Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Якимив, Предельная теорема для общего числа циклов случайной A -подстановки, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2007, том 52, выпуск 1, 69–83

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp5>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 16:14:40

© 2007 г.

ЯКЫМИВ А. Л.*

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ОБЩЕГО ЧИСЛА
ЦИКЛОВ СЛУЧАЙНОЙ A -ПОДСТАНОВКИ¹⁾

Пусть S_n — симметрическая группа подстановок степени n , A — некоторое непустое подмножество множества натуральных чисел $\mathbf{N}$ и $T_n = T_n(A)$ — совокупность всех подстановок из S_n , длины циклов которых принадлежат множеству A . Подстановки из T_n принято называть A -подстановками. Пусть ζ_n есть общее число циклов случайной подстановки, равномерно распределенной на T_n . В статье найден подход, позволяющий исходя из асимптотики числа A -подстановок степени n доказывать предельную теорему для ζ_n . Предельная теорема для ζ_n , полученная здесь, является новой в ряде случаев, когда известна асимптотика числа A -подстановок степени n , но предельная теорема для ζ_n другими методами еще не доказана. Автором замечено, что в ряде работ различных авторов число A -подстановок степени n , деленное на $n!$, представляет собой правильно меняющуюся по Карамата функцию с показателем $\sigma - 1$, где σ — асимптотическая плотность множества A (положительная). Основной целью настоящей статьи является доказательство предельной теоремы для ζ_n именно при этом предположении, без каких-либо дополнительных ограничений, характерных для предыдущих исследований.

Ключевые слова и фразы: асимптотическая плотность множества A , логарифмическая плотность множества A , случайные A -подстановки, общее число циклов A -подстановки, правильно меняющиеся функции, медленно меняющиеся функции, тауберова теорема.

1. Введение. Зафиксируем непустое множество $A \subseteq \mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. A -подстановками называются подстановки, длины циклов которых принадлежат множеству A (см. книгу [28]). Пусть $T_n = T_n(A)$ есть множество A -подстановок степени n и c_n — случайная подстановка, равномерно распределенная на T_n . Через ζ_{mn} обозначим число циклов подстановки c_n , имеющих длину $m \in \mathbf{N}$. Ясно, что $\zeta_{mn} = 0$ при $m \notin A$.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: arsen@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-01-00583) и гранта президента РФ по поддержке ведущих научных школ НШ-4129.2006.1.

Далее, пусть ζ_n — общее число циклов случайной подстановки c_n , т.е.

$$\zeta_n = \sum_{m \in \mathbf{N}} \zeta_{mn}.$$

Случайным A -подстановкам посвящено большое число работ (см. [1]–[9], [11], [12], [14]–[23], [25], [26], [31]–[38]). Кроме того, имеется пять монографий, содержащих сведения об A -подстановках: [10], [13], [27], [28], [39].

Через $|X|$ мы будем везде далее обозначать число элементов конечного множества X . В большинстве упомянутых работ для тех или иных классов множеств A установлена асимптотика $|T_n(A)|$ при $n \rightarrow \infty$. Кроме того, в некоторых из них получены предельные теоремы для ζ_{mn} и ζ_n при фиксированном $m \in A$ и $n \rightarrow \infty$. При этом, как правило, наиболее сложной для доказательства оказывалась предельная теорема для ζ_n .

В настоящей статье мы будем предполагать, что

$$p(n) \equiv \frac{|T_n(A)|}{n!} = n^{\sigma-1} L(n), \quad n \in \mathbf{N}, \quad (1)$$

где функция $L(n)$ медленно меняется на бесконечности [29], а $\sigma \in (0, 1]$. Имеется широкий класс примеров множеств A , для которых выполнено (1) (см. работы [3], [6], [11], [12], [18]–[20], [23], [32]–[37]), более подробный обзор этих работ содержится в статье [38].

В [20] показано, что из (1) следует существование логарифмической плотности множества A , равной σ , т.е. существование предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{m \in A, m \leq n} \frac{1}{m} = \sigma. \quad (2)$$

Несколько более сильное утверждение получено в недавней работе [38], а именно, в [38] показано, что из (1) следует существование асимптотической плотности множества A , равной σ , т.е. существование предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m \in A, m \leq n} 1 = \sigma. \quad (3)$$

(Как известно, из существования асимптотической плотности множества A следует существование логарифмической плотности A , но не наоборот — см. [24, раздел 3.1].) Отметим также, что из (3) не следует (1), как это видно на примере множества всех четных натуральных чисел.

В настоящей статье доказана предельная теорема об асимптотической нормальности ζ_n при $n \rightarrow \infty$. Отметим, что ранее предельная теорема для ζ_n доказывалась различными авторами при выполнении условий типа (1), (2), (3) и других. Предлагаемая ниже теорема требует выполнения только условия (1).

2. Основной результат. Положим при $n \in \mathbb{N}$

$$l(n) = \sum_{m \in A(n)} \frac{1}{m}, \quad (4)$$

где $A(n) = A \cap [1, n]$, $l(n) = 0$ при $A(n) = \emptyset$. Основным результатом настоящей статьи является следующая предельная теорема.

Теорема 1. Пусть выполнено (1). Тогда при $n \rightarrow \infty$ распределение случайной величины

$$\zeta'_n = \frac{\zeta_n - l(n)}{\sqrt{\sigma \ln n}} \quad (5)$$

слабо сходится к стандартному нормальному закону.

Теорема 1 выводится из некоторой модификации тауберовой теоремы 4 статьи [32], а именно, следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть для всех $u, v \in (0, 1)$ конечна функция

$$A(u, v) = \sum_{m, n \geq 0} m^{\alpha-1} a(m, n) u^m v^n$$

($\alpha > 1$, $a(m, n) \geq 0$), причем для произвольных $\lambda, \mu > 0$

$$A \frac{e^{-\lambda/t}, e^{-\mu/t}}{r(t)} \rightarrow \lambda^{-\alpha} \mu^{-\beta} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \quad (6)$$

при $t \rightarrow \infty$, где $\beta > 0$, $r(t)$ — некоторая положительная функция переменной t , $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера. Если $a(m, n)$ монотонна по m и при $n \rightarrow \infty$, $m \asymp n$, $w \geq n$, $w - n = o(n)$

$$\frac{a(m, w) - a(m, n)}{a(m, w) + a(m, n)} \rightarrow 0, \quad (7)$$

то для произвольных $y, z > 0$ при $t \rightarrow \infty$

$$a(tz, ty) \sim r(t) t^{-1-\alpha} y^{\beta-1} \quad (8)$$

(при нецелых u, v полагаем $a(u, v) = a([u], [v])$).

З а м е ч а н и е 1. Для выполнения (7) необходимо и достаточно, чтобы при $n \rightarrow \infty$, $m \asymp n$, $w \geq n$, $w - n = o(n)$

$$\frac{a(m, w)}{a(m, n)} \rightarrow 1. \quad (9)$$

Тем не менее, при доказательстве теоремы 1 нам удобно воспользоваться тауберовым условием именно в форме (7).

В самом деле, из (9) следует, что при $n \rightarrow \infty$, $m \asymp n$, $w \geq n$, $w - n = o(n)$

$$\frac{a(m, w) - a(m, n)}{a(m, n)} \rightarrow 0,$$

откуда следует (7) ввиду неотрицательности $a(m, w)$. Обратно, пусть имеет место (7). Тогда при $n \rightarrow \infty$, $m \asymp n$, $w \geq n$, $w - n = o(n)$

$$\frac{a(m, w) - a(m, n)}{a(m, w) + a(m, n)} = \frac{a(m, w)/a(m, n) - 1}{a(m, w)/a(m, n) + 1} \rightarrow 0.$$

Из последнего соотношения следует (9), так как функция $g(z)$, обратная к функции $f(z) = (z - 1)/(z + 1)$, непрерывна в нуле и $g(0) = 1$.

Зафиксируем произвольное неотрицательное x и положим при $m, n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$

$$a(m, n) = p(n) \mathbf{E} \exp \left(\frac{\zeta_n x}{\sqrt{l(m)}} \right), \quad (10)$$

где $p(0) = 1$, $l(0) = 0$ (при $l(m) = 0$ будем считать $a(m, n) = 0$). Ключом для использования тауберовой теоремы 2 при доказательстве теоремы 1 является следующая лемма.

Лемма 1. *Предположим, что выполнено соотношение (1). Тогда для чисел $a(m, n)$, определенных равенством (10), справедливо соотношение (7).*

3. Доказательства. Доказательство теоремы 2. В работе [32] показано, что из (6) и монотонности $a(m, n)$ по m следует, что для произвольных $y, z > 0$ при $m = [ty]$ и $t \rightarrow \infty$

$$\sum_{w=0}^{[ty]} a(m, w) \frac{t^\alpha}{r(t)} \rightarrow \frac{y^\beta}{\beta}, \quad (11)$$

откуда для произвольного $\delta > 0$ при $t \rightarrow \infty$

$$\sum_{w=[ty]+1}^{[ty(1+\delta)]} a(m, w) \frac{t^\alpha}{r(t)} \rightarrow \frac{y^\beta}{\beta} ((1+\delta)^\beta - 1). \quad (12)$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, 1)$. Пусть положительные константы δ и t_0 таковы, что при $t \geq t_0$ и $0 \leq w - [ty] \leq \delta ty + 1$

$$-\varepsilon(a(m, w) + a(m, n)) \leq a(m, w) - a(m, n) \leq \varepsilon(a(m, w) + a(m, n)), \quad (13)$$

где $n = [ty]$, откуда

$$a(m, n) \geq a(m, w) \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}.$$

Отсюда при $M = [ty(1 + \delta)] - [ty]$

$$a(m, n) M \geq \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \sum_{w=[ty]+1}^{[ty(1+\delta)]} a(m, w),$$

или же

$$a(m, n) \geq \frac{1 - \varepsilon}{M(1 + \varepsilon)} \sum_{w=[ty]+1}^{[ty(1+\delta)]} a(m, w).$$

Из последнего неравенства с использованием (12) выводим, что

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{a(m, n) t^{1+\alpha}}{r(t)} &\geq \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{[ty(1+\delta)] - [ty]} \sum_{w=[ty]+1}^{[ty(1+\delta)]} a(m, w) \frac{t^\alpha}{r(t)} \\ &= \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \frac{1}{\delta y} \frac{y^\beta}{\beta} ((1+\delta)^\beta - 1). \end{aligned}$$

Поскольку левая часть выписанного неравенства не зависит от ε и δ , то, устремляя в правой части ε и δ к нулю, убеждаемся в том, что

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{a(m, n) t^{1+\alpha}}{r(t)} \geq y^{\beta-1}. \quad (14)$$

Из неравенств (13) следует также, что при $t \geq t_0$ и $0 \leq w - [ty] \leq \delta ty + 1$

$$a(m, n) \leq a(m, w) \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

откуда

$$a(m, n) \leq a(m, w) \frac{1+\varepsilon}{M(1-\varepsilon)} \sum_{w=[ty]+1}^{[ty(1+\delta)]} a(m, w).$$

Поэтому

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{a(m, n) t^{1+\alpha}}{r(t)} \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \frac{1}{\delta y} \frac{y^\beta}{\beta} ((1+\delta)^\beta - 1),$$

или, в силу произвольности ε и δ ,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{a(m, n) t^{1+\alpha}}{r(t)} \leq y^{\beta-1}. \quad (15)$$

Из (14) и (15) следует (8). Теорема 2 доказана.

Доказательство леммы 1. Пусть $m \geq \min A$. Положим $h(m) = \exp(x/\sqrt{l(m)})$. Согласно [28, (0.14)], для произвольного $s \in [0, 1)$

$$\sum_{n \geq 0} a(m, n) s^n = \exp \left(f(s) + \sum_{i \in A} (h(m) - 1) \frac{s^i}{i} \right), \quad (16)$$

где

$$f(s) = \sum_{i \in A} \frac{s^i}{i}. \quad (17)$$

В силу (16) $a(m, n) = \text{coef}_{s^n} \exp(f(s) + \sum_{i \in A} (h(m) - 1) s^i/i)$. Согласно [3, (6.3)], $p(l) = \text{coef}_{s^l} \exp(f(s))$ при $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (это следует также из формулы (16) при $x = 0$). Поэтому

$$a(m, n) = \text{coef}_{s^n} \sum_{l=0}^{\infty} p(l) s^l \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(h(m) - 1)^k}{k!} \left(\sum_{i \in A} \frac{s^i}{i} \right)^k$$

$$\begin{aligned}
&= \text{coef}_{s^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(h(m)-1)^k}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} p(l) s^l \left(\sum_{i \in A} \frac{s^i}{i} \right)^k \\
&= p(n) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(h(m)-1)^k}{k!} S_k(n),
\end{aligned}$$

где

$$S_k(n) = \sum_{i_1, \dots, i_k \in A} \frac{1}{i_1 \cdots i_k} p(n - i_1 - \dots - i_k) \quad (18)$$

(мы полагаем $p(r) = 0$ при $r < 0$). Поскольку $S_k(n) = 0$ при $k > n$, то мы имеем:

$$a(m, n) = p(n) + \sum_{k=1}^n \frac{(h(m)-1)^k}{k!} S_k(n) = p(n) + \sum_{k=1}^n b_k(m, n), \quad (19)$$

где

$$b_k(m, n) = \frac{(h(m)-1)^k}{k!} S_k(n). \quad (20)$$

Из (2) и (4) следует, что

$$l(n) \sim \sigma \ln n \quad (n \rightarrow \infty). \quad (21)$$

Для данной последовательности $r(n) = w(n) - n$ подберем такую последовательность $g(n) > 0$, чтобы было выполнено

$$g(n) = o(n), \quad \frac{r(n)}{g(n)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (22)$$

Так как $r(n) = o(n)$ при $n \rightarrow \infty$, то такой выбор возможен. Оценим сверху

$$I_1(k, n) = \sum_{i_1, \dots, i_k \in A, \sum_{j=1}^k i_j \in [n-g(n), n]} \frac{1}{i_1 \cdots i_k} p(n - i_1 - \dots - i_k). \quad (23)$$

Поскольку $\sum_{j=1}^k i_j \geq v(n) \equiv n - g(n)$, то для некоторого $j = 1, \dots, k$ справедливо неравенство $i_j \geq v(n)/k$. Поэтому

$$I_1(k, n) \leq k \sum_{i_1, \dots, i_k \in A, \sum_{j=1}^k i_j \in [nv(n), n], i_k \geq v(n)/k} \frac{1}{i_1 \cdots i_k} p(n - i_1 - \dots - i_k). \quad (24)$$

Введем замену переменных

$$y = n - i_1 - \dots - i_k \quad (i_k = n - i_1 - \dots - i_{k-1} - y).$$

Так как $i_k \geq v(n)/k$, то, согласно (24),

$$\begin{aligned} I_1(k, n) &\leq \frac{k^2}{v(n)} \sum_{y=0}^{g(n)} p(y) \sum_{i_1, \dots, i_{k-1} \in A, \sum_{j=1}^{k-1} i_j \leq n-1} \frac{1}{i_1 \cdots i_{k-1}} \\ &\leq \frac{k^2}{v(n)} \sum_{y=0}^{g(n)} p(y) \sum_{i_1, \dots, i_{k-1} \in A(n)} \frac{1}{i_1 \cdots i_{k-1}} \\ &= \frac{k^2}{v(n)} \sum_{y=0}^{g(n)} p(y) (l(n))^{k-1} = \frac{k^2}{v(n)} O(g(n) p(g(n))) (l(n))^{k-1} \quad (25) \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$. Поскольку $np(n)$ правильно меняется на бесконечности с положительным показателем σ и $g(n) = o(n)$ ($n \rightarrow \infty$) (см. (1) и (22)), то

$$g(n) p(g(n)) = o(np(n)) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (26)$$

Из (22), (25) и (26) следует, что при $k \leq n$

$$I_1(k, n) \leq \delta(n) \frac{k^2}{v(n)} np(n)(l(n))^{k-1} = \delta_1(n) k^2 p(n)(l(n))^{k-1}, \quad (27)$$

где $\delta(n) \rightarrow 0$ и $\delta_1(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Зафиксируем $c \in (0, 1)$ и положим

$$I_2(k, n) = \sum_{i_1, \dots, i_k \in A, \sum_{j=1}^k i_j \in (nc, n]} \frac{1}{i_1 \cdots i_k} p(n - i_1 - \cdots - i_k). \quad (28)$$

Проводя точно такие же оценки, как и с суммой $I_1(k, n)$, убеждаемся в том, что при $n \rightarrow \infty$ и $k \leq n$

$$I_2(k, n) = O(k^2 p(n)(l(n))^{k-1}), \quad (29)$$

причем константа в « O » не зависит от k . Положим

$$I_3(k, n) = \sum_{i_1, \dots, i_k \in A, \sum_{j=1}^k i_j \leq cn} \frac{1}{i_1 \cdots i_k} p(n - i_1 - \cdots - i_k). \quad (30)$$

Поскольку в наших условиях суммирования $n - i_1 - \cdots - i_k \geq n(1 - c)$, то в силу (1) при $n \rightarrow \infty$ и $k \leq n$

$$I_3(k, n) = O(p(n)) \sum_{i_1, \dots, i_k \in A, \sum_{j=1}^k i_j \leq cn} \frac{1}{i_1 \cdots i_k}, \quad (31)$$

причем константа в « O » не зависит от k . Как и ранее,

$$\sum_{i_1, \dots, i_k \in A, \sum_{j=1}^k i_j \leq cn} \frac{1}{i_1 \cdots i_k} \leq \sum_{i_1, \dots, i_k \in A(n)} \frac{1}{i_1 \cdots i_k} = (l(n))^k. \quad (32)$$

Из (31) и (32) следует, что при $n \rightarrow \infty$ и $k \leq n$

$$I_3(k, n) = O(p(n)(l(n))^k), \quad (33)$$

причем константа в « O » не зависит от k . Далее, оценим снизу при $k \leq cn$ и достаточно больших n

$$\begin{aligned} S_k(n) &= \sum_{i_1, \dots, i_k \in A} \frac{1}{i_1 \cdots i_k} p(n - i_1 - \dots - i_k) \\ &\geq \sum_{i_1, \dots, i_k \in A, \sum_{j=1}^k i_j \leq cn} \frac{1}{i_1 \cdots i_k} p(n - i_1 - \dots - i_k). \end{aligned}$$

Так как в последней сумме $n > n - i_1 - \dots - i_k \geq n(1 - c)$, то в силу (1) для достаточно больших $n \geq n_1 > 0$ и некоторой постоянной $c_1 > 0$, не зависящей от k ,

$$\begin{aligned} S_k(n) &\geq c_1 p(n) \sum_{i_1, \dots, i_k \in A, \sum_{j=1}^k i_j \leq cn} \frac{1}{i_1 \cdots i_k} \\ &\geq c_1 p(n) \sum_{i_1, \dots, i_k \in A(cn/k)} \frac{1}{i_1 \cdots i_k} = c_1 p(n) \left(l\left(\frac{cn}{k}\right) \right)^k. \end{aligned} \quad (34)$$

(Для функций $F(t)$, определенных при $t \in \mathbf{N}$, при нецелых $t > 1$ мы полагаем $F(t) = F([t])$.) Заметим, что

$$\begin{aligned} l(n) - l\left(\frac{cn}{k}\right) &= \sum_{i=[cn/k]+1, i \in A}^n \frac{1}{i} \leq \sum_{i=[cn/k]+1}^n \frac{1}{i} \\ &\leq \ln n - \ln \left(\left[\frac{cn}{k} \right] \right) \leq \ln \left(\frac{n}{cn/k - 1} \right) \\ &= \ln \left(\frac{1}{c/k - 1/n} \right) = \ln \left(\frac{k}{c - k/n} \right) \\ &\leq \ln \left(\frac{k}{c/2} \right) = \ln k + c_2 \end{aligned} \quad (35)$$

при $k \leq cn/2$, где $c_2 = \ln(2/c)$. Из (35) следует, что при $k \leq cn/2$

$$\left(l\left(\frac{cn}{k}\right) \right)^k \geq (l(n))^k \left(1 - \frac{\ln k + c_2}{l(n)} \right)^k. \quad (36)$$

В силу (21) существует $n_2 > n_1$ такое, что при $n \geq n_2$ выполнено неравенство $l(n) \geq \sigma_1 \ln n$, где постоянная $\sigma_1 \in (0, \sigma)$. Поэтому из (36) следует, что при $n \geq n_2$ и $k \leq cn/2$

$$\left(l\left(\frac{cn}{k}\right) \right)^k \geq (l(n))^k \left(1 - \frac{\ln k + c_2}{\sigma_1 \ln n} \right)^k = (l(n))^k \exp \left(k \ln \left(1 - \frac{\ln k + c_2}{\sigma_1 \ln n} \right) \right).$$

Заметим, что для произвольной постоянной $M > 0$ при $k \leq M\sqrt{\ln n}$

$$k \ln \left(1 - \frac{\ln k + c_2}{\sigma_1 \ln n} \right) = O \left(\frac{k \ln k + kc_2}{\ln n} \right) = o(1) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Стало быть, существует $n_3 > n_2$ такое, что при $n \geq n_3$ и $k \leq M\sqrt{\ln n}$

$$\left(l\left(\frac{cn}{k}\right)\right)^k \geq c_3(l(n))^k, \quad (37)$$

где постоянная $c_3 \in (0, 1)$ не зависит от k . Из (34) и (37) следует, что при $n \geq n_3$ и $k \leq M\sqrt{\ln n}$

$$S_k(n) \geq c_4 p(n)(l(n))^k, \quad (38)$$

где $c_4 = c_1 c_3$. Далее, покажем, что для некоторой постоянной $M > 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $m \asymp n$

$$\sum_{k > M\sqrt{\ln n}} b_k(m, n) = o(p(n)). \quad (39)$$

В самом деле, из (29) и (33) следует, что при $n \rightarrow \infty$ и $k \leq n$

$$S_k(n) = I_2(k, n) + I_3(k, n) = O\left(k^2 p(n)(l(n))^k\right), \quad (40)$$

где постоянная в « O » не зависит от k . Значит, существуют такие $n_4 > n_3$ и постоянная $c_5 \in (0, \infty)$, что при $n \geq n_4$ и $k \leq n$

$$S_k(n) \leq c_5 k^2 p(n)(1 + \ln n)^k \quad (41)$$

в силу неравенства $l(n) = \sum_{i \in A(n)} 1/i \leq \sum_{i=1}^n 1/i < 1 + \ln n$. Далее, при $n \rightarrow \infty$ и $m \asymp n$, согласно (21),

$$\begin{aligned} h(m) - 1 &= \exp\left(\frac{x}{\sqrt{l(m)}}\right) - 1 = (1 + o(1)) \frac{x}{\sqrt{l(m)}} \\ &= (1 + o(1)) \frac{x}{\sqrt{\sigma \ln m}} = (1 + o(1)) \frac{x}{\sqrt{\sigma} \sqrt{\ln n}}. \end{aligned}$$

Следовательно, для произвольных постоянных s_1 и s_2 , $0 < s_1 < s_2 < \infty$, существует такое $n_5 > n_4$, что при $n \geq n_5$ и $m \in [s_1 n, s_2 n]$

$$h(m) - 1 \leq \frac{x + 1}{\sqrt{\sigma} \sqrt{\ln n}}. \quad (42)$$

В силу (41) и (42), при $n \geq n_5$ и $m \in [s_1 n, s_2 n]$

$$\begin{aligned} b_k(m, n) &= \frac{(h(m) - 1)^k}{k!} S_k(n) \leq c_5 k^2 \left(\frac{x + 1}{\sqrt{\sigma}}\right)^k \frac{1}{k! (\ln n)^{k/2}} (2 \ln n)^k p(n) \\ &= c_5 k^2 c_6^k \frac{(\sqrt{\ln n})^k}{k!} p(n) \equiv H(k, n), \end{aligned} \quad (43)$$

где $c_6 = 2(x + 1)/\sqrt{\sigma}$. Учитывая формулу Стирлинга для $k!$, получаем, что

$$\begin{aligned} H(k, n) &= (1 + \eta(k)) c_7 k^{3/2} (ec_6)^k \left(\frac{\sqrt{\ln n}}{k}\right)^k p(n) \\ &= (1 + \eta(k)) c_7 k^{3/2} \left(\frac{ec_6 \sqrt{\ln n}}{k}\right)^k p(n), \end{aligned} \quad (44)$$

где $c_7 = c_5/\sqrt{2\pi}$, а $\eta(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Из (43) и (44) выводим, что при $m \in [s_1 n, s_2 n]$ и $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{k > e^2 c_6 \sqrt{\ln n}} b_k(m, n) = O(p(n)) \sum_{k > e^2 c_6 \sqrt{\ln n}} k^{3/2} e^{-k} = o(p(n)),$$

откуда следует (39) с $M = e^2 c_6$. В силу (19) и (39) для доказательства (7) достаточно показать, что при $n \rightarrow \infty$, $m \asymp n$, $w \geq n$, $w - n = o(n)$

$$\frac{v(m, w) - v(m, n)}{v(m, w) + v(m, n)} \rightarrow 0, \quad (45)$$

где

$$v(m, n) = p(n) + \sum_{k=1}^{[M\sqrt{\ln n}]} b_k(m, n). \quad (46)$$

Докажем (45). Положим

$$I_4(k, n) = \sum_{i_1, \dots, i_k \in A, \sum_{j=1}^k i_j < n - g(n)} \frac{1}{i_1 \cdots i_k} p(n - i_1 - \cdots - i_k). \quad (47)$$

Полагая $a = \sum_{j=1}^k i_j$, мы имеем, согласно (1), при $r = r(n) = w(n) - n$

$$\begin{aligned} \frac{p(n - a + r) - p(n - a)}{p(n - a)} &= \frac{p(n - a + r)}{p(n - a)} - 1 \\ &= \left(1 + \frac{r}{n - a}\right)^{\sigma-1} \frac{L(n - a + r)}{L(n - a)} - 1 \\ &= \left(1 + \frac{r}{n - a}\right)^{\sigma-1} (1 + o(1)) = o(1) + (1 + o(1)) \frac{r(\sigma - 1)}{n - a} = o(1) \end{aligned} \quad (48)$$

равномерно по $n - a > g(n)$, так как по условию (11) $r(n) = o(g(n))$ при $n \rightarrow \infty$. Точно так же мы убеждаемся, что

$$\frac{p(n + r) - p(n)}{p(n)} = o(1) \quad (49)$$

при $n \rightarrow \infty$ и $r = o(n)$. Из (47) и (48) следует, что

$$|I_4(k, w) - I_4(k, n)| \leq \varepsilon(r, n) I_4(k, n) \leq \varepsilon(r, n) S_k(n), \quad (50)$$

где $\varepsilon(r, n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $r = o(n)$. Далее,

$$I_1(k, w) - I_1(k, n) \geq -I_1(k, n). \quad (51)$$

Согласно (21) и (27), при $k \leq M\sqrt{\ln n}$

$$I_1(k, n) \leq M^2 \delta_1(n) p(n) (l(n))^{k-1} \ln n = \delta_2(n) p(n) (l(n))^k, \quad (52)$$

где $\delta_2(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Из (38) и (52) следует, что при $n \geq n_3$ и $k \leq M\sqrt{\ln n}$

$$I_1(k, n) \leq \delta_3(n) S_k(n), \quad (53)$$

где $\delta_3(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Из (50), (51) и (53) получаем, что при $n \geq n_3$ и $k \leq M\sqrt{\ln n}$

$$\begin{aligned} S_k(w) - S_k(n) &= (I_4(k, w) - I_4(k, n)) + (I_1(k, w) - I_1(k, n)) \\ &\geq -(\varepsilon(r, n) + \delta_3(n)) S_k(n) = -\varepsilon_1(r, n) S_k(n), \end{aligned} \quad (54)$$

где

$$\varepsilon_1(r, n) \geq 0, \quad \varepsilon_1(r, n) \rightarrow 0 \quad (55)$$

при $n \rightarrow \infty$ и $r/n \rightarrow 0$. Из (20), (46) и (54) следует, что при $n \geq n_3$

$$\begin{aligned} v(m, w) - v(m, n) &= p(w) - p(n) + \sum_{k=1}^{[M\sqrt{\ln n}]} \frac{(h(m) - 1)^k}{k!} (S_k(w) - S_k(n)) \\ &\geq p(w) - p(n) - \varepsilon_1(r, n) \sum_{k=1}^{[M\sqrt{\ln n}]} \frac{(h(m) - 1)^k}{k!} S_k(n) \\ &\geq -\varepsilon_2(r, n) \left(p(n) + \sum_{k=1}^{[M\sqrt{\ln n}]} b_k(m, n) \right) \\ &= -\varepsilon_2(r, n) v(m, n) \geq -\varepsilon_2(r, n) (v(m, w) + v(m, n)), \end{aligned} \quad (56)$$

где

$$\varepsilon_2(r, n) \geq 0, \quad \varepsilon_2(r, n) \rightarrow 0 \quad (57)$$

при $n \rightarrow \infty$ и $r/n \rightarrow 0$ в силу (49) и (55). Из (56) и (57) следует, что при $n \rightarrow \infty$, $m \asymp n$, $w \geq n$, $w - n = o(n)$

$$\liminf \left(\frac{v(m, w) - v(m, n)}{v(m, w) + v(m, n)} \right) \geq 0. \quad (58)$$

Для получения аналогичного неравенства сверху вместо (51) используем соотношение

$$I_1(k, w) - I_1(k, n) \leq I_1(k, w). \quad (59)$$

Из (53) следует, что при $w \geq n_3$ и $k \leq M\sqrt{\ln n}$

$$I_1(k, w) \leq \delta_3(w) S_k(w), \quad (60)$$

где $\delta_3(w) \rightarrow 0$ при $w \rightarrow \infty$. Из (50), (59) и (60) получаем, что при $w \geq n \geq n_3$ и $k \leq M\sqrt{\ln n}$

$$\begin{aligned} S_k(w) - S_k(n) &= (I_4(k, w) - I_4(k, n)) + (I_1(k, w) - I_1(k, n)) \\ &\leq \varepsilon(r, n) S_k(n) + \delta_3(w) S_k(w). \end{aligned} \quad (61)$$

Из (20), (46) и (61) следует, что при $w \geq n \geq n_3$

$$v(m, w) - v(m, n) = p(w) - p(n) + \sum_{k=1}^{[M\sqrt{\ln n}]} \frac{(h(m) - 1)^k}{k!} (S_k(w) - S_k(n))$$

$$\begin{aligned} &\leq p(w) - p(n) + \varepsilon_1(r, n) \sum_{k=1}^{[M\sqrt{\ln n}]} \frac{(h(m) - 1)^k}{k!} S_k(n) \\ &\quad + \delta_3(w) \sum_{k=1}^{[M\sqrt{\ln n}]} \frac{(h(m) - 1)^k}{k!} S_k(w). \end{aligned} \quad (62)$$

В силу (46) и (49) мы имеем:

$$\begin{aligned} &p(w) - p(n) + \varepsilon_1(r, n) \sum_{k=1}^{[M\sqrt{\ln n}]} \frac{(h(m) - 1)^k}{k!} S_k(n) \\ &\leq \varepsilon_3(r, n) \left(p(n) + \sum_{k=1}^{[M\sqrt{\ln n}]} \frac{(h(m) - 1)^k}{k!} S_k(n) \right) = \varepsilon_3(r, n) v(m, n), \end{aligned} \quad (63)$$

где

$$\varepsilon_3(r, n) \rightarrow 0 \quad (64)$$

при $n \rightarrow \infty$ и $r/n \rightarrow 0$. Далее, так как $w \geq n$, то

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{[M\sqrt{\ln n}]} \frac{(h(m) - 1)^k}{k!} S_k(w) \\ &\leq p(w) + \sum_{k=1}^{[M\sqrt{\ln w}]} \frac{(h(m) - 1)^k}{k!} S_k(w) = v(m, w). \end{aligned} \quad (65)$$

Из соотношений (62), (63) и (65) следует, что при $w \geq n \geq n_3$

$$v(m, w) - v(m, n) \leq \max(\varepsilon_3(r, n), \delta_3(w))(v(m, w) + v(m, n)).$$

В силу (64) и того, что $\delta_3(w) \rightarrow 0$ при $w \rightarrow \infty$, из последнего неравенства получаем, что при $n \rightarrow \infty$, $m \asymp n$, $w \geq n$, $w - n = o(n)$

$$\limsup \left(\frac{v(m, w) - v(m, n)}{v(m, w) + v(m, n)} \right) \leq 0. \quad (66)$$

Из соотношений (58) и (66) следует (45). А из (45), как было отмечено ранее, следует (7). Лемма 1 доказана.

Положим в теореме 2 $\beta = \sigma$ и при $t > 0$

$$\begin{aligned} L_1(t) &= \exp(l(t) - \sigma \ln t), \\ L_2(t) &= \frac{\exp(x\sqrt{l(t)} + x^2/2 - \sigma\gamma)}{\Gamma(\sigma)}, \end{aligned} \quad (67)$$

$$r(t) = \exp(l(t)) t^\alpha L_2(t) = t^{\alpha+\sigma} L_1(t) L_2(t) = t^{\alpha+\sigma} L_0(t),$$

где $L_0(t) = L_1(t) L_2(t)$, γ — постоянная Эйлера, а функция $l(t)$ определена равенством (4).

В работе [33] доказаны следующие две леммы.

Лемма 2. Пусть выполнено (3). Тогда для всякого фиксированного $\mu > 0$ при $t \rightarrow \infty$

$$f(e^{-\mu/t}) = l(t) - \sigma \ln \mu - \sigma \gamma + o(1)$$

(функция $f(s)$ определена равенством (17)).

Лемма 3. Предположим, что имеет место (3). Тогда для некоторого $\alpha > 1$ и произвольного $\lambda > 0$ при $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\lambda m}{t}\right) m^{\alpha-1} \exp(l(t) h(m)) \\ & \sim \lambda^{-\alpha} \Gamma(\alpha) t^{\alpha} \exp\left(l(t) + x\sqrt{l(t)} + \frac{x^2}{2}\right). \end{aligned} \quad (68)$$

Доказательство теоремы 1. Согласно лемме 3, выберем $\alpha > 1$, для которого имеет место (68). Тогда для чисел $a(m, n)$, определенных в соотношении (10), и всех $u, v \in [0, 1]$ в силу (16) и (17)

$$A(u, v) \equiv \sum_{m, n \geq 0} m^{\alpha-1} a(m, n) u^m v^n = \sum_{m \geq 0} u^m m^{\alpha-1} \exp(h(m) f(v)). \quad (69)$$

Будем полагать в (69) $u = \exp(-\lambda/t)$ и $v = \exp(-\mu/t)$, где $\lambda, \mu, t > 0$. Согласно (69) и лемме 2, при $t \rightarrow \infty$

$$A(u, v) \sim \mu^{-\sigma} e^{-\sigma \gamma} \sum_{m \geq 0} u^m m^{\alpha-1} \exp(h(m) l(t)).$$

Воспользовавшись леммой 3, отсюда получаем, что при $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} A(u, v) & \sim \lambda^{-\alpha} \mu^{-\sigma} \Gamma(\alpha) e^{-\sigma \gamma} t^{\alpha} \exp\left(l(t) + x\sqrt{l(t)} + \frac{x^2}{2}\right) \\ & = \lambda^{-\alpha} \mu^{-\sigma} \Gamma(\alpha) \Gamma(\sigma) t^{\alpha} \exp(l(t)) L_2(t) = \lambda^{-\alpha} \mu^{-\sigma} \Gamma(\sigma) r(t) \end{aligned}$$

в силу (67). Из леммы 1 и последнего соотношения следует, что выполнены все предположения теоремы 2. По этой теореме при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} a(n, n) & \sim r(n) n^{-1-\alpha} = n^{\sigma-1} L_1(n) L_2(n) \\ & = n^{\sigma-1} L_1(n) \frac{\exp(x\sqrt{l(n)} + x^2/2 - \sigma \gamma)}{\Gamma(\sigma)}. \end{aligned} \quad (70)$$

Полагая в (10) $x = 0$, отсюда получаем, что

$$p(n) \sim n^{\sigma-1} L_1(n) \frac{\exp\{-\sigma \gamma\}}{\Gamma(\sigma)} \quad (n \rightarrow \infty). \quad (71)$$

Далее, из (10), (70) и (71) следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E} \exp\left(\frac{\zeta_n x}{\sqrt{l(n)}}\right) \sim \exp\left(x\sqrt{l(n)} + \frac{x^2}{2}\right),$$

или

$$\mathbf{E} \exp\left(\frac{x(\zeta_n - l(n))}{\sqrt{l(n)}}\right) \rightarrow \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Утверждение теоремы 1 следует из (2) и последнего соотношения. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Пусть выполнено (1). Тогда функция $L(n)$ из (1) имеет при $n \rightarrow \infty$ следующий асимптотический вид:

$$L(n) \sim L_1(n) \frac{\exp\{-\sigma\gamma\}}{\Gamma(\sigma)} = \exp\left(\sum_{k \in A, k \leq n} \frac{1}{k} - \sigma \ln n\right) \frac{\exp\{-\sigma\gamma\}}{\Gamma(\sigma)}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотников Ю. В., Сачков В. Н., Тараканов В. Е. Асимптотическая нормальность некоторых величин, связанных с цикловой структурой случайных подстановок. — Матем. сб., 1976, т. 99, № 1, с. 121–133.
2. Болотников Ю. В., Сачков В. Н., Тараканов В. Е. О некоторых классах случайных величин на циклах подстановок. — Матем. сб., 1979, т. 108, № 1, с. 91–104.
3. Бендер Э. А. Асимптотические методы в теории перечислений. — Перечислительные задачи комбинаторного анализа. М.: Мир, 1979, с. 266–310.
4. Вольнец Л. М. Число решений уравнения в симметрической группе. — Вероятностные процессы и их приложения. М.: МИЭМ, 1985, с. 104–109.
5. Вольнец Л. М. О числе решений уравнения $x^s = e$ в симметрической группе. — Матем. заметки, 1986, т. 40, № 2, с. 155–160.
6. Вольнец Л. М. Пример нестандартной асимптотики числа подстановок с ограничениями на длины циклов. — Вероятностные процессы и их приложения. М.: МИЭМ, 1989, с. 85–90.
7. Grusho A. A. Properties of random permutations with constraints on the maximum cycle length. — Proceedings of the Third Petrozavodsk Conference on Probabilistic Methods in Discrete Mathematics (Petrozavodsk, 1992). Moscow/Utrecht: TVP/VSP, 1993, p. 60–63. (Progr. Pure Appl. Discrete Math., v. 1.)
8. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. О случайных подстановках. — Труды по дискретной математике. Т. 5, М.: Физматлит, 2002, с. 73–92.
9. Колчин А. В. Уравнения, содержащие неизвестную подстановку. — Дискретн. матем., 1994, т. 6, № 1, с. 100–115.
10. Колчин В. Ф. Случайные отображения. М.: Наука, 1984, 206 с.
11. Колчин В. Ф. О числе подстановок с ограничениями на длины циклов. — Дискретн. матем., 1989, т. 1, № 2, с. 97–109.
12. Kolchin V. F. The number of permutations with cycle lengths from a fixed set. — Random Graphs (Poznań, 1989). New York: Wiley, 1992, p. 139–149.
13. Колчин В. Ф. Случайные графы. М.: Физматлит, 2000, 255 с.
14. Manstavičius E. On random permutations without cycles of some lengths. — Period. Math. Hungar., 2001, v. 42, № 1–2, p. 37–44.
15. Минеев М. П., Павлов А. И. О числе подстановок специального вида. — Матем. сб., 1976, т. 99, № 3, с. 468–476.
16. Минеев М. П., Павлов А. И. Об одном уравнении в подстановках. — Тр. МИАН, 1976, т. 142, с. 182–194.
17. Павлов А. И. О числе и цикловой структуре подстановок некоторых классов. — Матем. сб., 1984, т. 124, № 4, с. 536–556.
18. Павлов А. И. О некоторых классах подстановок с теоретико-числовыми ограничениями на длины циклов. — Матем. сб., 1986, т. 129, № 2, с. 252–263.
19. Павлов А. И. О подстановках с длинами циклов из заданного множества. — Теория вероятн. и ее примен., 1986, т. 31, в. 3, с. 618–619.

20. Павлов А. И. О числе подстановок с длинами циклов из заданного множества. — Дискретн. матем., 1991, т. 3, № 3, с. 109–123.
21. Павлов А. И. О числе подстановок с конечным множеством длин циклов. — Тр. МИРАН, 1994, т. 207, с. 256–267.
22. Павлов А. И. Асимптотика числа подстановок с теоретико-числовыми ограничениями на длины циклов. — Докл. РАН, 1994, т. 335, № 5, с. 556–559.
23. Павлов А. И. О двух классах подстановок с теоретико-числовыми ограничениями на длины циклов. — Матем. заметки, 1997, т. 62, № 6, с. 881–891.
24. Постников А. Г. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Наука, 1971, 416 с.
25. Сачков В. Н. Отображения конечного множества с ограничениями на контуры и высоту. — Теория вероятн. и ее примен., 1972, т. 17, в. 4, с. 679–694.
26. Сачков В. Н. Случайные отображения ограниченной высоты. — Теория вероятн. и ее примен., 1973, т. 18, в. 1, с. 122–132.
27. Сачков В. Н. Комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1977, 319 с.
28. Сачков В. Н. Вероятностные методы в комбинаторном анализе. М.: Наука, 1978, 287 с.
29. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985, 141 с.
30. Shepp L. A., Lloyd S. P. Ordered cycle lengths in a random permutation. — Trans. Amer. Math. Soc., 1966, v. 121, № 2, p. 340–357.
31. Тимашев А. Н. Предельные теоремы в схемах размещений частиц по различным ячейкам с ограничениями на заполнения ячеек. — Теория вероятн. и ее примен., 2004, т. 49, в. 4, с. 712–725.
32. Якимив А. Л. О числе A -подстановок. — Матем. сб., 1989, т. 180, № 2, с. 294–303.
33. Якимив А. Л. О подстановках с длинами циклов из заданного множества. — Дискретн. матем., 1989, т. 1, № 1, с. 125–134.
34. Якимив А. Л. О случайных подстановках с длинами циклов из заданного множества. — Вероятностные процессы и их приложения. М.: МИЭМ, 1991, с. 24–27.
35. Якимив А. Л. О некоторых классах подстановок с длинами циклов из заданного множества. — Дискретн. матем., 1992, т. 4, № 3, с. 128–134.
36. Yakymiv A. L. Limit theorems for random A -permutations. — Proceedings of the Third Petrozavodsk Conference on Probabilistic Methods in Discrete Mathematics (Petrozavodsk, 1992). Moscow/Utrecht: TVP/VSP, 1993, p. 459–469. (Progr. Pure Appl. Discrete Math., v. 1.)
37. Якимив А. Л. О подстановках с длинами циклов из случайного множества. — Дискретн. матем., 2000, т. 12, № 4, с. 53–62.
38. Якимив А. Л. Распределение длины m -го максимального цикла случайной A -подстановки. — Дискретн. матем., 2005, т. 17, № 4, с. 40–58.
39. Якимив А. Л. Вероятностные приложения тауберовых теорем. М.: Физматлит, 2005, 256 с.

Поступила в редакцию
24.XII.2005

Исправленный вариант
6.IX.2006