, \theta) [J^T]^{-1} f(x, \theta) dx,$$

F предполагается положительно определенной (невырожденной, симметричной) матрицей. Разложение Тейлора функции $G_\theta(v, \vartheta)$ в точке $v = 0$, $\vartheta = \theta$ показывает, что

$$G_\theta(v, \vartheta) \approx -v^T \mathcal{K}[\vartheta - \theta] + \frac{1}{2} v^T F v. \quad (6)$$

Это и является аппроксимацией возмущенной динамической системы $\dot{x}(t) = -\mathcal{K}[x(t) - \theta]$, $t \geq 0$, гауссовским белым шумом с ковариационной матрицей F .

Мы примем (6) за основу при явном вычислении квазипотенциала. Следующее предложение показывает, что теорема 1 согласуется с классическими результатами по асимптотической нормальности (см. [10]).

Предложение 1. Пусть $A = K = \infty$, и пусть функция $G_\theta(v, \vartheta)$ задается правой частью равенства (6). Предположим, что матрица $-\mathcal{K} + \frac{1}{2}\mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ обозначает единичную матрицу, устойчива. Тогда

$$V_\theta(x) = \frac{1}{2} (x - \theta)^T \mathcal{S}^{-1} (x - \theta),$$

где

$$\mathcal{S} = \int_{-\infty}^0 e^t \exp \{t(\mathcal{K} - \mathbf{I})\} F \exp \{t(\mathcal{K} - \mathbf{I})\} dt.$$

Если $\mathcal{K}$ и F коммутируют, то $\mathcal{S} = (2\mathcal{K} - \mathbf{I})^{-1} F$.

З а м е ч а н и е 2. Если функция $G_\theta(v, \vartheta)$ со своими двумя производными по v может быть аппроксимирована правой частью (6) при $\vartheta \rightarrow \theta$ и $v \rightarrow 0$, то аналог предложения 1 справедлив для малых значений λ . Все рассмотрения при этом локальны, усечение в (4) существенно, и, вообще говоря, нельзя полагать $A = K = \infty$.

З а м е ч а н и е 3. Если матрица $-\mathcal{K} + \frac{1}{2}\mathbf{I}$ имеет собственные значения с положительной вещественной частью, то для любого шара $B_c = \{x \in \mathbb{R}^p: (x - \theta)^T (x - \theta) \leq c\}$ асимптотическое поведение $\beta_n(\delta_n, \theta, B_c)$ вырождено:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n(\delta_n, \theta, B_c) = 0$$

(ср. с одномерным случаем в работе [9]).

З а м е ч а н и е 4. Экстремаль $\varphi(t)$, дающая минимум функционалу действия $I_{(-\infty, 0)}(\varphi)$ в предложении 1, ограничена при условии, что матрица $-\mathcal{K} + \mathbf{I}$ устойчива. Более того, в этом случае $\varphi(t)$ и все ее производные исчезающе малы, когда $x \rightarrow \theta$.

3. Рекуррентная процедура с отражением. Траектория δ_k рекуррентной процедуры (4) типично следует за траекторией динамической системы $\dot{x}_t = m_\theta(x_t)$ при $k \rightarrow \infty$. В частности, если $m_\theta(\vartheta) = \nabla Q_\theta(\vartheta)$ является градиентом выпуклой функции Q_θ , как в случае максимума правдоподобия при логарифмически выпуклой плотности вероятностей, то траектории (4) нацелены на поиск точки максимума функции Q_θ .

Связь между этим поисковым методом и алгоритмом Кифера-Вольфовица хорошо известна в стохастической аппроксимации (см. [10]).

Усеченная процедура (4) ограничена кубом $[-K, K]^p$. Во многих приложениях область поиска дополнительно ограничена еще и некоторой областью. Для простоты изложения мы предполагаем, что эта дополнительная область является полупространством $\mathbf{R}_+^p = \{x = (x_1, \dots, x_p)^T, x_1 \geq 0\}$, и мы ищем условный максимум $Q_\theta(\vartheta)$ при условии, что $\vartheta \in [-K, K]^p \cap \mathbf{R}_+^p$. В дальнейшем мы предполагаем, что семейство функций Q_θ параметризовано таким образом, что θ совпадает с точкой условного максимума.

Модифицируем рекуррентную оценку δ_k в (4) так, чтобы ее траектории оставались в $\mathbf{R}_+^p$. Для того чтобы вынудить траектории δ_k , $k = 1, 2, \dots$, оставаться в этом полупространстве, мы определяем следующую рекуррентную процедуру с отражением:

$$\tilde{\delta}_k = \begin{cases} v_k(X_k, \tilde{\delta}_{k-1}), & \text{если } e_1^T v_k(X_k, \tilde{\delta}_{k-1}) \geq 0, \\ v_k(X_k, \tilde{\delta}_{k-1}) - 2(e_1^T v_k(X_k, \tilde{\delta}_{k-1})) e_1 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (7)$$

где $v_k(x, z) = z + (kJ)^{-1}\psi(x, z)$ обозначает то же, что и в (4), $\tilde{\delta}_k \in [-K, K]^p \cap \mathbf{R}_+^p$ и $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$. Определение (7) должно быть дополнено начальным условием $\tilde{\delta}_0 \in [-K, K]^p \cap \mathbf{R}_+^p$.

Основные определения и предположения п. 2 должны быть модифицированы. Положим

$$\tilde{m}_\theta(\vartheta) = \begin{cases} m_\theta(\vartheta) - (e_1^T m_\theta(\vartheta)) e_1, & \text{если } e_1^T \vartheta = 0, \quad e_1^T m_\theta(\vartheta) < 0, \\ m_\theta(\vartheta) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что $\tilde{m}_\theta(\vartheta)$ — проекция $m_\theta(\vartheta)$ на границу $\partial \mathbf{R}_+^p$, если $\vartheta \in \partial \mathbf{R}_+^p$ и $m_\theta(\vartheta)$ направлено вовне. Векторное поле $\tilde{m}_\theta(\vartheta)$ может быть разрывным на границе $\partial \mathbf{R}_+^p$.

Предположение 1'. Пусть точка $\vartheta = \theta \in \mathbf{R}_+^p$ является единственным устойчивым положением равновесия динамической системы $\dot{x}_t = \tilde{m}_\theta(x_t)$ в $[-K, K]^p \cap \mathbf{R}_+^p$, для любого начального условия $x_0 \in [-K, K]^p \cap \mathbf{R}_+^p$ траектория x_t остается в этой области и $x_t \rightarrow \theta$ при $t \rightarrow \infty$.

Пусть $H_\theta(u, \vartheta)$ определено так же, как и в предыдущем пункте. Положим

$$\tilde{H}_\theta(u, \vartheta) = \begin{cases} \min_{\alpha > 0} H_\theta(u - \alpha e_1, \vartheta), & \text{если } e_1^T \vartheta = e_1^T u = 0, \\ H_\theta(u, \vartheta) & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\tilde{I}_{(\tau, 0)}(\varphi) = \int_\tau^0 e^t \tilde{H}_\theta(\dot{\varphi}(t), \varphi(t)) dt, \quad \tau \leq 0.$$

Для любого $x \in \mathbf{R}_+^p$ введем множество

$$\Phi_+(x) = \Phi(x) \cap \{\varphi(t) \in \mathbf{R}_+^p, t \leq 0\}$$

абсолютно непрерывных функций и модифицированный квазипотенциал

$$\tilde{V}_\theta(x) = \inf_{\varphi \in \Phi_+(x)} \tilde{I}_{(-\infty, 0)}(\varphi), \quad x \in \mathbf{R}_+^p.$$

Теорема 2. При выполнении предположений 1', 2 и 3 риск по Базадуре (1) рекуррентной процедуры с отражением (7) имеет следующую асимптотику:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n(\tilde{\delta}_n, \theta, D_\theta) = - \inf_{x \notin D_\theta} \tilde{V}_\theta(x). \quad (8)$$

Мы опускаем доказательство этой теоремы, поскольку оно является комбинацией доказательства теоремы 1 и принципа Лапласа для случайного блуждания с отражением, изученного в гл. 7 монографии [2].

Как и в замечании 1, можно ввести множества уровней модифицированного квазипотенциала

$$\widetilde{W}_\theta(\lambda) = \{x \in \mathbf{R}_+^p, \widetilde{V}_\theta(x) \leq \lambda\}, \quad \lambda \geq 0.$$

Ввиду (8) эти множества ограничивают области равных вероятностей уклонений $\widetilde{\delta}_n - \theta$ для больших значений n . Теперь мы обратимся к специальному случаю теоремы 2.

Пример 2. Пусть $Q_\theta(x)$ является семейством выпуклых функций. Предположим, что $\psi(X_k, \widetilde{\delta}_{k-1}) = \nabla Q_\theta(\widetilde{\delta}_{k-1}) + X_k$ — это измерение градиента $\nabla Q_\theta(\widetilde{\delta}_{k-1})$ в точке $x = \widetilde{\delta}_{k-1}$ со случайным шумом X_k . Пусть X_k , $k = 1, 2, \dots$, являются независимыми случайными гауссовскими векторами с нулевым средним и матрицей ковариаций Σ . Выберем в $(p-1)$ -мерном пространстве, $x_1 = 0$, базис, в котором последние $p-1$ координат нашего гауссовского вектора независимы. В этих координатах ненулевые элементы матрицы Σ равны $\Sigma_{ii} = \sigma_i^2$, $i = 1, \dots, p$, и $\Sigma_{1j} = \Sigma_{j1} = \rho_j \sigma_1 \sigma_j$, $j = 2, \dots, p$. Здесь σ_i^2 — дисперсия i -й координаты, а ρ_j — это коэффициент корреляции первой и j -й координат.

Интересные эффекты можно ожидать, если точка условного максимума находится на границе $\partial \mathbf{R}_+^p$. Для того чтобы проиллюстрировать возможные эффекты, введем квадратичную функцию

$$Q_\theta(\vartheta) = -\frac{1}{2} a_1 (\vartheta_1 + 1)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j=2}^p A_{ij} (\vartheta_i - \theta_i) (\vartheta_j - \theta_j), \quad a_1 > 1.$$

Здесь $A = \{A_{ij}\}$, $i, j = 2, \dots, p$, — симметричная $(p-1) \times (p-1)$ -матрица, причем $(A - \mathbf{I})$ положительно определена. Мы полагаем, что θ имеет нулевую первую координату, т.е. $\theta = (0, \theta_2, \dots, \theta_p)^T$. Динамическая система $\dot{x}_t = \widetilde{\nabla} Q_\theta(x_t)$ имеет устойчивое положение равновесия в $\theta \in \partial \mathbf{R}_+^p$, и градиент в этой точке невырожден и направлен вовне: $\nabla Q_\theta(\theta) = (-a_1, 0, \dots, 0)^T$.

Для любого $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)^T \in \mathbf{R}^p$ введем $(p-1)$ -мерный вектор $\bar{x} = (x_2, \dots, x_p)^T$ такой, что $x^T = (x_1, \bar{x}^T)$ и $\theta^T = (0, \bar{\theta}^T)$. В этих обозначениях

$$Q_\theta(\vartheta) = -\frac{1}{2} a_1 (\vartheta_1 + 1)^2 - \frac{1}{2} (\bar{v} - \bar{\theta})^T A (\bar{v} - \bar{\theta}).$$

Через $\mathbf{R}^2 = \rho_2^2 + \dots + \rho_p^2$ мы обозначим множественный коэффициент корреляции, предполагая, что $\mathbf{R}^2 < 1$. Пусть $(p-1)$ -мерный вектор s определяется как

$$s = \left(\frac{\rho_2}{\sigma_2}, \dots, \frac{\rho_p}{\sigma_p} \right)^T.$$

Введем диагональную матрицу $\bar{F} = \text{diag}(\sigma_2^{-2}, \dots, \sigma_p^{-2})$ размера $(p-1) \times (p-1)$ и положим

$$\bar{\mathcal{F}} = \int_{-\infty}^0 e^t \exp \{t(A - I)\} \bar{F} \exp \{t(A - I)\} dt.$$

Нашей целью является изучение асимптотического поведения области $\bar{W}_\theta(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0$. Несколько неожиданно, что асимптотически эта область не зависит от коэффициентов корреляции ρ_j , $j = 2, \dots, p$. Следующее предложение 2 показывает, что эта зависимость может внести лишь исчезающе малый член в квазипотенциал при малых значениях λ . Несколько перегружая обозначения, мы будем понимать $\bar{V}_{(0,\bar{\theta})}(x_1, \bar{x})$ как $\bar{V}_\theta(x)$.

Предложение 2. При сделанных выше предположениях выполнено

$$\tilde{V}_{(0,\bar{\theta})}(x) = \tilde{V}_{(0,\bar{\theta})}(x_1, \bar{x}) = \lambda[1 + o_\lambda(1)], \quad o_\lambda(1) \rightarrow 0 \quad \text{при } \lambda \rightarrow 0, \quad (9)$$

при условии, что

$$\frac{2a_1x_1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{2}(\bar{x} - \bar{\theta})^T \bar{\mathcal{F}}^{-1}(\bar{x} - \bar{\theta}) = \lambda, \quad \lambda \geq 0, \quad x_1 \geq 0. \quad (10)$$

З а м е ч а н и е 5. Физическое объяснение результатов предложения 2 следующее: частица, движение которой описывается рекуррентным соотношением (7), «прижимается» к границе значительной силой и не может уйти от границы на большой период времени. Экстремали функционала в тангенциальном и нормальном направлениях «существуют» в разных шкалах времени: первая координата отличается от нуля лишь на коротком промежутке времени порядка $O(\lambda)$. В определенном смысле нормальная и тангенциальная координаты почти независимы на уровне вероятностей больших отклонений при малых значениях λ . Отметим, что в традиционной асимптотике скорость сходимости в тангенциальном направлении есть $O(1/\sqrt{n})$, в то время как скорость сходимости в нормальном направлении есть $O(1/n)$ при $n \rightarrow \infty$ (см. [6]).

4. Приложение. Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Как и в одномерном случае (см. [9]), введем переменную s для «нового времени» посредством

$$s = s(k) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} = (1 + o(1)) \ln k$$

и положим $s(0) = 0$. Отметим, что s принимает значения из дискретного множества $\Sigma = \{0, 1, 1 + \frac{1}{2}, \dots\}$. Обозначим через $(Y(s), \mathbf{P}_{s_0, y})$,

$s \in \Sigma$, марковский процесс, получаемый из δ_k в (4) путем замены времени: $Y(s(k)) = \delta_k$, $k = 1, 2, \dots$, $Y(s_0) = 0$, и через $\mathbf{P}_{s_0, y}$ семейство вероятностных распределений, связанных с начальными условиями $Y(s_0) = y \in [K, K]^p$, $s_0 \in \Sigma$.

Для произвольного $\tau < 0$ определим последовательность марковских процессов $Y^{(n)}(t)$ как

$$Y^{(n)}(t) = Y(s(n) + t), \quad \tau \leq t \leq 0, \quad s(n) + t \in \Sigma, \quad n = 1, 2, \dots$$

Поведение вероятностей больших уклонений для семейства $Y^{(n)}(t)$ будет описываться функционалом действия $I_{(\tau, 0)}(\varphi)$ с нормирующим множителем n , если мы покажем, что нормализованная производящая функция моментов

$$\tilde{G}_\theta(t, v, \vartheta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(s(k+1) - s(k))} \ln \mathbf{E}_{s(k), \vartheta} \left(\exp \{nv^T (Y(s(k+1)) - \vartheta)\} \right)$$

имеет надлежащий предел. Здесь величина $t = s(k) - s(n) \leq 0$ задана так, что $k/n = [1 + o_n(1)] e^t$, где $o_n(1) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Применяя эту формулу, мы получаем

$$\begin{aligned} \tilde{G}_\theta(t, v, \vartheta) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n} \ln \int \exp(nk^{-1}v^T J^{-1}\varphi(x, \vartheta)) f(x, \theta) dx \\ &= e^t G_\theta(e^{-t}v, \vartheta). \end{aligned}$$

Преобразование Лежандра от $\tilde{G}_\theta(t, v, \vartheta)$ по v есть $e^t H_\theta(u, \vartheta)$. Результаты Вентцеля (см. [14, гл. 3]), показывают, что вероятности больших уклонений $Y^{(n)}(t)$ на любом конечном интервале $T \leq t \leq 0$, $T < 0$, определяются функционалом $I_{(T, 0)}(\varphi)$. Выберем фиксированное T , $T < 0$, и положим без ограничения общности, что $s(n) + T \in \Sigma$. Определим

$$\|Y - \varphi\|_\infty = \max_{T \leq t \leq 0} |Y(s(n) + t) - \varphi(t)|$$

как максимальное отклонение $Y^{(n)}(t)$ от $\varphi(t)$, где $Y^{(n)}$ и φ имеют общее начальное значение $Y^{(n)}(T) = \varphi(T) = y$. Как показано в [14], для сколь угодно малого $\varepsilon_0 > 0$ справедлива следующая нижняя граница:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}_{s(n)+T, y} \{ \|Y - \varphi\|_\infty < \varepsilon_0 \} \geq -I_{(T, 0)}(\varphi). \quad (11)$$

Для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ выберем $\varphi^{(0)} = \varphi_\theta^{(0)}(t)$ так, чтобы $\varphi_\theta^{(0)}(0) \notin D_\theta$, т.е. евклидово расстояние $\text{dist}(\varphi_\theta^{(0)}(0); D_\theta) = \varepsilon_0 > 0$, и $I_{(-\infty, 0)}(\varphi^{(0)}) \leq \inf_{x \notin D_\theta} V_\theta(x) + \varepsilon$. Для заданного значения y определим

$$\varphi^{(1)}(t) = \begin{cases} \varphi^{(0)}(t), & \text{если } t \in \left[\frac{T}{2}, 0 \right], \\ y + \frac{y - \varphi^{(0)}(T/2)}{T/2} \left(t - \frac{T}{2} \right), & \text{если } t \in \left[T, \frac{T}{2} \right]. \end{cases}$$

Заметим, что $\varphi^{(1)}(T) = y$. Ввиду (11) и марковского свойства мы получаем, что

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}\{\delta_n \notin D_\theta\} &= \liminf_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}_{0,0}\{Y(s(n)) \notin D_\theta\} \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{y \in [-K, K]^p} n^{-1} \ln \mathbf{P}_{s(n)+T, y}\{\|Y - \varphi^{(1)}\|_\infty < \varepsilon_0\} \\ &\geq -I_{(T,0)}(\varphi^{(1)}) = -(I_{(T, T/2)}(\varphi^{(1)}) + I_{(T/2, 0)}(\varphi^{(0)})) \\ &\geq -\left(\int_T^{T/2} e^t H(\dot{\varphi}^{(1)}, \varphi^{(1)}) dt + \inf_{x \notin D_\theta} V_\theta(x) + \varepsilon\right) \\ &\geq -\left(\inf_{x \notin D_\theta} V_\theta(x) + \varepsilon + h_0 e^{T/2}\right), \end{aligned}$$

где $h_0 = \max\{H_\theta(u, \vartheta) : u \in [-4K/|T|, 4K/|T|]^p, \vartheta \in [-K, K]^p\}$. Выберем $|T|$ столь большим, чтобы $h_0 e^{T/2} < \varepsilon$. Поскольку ε произвольно мало, отсюда следует нижняя граница в (5).

Для доказательства верхней границы в (5) введем следующие множества. Для фиксированного $T, T < 0$, положительного λ и $y \in [-K, K]^p$ положим

$$W_\theta^{(T, y)}(\lambda) = \left\{x : \inf_{\varphi(T)=y, \varphi \in \Phi(x)} I_{(T, 0)} \leq \lambda\right\}.$$

Как показано в [14] для сколь угодно малого $\varepsilon_0 > 0$ справедлива верхняя граница

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}_{s(n)+T, y}\{\text{dist}(Y(s(n)); W_\theta^{(T, y)}(\lambda)) \geq \varepsilon_0\} \leq -\lambda. \quad (12)$$

Возьмем сколь угодно малое положительное значение ε . Введем

$$\lambda_0 = \inf_{x \notin D_\theta} V_\theta(x) > 0, \quad \varepsilon_0 = \text{dist}(D_\theta^c; W_\theta(\lambda_0 - \varepsilon)) > 0.$$

Далее, для любого ε существует столь большое $|T|$, что

$$W_\theta^{(T, y)}(\lambda_0 - 2\varepsilon) \subseteq W_\theta(\lambda_0 - \varepsilon). \quad (13)$$

Действительно, если $x \in W_\theta^{(T, y)}(\lambda_0 - 2\varepsilon)$, то тогда существует $\varphi_*^{(0)} : \varphi_*^{(0)}(T) = y \in [-K, K]^p, \varphi_*^{(0)}(0) = x$ и $I_{(T, 0)}(\varphi_*^{(0)}) \leq \lambda_0 - 2\varepsilon + \varepsilon/2$. Положим

$$\varphi_*^{(1)}(t) = \begin{cases} \varphi_*^{(0)}(t), & \text{если } t \in [T, 0], \\ \theta + (\varphi_*^{(0)}(T) - \theta)(t - T + 1), & \text{если } t \in [T - 1, T], \\ \theta, & \text{если } t \in (-\infty, T - 1]. \end{cases}$$

Аналогично доказательству нижней границы, можно найти столь большое $|T|$, что

$$\inf_{\varphi \in \Phi(x)} I_{(-\infty, 0)}(\varphi) \leq I_{(-\infty, 0)}(\varphi_*^{(1)}) \leq I_{(T, 0)}(\varphi_*^{(0)}) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \lambda_0 - \varepsilon.$$

Поскольку $\varphi_*^{(1)}(0) = x$, постольку последнее неравенство влечет $x \in W_\theta(\lambda_0 - \varepsilon)$, откуда следует (13). Итак,

$$\begin{aligned} \{Y(s(n)) \in D_\theta^\varepsilon\} &\subseteq \{\text{dist}(Y(s(n)); W_\theta(\lambda_0 - \varepsilon)) \geq \varepsilon_0\} \\ &\subseteq \{\text{dist}(Y(s(n)); W_\theta^{(T,y)}(\lambda_0 - 2\varepsilon)) \geq \varepsilon_0\}. \end{aligned}$$

Применяя (12) и марковское свойство, мы получаем верхнюю границу:

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}\{\delta_n \notin D_\theta\} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}_{0,0}\{Y(s(n)) \in D_\theta^\varepsilon\} \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in [-K, K]^p} n^{-1} \ln \mathbf{P}_{s(n)+T, y} \left\{ \text{dist}(Y(s(n)); \right. \\ &\quad \left. W_\theta^{(T,y)}(\lambda_0 - 2\varepsilon)) \geq \varepsilon_0 \right\} \\ &\leq -(\lambda_0 - 2\varepsilon) = - \inf_{x \notin D_\theta} V_\theta(x) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Доказательство предложения 1. В пространстве вектор-функций φ таких, что $\int_{-\infty}^0 e^t \varphi^T(t) \varphi(t) dt < \infty$, мы введем скалярное произведение

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_F = \int_{-\infty}^0 e^t \varphi_1^T(t) F^{-1} \varphi_2(t) dt$$

и норму $\|\varphi(t)\|_F^2 = \langle \varphi, \varphi \rangle_F$. Преобразование Лежандра правой части (6) имеет вид:

$$H_\theta(u, \vartheta) = \frac{1}{2} [u + \mathcal{K}(\vartheta - \theta)]^T F^{-1} [u + \mathcal{K}(\vartheta - \theta)].$$

Итак, в данном случае функционал действия $I_{(\tau, 0)}(\varphi) = \frac{1}{2} \|\dot{\varphi}(t) + \mathcal{K}(\varphi(t) - \theta)\|_F^2$, и квазипотенциал превращается в

$$V_\theta(x) = \inf \left\{ \frac{1}{2} \|\dot{\varphi}(t) + \mathcal{K}(\varphi(t) - \theta)\|_F^2, \varphi(0) = x \right\}.$$

Положим $\psi(t) = \dot{\varphi}(t) + \mathcal{K}(\varphi(t) - \theta)$. Тогда $\varphi(t) - \theta = e^{-t\mathcal{K}} \times \int_{-\infty}^t e^{s\mathcal{K}} \psi(s) ds$, и

$$V_\theta(x) = \inf \left\{ \frac{1}{2} \|\psi\|_F^2, \int_{-\infty}^0 e^{t\mathcal{K}} \psi(t) dt = x - \theta \right\}.$$

Обозначим i -ю строку матрицы $\exp\{t(\mathcal{K} - \mathbf{I})\}F$ через $e_i^T(t)$ и положим $y = x - \theta = (y_1, \dots, y_p)^T$. В этих обозначениях

$$V_\theta(x) = \inf \left\{ \frac{1}{2} \|\psi\|_F^2, y_i = \langle e_i^T(t), \psi \rangle_F, i = 1, \dots, p \right\}. \quad (14)$$

Задача минимизации (14) допускает решение в форме $\psi(t) = \sum_{j=1}^p \alpha_j e_j(t)$. Здесь $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)^T$ удовлетворяет системе линейных уравнений $\mathcal{S}\alpha = y$. Окончательно мы получаем, что $\psi(t) = F \exp\{t(\mathcal{K} - \mathbf{I})\} \mathcal{S}^{-1}y$ и

$$\begin{aligned} V_\theta(x) &= \frac{1}{2} y^T \mathcal{S}^{-1} \left[\int_{-\infty}^0 \exp\{t(\mathcal{K} - \mathbf{I})\} F(e^t F^{-1}) F \exp\{t(\mathcal{K} - \mathbf{I})\} dt \right] \mathcal{S}y \\ &= \frac{1}{2} y^T \mathcal{S}^{-1} y = \frac{1}{2} (x - \theta)^T \mathcal{S}^{-1} (x - \theta). \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Для доказательства предложения 2 нам потребуется лемма.

Лемма. (i) Минимум по α квадратичной формы

$$B(\alpha) = (z_1 - \alpha, \bar{z}^T) \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} z_1 - \alpha \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

достигается при $\alpha_* = z_1 - \sigma_1 s^T \bar{z}$ и равен $\bar{z}^T \bar{F}^{-1} \bar{z}$.

(ii) Если $z_j = \sigma_j \rho_j z_1 / \sigma_1$ при $j = 2, \dots, p$, то $B = B(0) = z^T \Sigma^{-1} z = z_1^2 / \sigma_1^2$.

(iii) $B = z^T \Sigma^{-1} z \geq z_1^2 / \sigma_1^2$.

(iv) $B = z^T \Sigma^{-1} z \geq \sum_2^p (z_j^2 / \sigma_j^2) \bar{z}^T \bar{F}^{-1} \bar{z}$.

Доказательство леммы. (i) Заметим, что обратная матрица Σ^{-1} может быть записана как

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2(1-R^2)} & -\frac{\rho_2}{\sigma_1\sigma_2(1-R^2)} & \dots & -\frac{\rho_p}{\sigma_1\sigma_p(1-R^2)} \\ -\frac{\rho_2}{\sigma_1\sigma_2(1-R^2)} & \frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{\rho_2^2}{\sigma_2^2(1-R^2)} & \dots & \frac{\rho_2\rho_p}{\sigma_2\sigma_p(1-R^2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\rho_p}{\sigma_1\sigma_p(1-R^2)} & \frac{\rho_2\rho_p}{\sigma_2\sigma_p(1-R^2)} & \dots & \frac{1}{\sigma_p^2} + \frac{\rho_p^2}{\sigma_p^2(1-R^2)} \end{pmatrix}.$$

Итак,

$$\begin{aligned} B(\alpha) &= \frac{(z_1 - \alpha)^2}{\sigma_1^2(1-R^2)} - 2(z_1 - \alpha) \sum_2^p \frac{\rho_j z_j}{\sigma_1 \sigma_j (1-R^2)} \\ &\quad + \frac{1}{1-R^2} \left(\sum_2^p \frac{\rho_j z_j}{\sigma_j} \right)^2 + \sum_2^p \left(\frac{z_j}{\sigma_j} \right)^2. \end{aligned}$$

Дифференцируя последнюю формулу по α , мы находим точку минимума

$$\alpha_* = z_1 - \sigma_1 \sum_2^p \frac{\rho_j z_j}{\sigma_j} = z_1 + \sigma_1^2(1-R^2) s^T \bar{z}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что $B(\alpha_*) = \sum_2^p (z_j/\sigma_j)^2 = \bar{z}^T \bar{F}^{-1} \bar{z}$.

(ii) Положим $z_j = \sigma_j \rho_j z_1/\sigma_1$, $\alpha = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} B = B(0) &= \frac{z_1^2}{\sigma_1^2(1-R^2)} \left(1 - 2 \sum_2^p \rho_j^2 + \left(\sum_2^p \rho_j^2 \right)^2 \right) + \frac{z_1^2}{\sigma_1^2} \sum_2^p \rho_j^2 \\ &= \frac{z_1^2}{\sigma_1^2} \left(\frac{1-2R^2+R^4}{1-R^2} + R^2 \right) = \frac{z_1^2}{\sigma_1^2}. \end{aligned}$$

(iii) Имеем

$$B = \frac{z_1^2}{\sigma_1^2} + (1-R^2)^{-1} \left[\sum_2^p \left(\frac{z_1 \rho_j}{\sigma_1} - \frac{z_j}{\sigma_j} \right)^2 + \left(\sum_2^p \frac{z_j \rho_j}{\sigma_j} \right)^2 - R^2 \sum_2^p \frac{z_j^2}{\sigma_j^2} \right].$$

Минимум последней квадратичной формы достигается при $z_1/\sigma_1 = R^{-2} \sum_2^p z_j \rho_j / \sigma_j$ и равен

$$R^{-2}(1-R^2) \left[R^2 \sum_2^p \frac{z_j^2}{\sigma_j^2} - \left(\sum_2^p \frac{z_j \rho_j}{\sigma_j} \right)^2 \right] \geq 0.$$

(iv) Из (iii) следует, что

$$B = \sum_2^p \frac{z_j^2}{\sigma_j^2} + (1-R^2)^{-1} \left(\frac{z_1}{\sigma_1} - \sum_2^p \frac{z_j \rho_j}{\sigma_j} \right)^2.$$

Лемма доказана.

Доказательство предложения 2. По определению имеем

$$H_\theta(u, \vartheta) = \frac{1}{2} \left(u_1 + a_1(\vartheta_1 + 1), (\bar{u} + A(\bar{v} - \bar{\theta}))^T \right) \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} u_1 + a_1(\vartheta_1 + 1) \\ \bar{u} + A(\bar{v} - \bar{\theta}) \end{pmatrix}$$

и $\tilde{H}_\theta(u, \vartheta) = H_\theta(u, \vartheta)$, если или $u_1 > 0$, или $\vartheta_1 > 0$. Далее, если $u_1 = \vartheta_1 = 0$ и $a_1 - \sigma_1 s^T (\bar{u} + A(\bar{v} - \bar{\theta})) < 0$, тогда все еще $\tilde{H}_\theta(u, \vartheta) = H_\theta(u, \vartheta)$. Однако, если $a_1 - \sigma_1 s^T (\bar{u} + A(\bar{v} - \bar{\theta})) \geq 0$, то

$$H_\theta(u, \vartheta) = \tilde{H}_\theta((0, \bar{u}), (0, \bar{\vartheta})) = \frac{1}{2} (\bar{u} + A(\bar{v} - \bar{\theta}))^T \bar{F}^{-1} (\bar{u} + A(\bar{v} - \bar{\theta})). \quad (15)$$

Доказательство (15) немедленно вытекает из п. (i) леммы при $z_1 = a_1$. Важно отметить, что при $\varphi_1(t) = 0$, $\bar{\varphi}(t) \approx \bar{\theta}$ и малых $\bar{u} = \dot{\bar{\varphi}}(t)$ функционал действия $\tilde{I}_{(-\infty, 0)}(\varphi)$ совпадает с функционалом действия, определяемым маргинальным распределением последних $p-1$ координат независимо от значения s . Более точно, для таких функций φ при $\lambda \rightarrow 0$ выполнено

$$\tilde{I}_{(-\infty, 0)}(\varphi) \sim \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^t [\dot{\bar{\varphi}}(t) + A(\bar{\varphi}(t) - \bar{\theta})]^T \bar{F}^{-1} [\dot{\bar{\varphi}}(t) + A(\bar{\varphi}(t) - \bar{\theta})] dt,$$

и, следовательно, применимо предложение 1. Эти соображения объясняют происхождение второго слагаемого в левой части (10).

Верхняя граница. Необходимо убедиться, что для любого x , удовлетворяющего (10), имеет место неравенство

$$\tilde{V}_{(0,\bar{\theta})}(x) \leq \lambda[1 + o_\lambda(1)] \quad \text{при } \lambda \rightarrow 0. \quad (16)$$

Заметим, что если x_1 и $\bar{x}$ удовлетворяют (10), то $x_1 = O(\lambda)$ и $\|\bar{x} - \bar{\theta}\| = O(\sqrt{\lambda})$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма. Положим $t_0 = -x_1/a_1$, так что $|t_0| = O(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0$.

Найдем траекторию $\varphi^* = \varphi^*(t)$, $(\varphi^*)^T = (\varphi_1^*, (\bar{\varphi}^*)^T)$, которая обеспечивает верхнюю границу квазипотенциала. А именно выберем

$$\varphi_1^*(t) = 0, \quad \text{если } t \leq t_0, \quad \text{и} \quad \varphi_1^*(t) = a_1 t + x_1 \quad \text{в противном случае.}$$

Пусть компоненты $\varphi_j^*(t)$ выбраны так, что для всех $j = 2, \dots, p$ выполнено

$$\begin{aligned} & \left[\dot{\bar{\varphi}}^*(t) + [A(\bar{\varphi}^*(t) - \bar{\theta})] \right]_j \\ &= \frac{\sigma_j \rho_j}{\sigma_1} \left[\dot{\varphi}_1^*(t) + a_1(\varphi_1^*(t) + 1) \right], \quad \text{когда } t_0 < t \leq 0, \end{aligned} \quad (17)$$

с конечным условием $\bar{\varphi}^*(0) = (\varphi_2^*(0), \dots, \varphi_p^*(0))^T = \bar{x}$. Положим $\bar{x}_0 = \bar{\varphi}^*(t_0)$. Как легко видеть из (17), $\|\bar{x}_0 - \bar{x}\| = O(|t_0|) = O(\lambda)$. Следовательно,

$$\|(\bar{x}_0 - \bar{\theta}) - (\bar{x} - \bar{\theta})\| = O(\lambda) \quad \text{и} \quad \|\bar{x}_0 - \bar{\theta}\| = O(\sqrt{\lambda}) \quad \text{при } \lambda \rightarrow 0.$$

Определим $\bar{\varphi}^*(t)$ для $t \leq t_0$ с помощью дифференциального уравнения

$$\dot{\bar{\psi}}(t) = \left[\dot{\bar{\varphi}}^*(t) + A(\bar{\varphi}^*(t) - \bar{\theta}) \right] = \bar{F} e^{(t-t_0)(A-I)} \bar{\mathcal{S}}^{-1}(\bar{x}_0 - \bar{\theta}) \quad (18)$$

с начальным условием $\bar{\varphi}^*(-\infty) = 0$. Для достаточно малых λ (ср. замечание 4) мы имеем

$$\begin{aligned} a_1 - \sigma_1 s^T \left[\dot{\bar{\varphi}}^*(t) + A(\bar{\varphi}^*(t) - \bar{\theta}) \right] &= a_1 - \sigma_1 s^T \bar{\psi}(t) = a_1 + O(\|\bar{x}_0 - \bar{\theta}\|) \\ &= a_1 + O(\sqrt{\lambda}) \geq 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Далее, вычислим значение функционала на траектории $\varphi^*(t)$:

$$\tilde{V}_\theta(x) \leq \tilde{I}_{(-\infty, 0)}(\varphi^*) = \int_{-\infty}^{t_0} e^t \tilde{H}_\theta(\dot{\varphi}^*(t), \varphi^*(t)) dt + \int_{t_0}^0 e^t \tilde{H}_\theta(\dot{\varphi}^*(t), \varphi^*(t)) dt.$$

Применяя п. (ii) леммы, мы получаем

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^0 e^t \tilde{H}_\theta(\dot{\varphi}^*(t), \varphi^*(t)) dt &= \frac{1}{2\sigma_1^2} \int_{t_0}^0 e^t (\dot{\varphi}_1^*(t) + a_1(\varphi^*(t) + 1))^2 dt \\ &= \frac{1}{2\sigma_1^2} \int_{t_0}^0 e^t (2a_1 + a_1^2 t + a_1 x_1)^2 dt \\ &= \frac{4a_1^2 |t_0| (1 + O(\lambda))}{2\sigma_1^2} = \frac{2a_1 x_1 (1 + O(\lambda))}{\sigma_1^2}, \quad (20) \end{aligned}$$

где было использовано тождество $a_1 |t_0| = x_1$. Ввиду (15), (18) и (19), как и в предложении 1,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{t_0} e^t \tilde{H}_\theta(\dot{\varphi}^*(t), \varphi^*(t)) dt &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{t_0} e^t \bar{\psi}^T(t) F^{-1} \bar{\psi}(t) dt \\ &= \frac{e^{t_0}}{2} (\bar{x}_0 - \bar{\theta})^T \bar{\mathcal{S}}^{-1} (\bar{x}_0 - \bar{\theta}) \\ &= \frac{1}{2} (\bar{x} - \bar{\theta})^T \bar{\mathcal{S}}^{-1} (\bar{x} - \bar{\theta}) [1 + O(\sqrt{\lambda})]. \quad (21) \end{aligned}$$

Комбинируя (20) с (21), получаем неравенство $\tilde{V}_\theta(x) \leq \lambda + O(\lambda^{3/2})$ при $\lambda \rightarrow 0$, которое и доказывает верхнюю границу.

Нижняя граница. Для вывода нижней границы рассмотрим траекторию $\varphi(t)$, $t \leq 0$, $\varphi^T = (\varphi_1, \bar{\varphi}^T)$, которая заканчивается в x , т.е. $\varphi_1(0) = x_1$, $\bar{\varphi}(0) = \bar{x}$. При условии, что x удовлетворяет (10), мы хотим показать, что $\tilde{I}_{(-\infty, 0)}(\varphi)$ превосходит $\lambda(1 + o_\lambda(1))$. Введем $t_* = \sup\{t: \varphi_1(t) = 0\}$ с $t_* = -\infty$, если $\varphi_1(t) > 0$ для всех t . В соответствии с п. (iii) леммы,

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{(-\infty, 0)}(\varphi) &\geq \frac{1}{2\sigma_1^2} \int_{t_*}^0 e^t [\dot{\varphi}_1(t) + a_1(\varphi_1(t) + 1)]^2 dt \\ &\geq \inf_{\varphi_1(t_*)=0, \varphi_1(0)=x_1, \varphi_1(t)>0} \int_{t_*}^0 \frac{e^t}{2\sigma_1^2} [\dot{\varphi}_1(t) + a_1(\varphi_1(t) + 1)]^2 dt \\ &= J_*. \quad (22) \end{aligned}$$

Для того чтобы оценить J_* в (22) снизу, решим уравнение Эйлера. Из уравнения Эйлера следует, что любое решение экстремальной задачи выше удовлетворяет дифференциальному уравнению $\ddot{\varphi}_1(t) + \dot{\varphi}_1(t) + a_1(1 - a_1)[\varphi_1(t) + 1] = 0$ с общим решением $\varphi_1(t) = p_1 e^{(a_1-1)t} + p_2 e^{-a_1 t} - 1$ и граничными условиями $\varphi_1(t_*) = 0$, $\varphi_1(0) = x_1$. Откуда получается, что экстремаль в (22) имеет вид $\dot{\varphi}_1(t) + a_1[\varphi_1(t) + 1] = p_1(2a_1 - 1) e^{(a_1-1)t}$ с $p_1 = (1 + x_1 - e^{a_1 t_*}) / (1 - e^{(2a_1-1)t_*})$. Итак, в (22)

$$J_* = \int_{t_*}^0 \frac{e^t}{2\sigma_1^2} [\dot{\varphi}_1(t) + a_1(\varphi_1(t) + 1)]^2 dt = \frac{(2a_1 - 1)[1 + x_1 - e^{a_1 t_*}]^2}{2\sigma_1^2(1 - e^{(2a_1-1)t_*})}. \quad (23)$$

Для минимизации правой части (23) следует выбрать $|t_*| = O(\lambda)$, что влечет

$$J_* = \frac{1}{2\sigma_1^2} \left(\frac{x_1^2}{|t_*|} + 2a_1x_1 + a_1^2|t_*| + O(\lambda^2) \right) \geq \frac{2a_1x_1}{\sigma_1^2} + O(\lambda^2). \quad (24)$$

Для любого δ , $0 < \delta < 1$, положим $\omega_\delta(t) = 1$ при $t \leq t_*$ и $\omega_\delta(t) = \delta$ при $t_* < t \leq 0$ и заметим, что

$$\tilde{I}_{(-\infty, 0)}(\varphi) = (1 - \delta) \int_{t_*}^0 e^t \tilde{H}(\dot{\varphi}, \varphi) dt + \int_{-\infty}^0 \omega_\delta(t) e^t \tilde{H}(\dot{\varphi}, \varphi) dt.$$

Применяя п. (iii) леммы к первому из этих интегралов и п. (iv) леммы ко второму, мы получаем неравенство

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{(-\infty, 0)}(\varphi) &\geq \frac{1 - \delta}{2\sigma_1^2} \int_{t_*}^0 e^t \left[\dot{\varphi}_1(t) + a_1(\varphi_1(t) + 1) \right]^2 dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \omega_\delta(t) e^t \left[\dot{\bar{\varphi}}(t) + A(\bar{\varphi}(t) - \bar{\theta}) \right]^T \bar{F}^{-1} \\ &\quad \times \left[\dot{\bar{\varphi}}(t) + A(\bar{\varphi}(t) - \bar{\theta}) \right] dt. \end{aligned} \quad (25)$$

Как и в предложении 1, второй интеграл представляет норму при скалярном произведении

$$\langle \bar{\varphi}, \bar{\psi} \rangle = \int_{-\infty}^0 w_\delta e^t \bar{\varphi}^T \bar{F}^{-1} \bar{\psi} dt,$$

и его минимум по $\bar{\varphi}$ таким, что $\bar{\varphi}(-\infty) = 0$ и $\bar{\varphi}(0) = \bar{x}$, достигается, если $\bar{\varphi}(t) + A(\bar{\varphi}(t) - \bar{\theta}) = \bar{F} e^{t(A - \mathbf{I})} \bar{\mathcal{S}}_\delta^{-1} (\bar{x} - \bar{\theta})$, где

$$\bar{\mathcal{S}}_\delta = \int_{-\infty}^0 \omega_\delta^{-1}(t) e^t \exp\{t(A - \mathbf{I})\} \bar{F} \exp\{t(A - \mathbf{I})\} dt = \bar{\mathcal{S}} \left(1 + O\left(\frac{\lambda}{\delta}\right) \right).$$

Значение этого минимума равно $\frac{1}{2} (\bar{x} - \bar{\theta})^T \bar{\mathcal{S}}^{-1} (\bar{x} - \bar{\theta}) (1 + O(\lambda/\delta))$. Выберем $\delta = \sqrt{\lambda}$. Если x удовлетворяет (10), тогда из (23)–(25) получается следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{(-\infty, 0)}(\varphi) &\geq (1 - \sqrt{\lambda}) \left(\frac{2a_1x_1}{\sigma_1^2} + O(\lambda^2) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\bar{x} - \bar{\theta})^T \bar{\mathcal{S}}^{-1} (\bar{x} - \bar{\theta}) (1 + O(\sqrt{\lambda})) = \lambda + O(\lambda^{3/2}). \end{aligned}$$

Это завершает доказательство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bahadur R. R.* Some Limit Theorems in Statistics. Philadelphia, PA: SIAM, 1971, 42 p.
2. *Dupuis P., Ellis R. S.* A Weak Convergence Approach to the Theory of Large Deviations. New York: Wiley, 1997, 479 p.
3. *Fabian V.* On asymptotic normality in stochastic approximation. — *Ann. Math. Statist.*, 1968, v. 39, p. 1327–1332.
4. *Фрейдлин М. И.* Функционал действия для одного класса случайных процессов. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1972, т. 17, в. 3, с. 536–541.
5. *Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.
6. *Коростелев А. П.* Стохастические рекуррентные процедуры. М.: Наука, 1984.
7. *Коростелев А. П., Леонов С. Л.* Функционал действия для диффузионного процесса с разрывным переносом. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1992, v. 37, в. 3, с. 543–550.
8. *Korostelev A. P., Leonov S. L.* Action functional for diffusions in discontinuous media. — *Probab. Theory Relat. Fields*, 1993, v. 94, p. 317–333.
9. *Korostelev A. P., Rukhin A. L.* Large deviations probabilities for recursive M-estimators. — *Stochastics Stochastics Rep.*, 1996, v. 57, p. 185–197.
10. *Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З.* Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1972, 308 с.
11. *Rukhin A. L.* Recursive testing of multiple hypotheses: Consistency and efficiency of the Bayes rule. — *Ann. Statist.*, 1994, v. 22, p. 616–633.
12. *Sacks J.* Asymptotic distributions of stochastic approximation. — *Ann. Math. Statist.*, 1958, v. 29, p. 373–405.
13. *Sakrison D. J.* Efficient recursive estimation: Application to estimating the parameters of a covariance function. — *Internat. J. Engrg. Sci.*, 1965, v. 3, p. 461–483.
14. *Вентцель А. Д.* Пределные теоремы о больших отклонениях для марковских случайных процессов. М.: Наука, 1986.

Поступила в редакцию
1.VI.1998