Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Информация о пятой “Колмогоровской студенческой олимпиаде по теории вероятностей”, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, том 51, выпуск 3, 631–633

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp50>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:08:22

© 2006 г.

ИНФОРМАЦИЯ О НАУЧНОЙ ЖИЗНИ

ИНФОРМАЦИЯ О ПЯТОЙ
«КОЛМОГОРОВСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЕ
ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ»

Кафедра теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова при благотворительной поддержке научного центра «Физматкнига» провела пятую «Колмогоровскую студенческую олимпиаду по теории вероятностей». (Предыдущие олимпиады проводились в 2001, 2003, 2004 и 2005 гг.; см. [1]–[4]). Информация о всех олимпиадах содержится также на сайте кафедры теории вероятностей: <http://mech.math.msu.su/probab>. Решения задач первых четырех олимпиад, а также описание некоторых современных тем теории вероятностей и ее приложений, с которыми связана часть задач, можно найти в статье [5].

Олимпиада была проведена 16 апреля 2006 г. отдельно для II и III–V курсов (продолжительность — 5 часов). Оргкомитет констатирует, что в олимпиаде приняли участие 2 студента I курса, 44 студента II курса и 41 студент III–V курсов механико-математического факультета и факультета ВМиК Московского государственного университета, Московского физико-технического института, Санкт-Петербургского государственного университета, Вологодского государственного педагогического университета и Киевского национального университета.

Задачи олимпиады

В скобках после номера задачи указываются курсы, на которых предлагалась данная задача, а затем коэффициент решаемости, т.е. дробь, в числителе которой стоит число студентов (со всех курсов), решивших задачу, а в знаменателе — общее число ее решавших.

Задача 1. (II; $\frac{38}{46}$) В руке зажаты 6 травинок так, что их концы выступают сверху и снизу. Верхние концы случайным образом разбиваются на пары и попарно связываются между собой. То же делают и с нижними концами. Какова вероятность того, что в результате этой операции все 6 травинок окажутся связанными в одно кольцо?

Задача 2. (III–V; $\frac{9}{41}$) Пусть X, Y — независимые гауссовские случайные величины со средним 0 и дисперсией 1. Найти $E(X | XY)$.

Задача 3. (II–V; $\frac{18}{87}$) Существует ли вероятностное пространство и случайные величины $X_1, X_2, \dots$ на нем со свойствами:

- все X_n гауссовские со средним 0 и дисперсией 1;
- $X_n I(X_n \leq 0) = X_m I(X_m \leq 0)$ для любых n, m ;
- случайные величины $I(X_n \in [a_n, b_n])$, $n \in \mathbb{N}$, независимы для любых $a_n, b_n \geq 0$?

Задача 4. (II–V; $\frac{28}{87}$) Пусть X и Y — независимые случайные величины, причем X имеет непрерывное распределение, т.е. $P\{X = x\} = 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Верно ли, что $X + Y$ имеет непрерывное распределение?

Задача 5. (II–V; $\frac{16}{87}$) Пусть X — случайная величина с $EX^2 < \infty$. Найти $\inf EZX$ по всем неотрицательным случайным величинам Z с $EZ^2 \leq 1$.

Задача 6. (II–V; $\frac{34}{87}$) а) Из колоды в 52 карты извлекаются (без возвращения) карты до момента появления червового туза. Найти математическое ожидание этого момента (например, если червовый туз лежит на первом месте, то этот момент равен 1).

- б) Найти математическое ожидание момента появления первого туза.
 в) Найти математическое ожидание момента появления первой карты червовой масти.

Задача 7. (II-V; $\frac{14}{87}$) Пусть X — случайная величина, f и g — возрастающие ограниченные функции. Доказать, что случайные величины $f(X)$ и $g(X)$ положительно коррелированы.

Задача 8. (II-V; $\frac{11}{87}$) Пусть $\mathcal{A}$ — σ -алгебра на множестве натуральных чисел, $\mathbf{P}$ — вероятностная мера на $\mathcal{A}$. Верно ли, что $\mathbf{P}$ можно продолжить до вероятностной меры на σ -алгебре всех подмножеств натуральных чисел?

Задача 9. (II-V; $\frac{0}{87}$) Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные строго положительные случайные величины. Положим $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Верно ли, что $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n/S_n = 0$ п.н.?

Задача 10. (III-V; $\frac{1}{41}$) Пусть B — броуновское движение, выходящее из 0, $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ — непрерывная функция, $f(0) \neq 0$. Доказать, что $\mathbf{P}\{\min_{t \in [0, 1]} (B_t + f(t)) = 0\} = 0$.

Задача 11. (II-V; $\frac{0}{87}$) Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, причем $\mathbf{P}\{X_n \neq 0\} > 0$. Положим $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{S_n \in [a, b]\} = 0$ для любых a, b .

Победители среди студентов II курса

Первая премия

Бутковский Олег Александрович — студент II курса механико-математического факультета Московского государственного университета (6,75 решенных задач).

Калинин Максим Юрьевич — студент II курса механико-математического факультета Московского государственного университета (6,75 решенных задач).

Вторая премия

Пермяков Дмитрий Алексеевич — студент II курса механико-математического факультета Московского государственного университета (4,75 решенных задач).

Третья премия

Кузнецов Степан Львович — студент II курса механико-математического факультета Московского государственного университета (4 решенных задачи).

Мешин Юрий Сергеевич — студент II курса механико-математического факультета Московского государственного университета (4 решенных задачи).

Победители среди студентов III-V курсов

Первая премия

Дорошенко Вадим Валерьевич — студент V курса механико-математического факультета Киевского национального университета (7 решенных задач), научный руководитель — А. С. Олийник.

Раскин Михаил Александрович — студент III курса механико-математического факультета Московского государственного университета (7 решенных задач), научный руководитель — Н. К. Верещагин.

Третья премия

Каменов Андрей Александрович — студент II курса механико-математического факультета Московского государственного университета (4,25 решенных задач), научный руководитель — А. Н. Ширяев.

Клепиков Константин Викторович — студент V курса механико-математического факультета Московского государственного университета (4,25 решенных задач), научный руководитель — Ю. Н. Тюрин.

Халипов Петр Викторович — студент III курса механико-математического факультета Московского государственного университета (4,25 решенных задач), научный руководитель — Е. В. Булинская.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Информация о студенческой олимпиаде по теории вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 4, с. 823–824.
2. Информация о второй Колмогоровской студенческой олимпиаде по теории вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 2, с. 428–430.
3. Информация о третьей Колмогоровской студенческой олимпиаде по теории вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 2004, т. 49, в. 3, с. 621–623.
4. Информация о четвертой Колмогоровской студенческой олимпиаде по теории вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 2, с. 411–413.
5. Cherny A. S. The Kolmogorov students' competitions on probability theory. Препринт; <http://mech.math.msu.su/~cherny>.

18 апреля 2006 г.

Оргкомитет пятой
«Колмогоровской студенческой олимпиады
по теории вероятностей»:
член-корр. РАН, профессор А. Н. Ширяев
(председатель),
к.ф.-м.н. А. С. Мищенко,
к.ф.-м.н. А. В. Селиванов,
к.ф.-м.н. А. С. Черный,
к.ф.-м.н. А. П. Шашкин,
аспиранты А. Г. Агапов, С. В. Дильман,
И. Н. Медведев, Ф. А. Устинов.