Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Берджан, С. М. Пергаменщиков, Последовательные δ -оптимальные потребление и инвестирование для финансовых рынков со стохастической волатильностью при неизвестных параметрах, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2015, том 60, выпуск 4, 628–659

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp5029>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 11:31:45

© 2015 г. *БЕРДЖАН Б.**, *ПЕРГАМЕНЩИКОВ С. М.***

**ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ δ -ОПТИМАЛЬНЫЕ ПОТРЕБЛЕНИЕ И
ИНВЕСТИРОВАНИЕ ДЛЯ ФИНАНСОВЫХ РЫНКОВ СО
СТОХАСТИЧЕСКОЙ ВОЛАТИЛЬНОСТЬЮ ПРИ НЕИЗВЕСТНЫХ
ПАРАМЕТРАХ¹⁾**

Рассматривается задача оптимального потребления и инвестирования для финансового рынка Блэка–Шоулса со стохастической волатильностью и с неизвестным коэффициентом роста акций. Параметр волатильности управляется внешним экономическим фактором, который моделируется процессом Орнштейна–Уленбека с неизвестным параметром сноса. В первой части статьи мы методом динамического программирования находим оптимальную финансовую стратегию, которая зависит от неизвестных параметров рынка. Чтобы оценить коэффициент сноса, мы наблюдаем процесс, моделирующий внешний экономический фактор Y , на интервале $[0, T_0]$ для заданного $T_0 > 0$ и пользуемся методом последовательного оценивания. Во второй части статьи мы показываем, что целевая функция для такой стратегии находится в δ -окрестности ее оптимального значения, т.е. стратегия, построенная с помощью последовательного оценивания, является δ -оптимальной.

Ключевые слова и фразы: последовательный анализ, усеченная последовательная оценка, модель Блэка–Шоулса, стохастическая волатильность, оптимальные потребление и инвестирование, уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана.

1. Введение. В данной работе изучается задача оптимального потребления и инвестирования для финансового рынка Блэка–Шоулса со случайной волатильностью (см., например, [7]). Мы рассматриваем

*Département de mathématiques, Université du Québec à Montréal, Montréal, Québec, Canada; email: berdjane.b@yahoo.fr

**Laboratoire de mathématiques Raphael Salem, Université de Rouen, Saint-Étienne du Rouvray, France; Международная лаборатория количественных финансов, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия; e-mail: serge.pergamenchikov@univ-rouen.fr

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Международной лаборатории количественных финансов (грант Правительства РФ № 14.A12.31.0007) и Российского научного фонда (проект № 14-49-00079, Московский энергетический институт). Второй автор поддержан также Международной лабораторией статистики случайных процессов и количественного финансового анализа Национального исследовательского Томского государственного университета.

одну и ту же степенную функцию полезности для потребления и терминального капитала. Предполагается, что параметр волатильности зависит от некоторого экономического фактора, моделируемого процессом Орнштейна–Уленбека. Классический подход к этой проблеме восходит к работе Р. Мертон [22].

С использованием результатов теории стохастического управления явные решения были получены для финансовых рынков с неслучайными коэффициентами (см., например, [13], [15], [29], [26]). Далее задачи потребления и инвестирования обобщались во многих направлениях [27]. Одним из важных обобщений таких задач являются финансовые модели со стохастической волатильностью. Эмпирические исследования фондовых рынков показывают, что волатильность имеет случайный характер (см. [28] и [10]). Чисто инвестиционные проблемы для таких моделей рассматривались в работах [31] и [25], где с помощью динамического программирования было показано, что нелинейное уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана (HJB) может быть преобразовано в квазилинейное уравнение в частных производных. Аналогичный подход был использован в [16] для задачи оптимального потребления и инвестирования с учетом разорения в случае финансовых рынков с неслучайными коэффициентами. В [5] с использованием гирсановской замены меры изучалась задача оптимального потребления (без инвестирования) для финансовых рынков со стохастической волатильностью. В работах [2] и [9] использовались дуальные методы. Как правило, теорема существования и единственности для уравнения HJB доказывается с помощью классических методов линейных уравнений в частных производных (см., например, [6, гл. VI.6 и приложение E]). В настоящей статье мы используем подход, предложенный в [4] и развитый в [1]. Разница заключается в том, что в [4] экономический фактор моделируется чисто скачкообразным процессом. Уравнение HJB в этом случае является интегро-дифференциальным уравнением первого порядка. В нашем же случае мы имеем существенно нелинейное уравнение в частных производных второго порядка. В работе [1] эта задача рассматривалась с известными параметрами модели рынка и в предположении, что внешний экономический фактор моделируется диффузионным процессом с ограниченными коэффициентами. Последнее условие исключает из рассмотрения процесс Орнштейна–Уленбека, используемый во многих практически важных моделях со случайной волатильностью. В данной работе, так же как в [4] и [1], уравнение HJB изучается с помощью формулы Фейнмана–Каца. Мы вводим специальное метрическое пространство, в котором оператор Фейнмана–Каца является сжимающим. Принимая это во внимание, мы доказываем теорему о неподвижной точке для этого оператора и устанавливаем, что неподвижная точка является решением уравнения HJB в нашем случае.

Во второй части статьи мы рассматриваем ситуацию, когда и коэффициент роста в уравнении для акций, и коэффициент сноса в уравнении для экономического фактора являются неизвестными. Чтобы оценить параметр сноса в процессе Орнштейна–Уленбека, мы используем методы последовательного анализа, предложенные в [23] и [19]. Параметр сноса будет оцениваться на основе наблюдений процесса Y на интервале $[0, T_0]$. Следует отметить, что обычная оценка максимального правдоподобия в данном случае является нелинейной функцией от наблюдений и поэтому невозможно непосредственно оценить неасимптотическую верхнюю границу для ее точности. Чтобы преодолеть эту трудность, мы используем усеченную последовательную процедуру, предложенную в [14], которая позволяет получить неасимптотическую верхнюю границу для среднеквадратической точности оценивания. После этого мы пользуемся этой оценкой в оптимальной стратегии на интервале $[T_0, T]$. Для полученной стратегии мы устанавливаем, что математическое ожидание модуля отклонения целевой функции от ее максимального значения не превосходит некоторого известного фиксированного числа $\delta > 0$, т.е. стратегия, вычисленная посредством последовательной процедуры, является δ -оптимальной.

Статья организована следующим образом: в разделах 2 и 3 мы вводим модель рынка, ставим оптимизационную задачу и определяем соответствующее уравнение НЖВ. В разделе 4 вводятся необходимые определения. Решение задачи оптимального потребления и инвестирования дается в разделах 5–7. В разделе 8 мы рассматриваем задачу с неизвестным параметром сноса α в стохастическом уравнении для экономического фактора Y и используем усеченную последовательную процедуру $\hat{\alpha}$. Мы получаем явную верхнюю границу для отклонения $\mathbf{E}|\hat{\alpha} - \alpha|$ при любом фиксированном $T_0 > 0$. Более того, используя эту усеченную оценку в оптимальной стратегии потребления и инвестирования на интервале $[T_0, T]$, мы показываем, что эта стратегия является δ -оптимальной. Аналогичные результаты приведены в п. 8.3 для случая, когда кроме оценки $\hat{\alpha}$ мы рассматриваем оценку $\hat{\mu}$ неизвестного коэффициента роста в уравнении для акций. Численный пример приведен в разделе 9. Все вспомогательные результаты, необходимые для изучения свойств непрерывности по параметрам решения уравнения Беллмана (см. предложения 10.1 и 10.2), вынесены в приложение (раздел 10).

2. Модель рынка. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}_T, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbf{P})$ — стандартное фильтрованное вероятностное пространство с двумя заданными на нем независимыми винеровскими процессами $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ и $(U_t)_{0 \leq t \leq T}$, принимающими значения в $\mathbf{R}$. Наш финансовый рынок состоит из одного *нерискового актива* $S_0 = (S_0(t))_{0 \leq t \leq T}$ и *одной акции* $S = (S(t))_{0 \leq t \leq T}$,

которые определяются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} dS_0(t) &= r S_0(t) dt, \\ dS(t) &= S(t)\mu dt + S(t)\sigma(Y_t) dW_t, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $S_0(0) = 1$ и $S(0) = s > 0$. В данной модели $r \in \mathbf{R}_+$ — это *процентная ставка безрискового актива*, μ — *коэффициент роста* и $\sigma(y)$ — *волатильность*. Волатильность σ является ограниченной функцией из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}_+$ и удовлетворяет соотношению

$$\inf_{y \in \mathbf{R}} \sigma(y) = \sigma_1 > 0.$$

Мы предполагаем также, что $\sigma(\cdot)$ дифференцируема и имеет ограниченную производную. Более того, мы считаем, что стохастический фактор Y со значениями в $\mathbf{R}$ задается процессом Орнштейна–Уленбека, определяемым линейным стохастическим уравнением

$$dY_t = \alpha Y_t dt + \beta dU_t, \quad (2.2)$$

где начальное значение Y_0 — неслучайная константа, а $\alpha < 0$, $\beta > 0$ — некоторые фиксированные параметры. Пусть $(Y_s^{t,y})_{s \geq t}$ обозначает процесс Y , подчиняющийся условию $Y_t = y$, т.е.

$$Y_s^{t,y} = ye^{\alpha(s-t)} + \int_t^s \beta e^{\alpha(s-v)} dU_v.$$

В данной работе рассматривается оптимизационная задача на временном интервале $[T_0, T]$, где $0 \leq T_0 < T$ — фиксированные временные границы. Пусть X_t — капитал инвестора в момент времени $t \in [T_0, T]$. Обозначим через $\varphi_t \in \mathbf{R}$ долю капитала, вкладываемую в акции (S), при этом $1 - \varphi_t$ будет долей капитала, вкладываемой в нерисковый актив (S_0). Стратегия инвестора в момент времени $t \in [T_0, T]$ состоит, во-первых, в выборе доли φ_t и, во-вторых, в выборе интенсивности потребления ς_t ($\varsigma_t \geq 0$). Тогда в соответствии с моделью (2.1) эволюция капитала задается уравнением

$$dX_t = \mu \varphi_t X_t dt + \sigma(Y_t) \varphi_t X_t dW_t + r(1 - \varphi_t) X_t dt - \varsigma_t dt, \quad T_0 \leq t \leq T, \quad (2.3)$$

где $X_{T_0} = x > 0$ — начальный капитал. Заметим, что для модели (2.1) параметр риска — это функция из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$, определяемая формулой

$$\theta(y) = \frac{\mu - r}{\sigma(y)}. \quad (2.4)$$

Если в качестве стратегии вместо пары (φ_t, ς_t) рассмотреть (π_t, c_t) , где $\pi_t = \sigma(Y_t)\varphi_t$ и $c_t = \varsigma_t X_t$, то процесс капитала будет удовлетворять следующему стохастическому дифференциальному уравнению:

$$dX_t = X_t(r + \pi_t \theta(Y_t) - c_t) dt + X_t \pi_t dW_t, \quad X_{T_0} = x. \quad (2.5)$$

Опишем множество допустимых стратегий. Переменная управления (финансовая стратегия) $\vartheta = (\vartheta_t)_{T_0 \leq t \leq T} = ((\pi_t, c_t))_{T_0 \leq t \leq T}$ называется *допустимой*, если она $(\mathcal{F}_t)_{T_0 \leq t \leq T}$ -прогрессивно измерима, принимает значения в $\mathbf{R} \times [0, \infty)$ и для нее уравнение (2.5) имеет единственное сильное почти наверное положительное решение $(X_t^\vartheta)_{T_0 \leq t \leq T}$. Мы обозначим множество всех *допустимых стратегий* через $\mathcal{V}$.

В этой статье мы рассматриваем степенные функции полезности x^γ , $0 < \gamma < 1$, как для потребления, так и для терминального капитала. Цель заключается в максимизации усредненной интегральной полезности потребления на интервале $[T_0, T]$ при фиксированном T_0 и усредненной полезности для терминального капитала в последний момент T . Тогда для любых $x, y \in \mathbf{R}$ и $\vartheta \in \mathcal{V}$ целевая функция определяется формулой

$$J(T_0, x, y, \vartheta) := \mathbf{E}_{T_0, x, y} \left(\int_{T_0}^T c_t^\gamma (X_t^\vartheta)^\gamma dt + (X_T^\vartheta)^\gamma \right),$$

где $\mathbf{E}_{T_0, x, y}$ — условное математическое ожидание $\mathbf{E}(\cdot | X_{T_0} = x, Y_{T_0} = y)$. Наша задача — максимизировать эту функцию, т.е. найти

$$J(T_0, x, y, \vartheta^*) = \sup_{\vartheta \in \mathcal{V}} J(T_0, x, y, \vartheta). \quad (2.6)$$

В дальнейшем вместо $J(T_0, x, y, \vartheta^*)$ мы будем писать $J^*(T_0, x, y)$ или просто $J_{T_0}^*$.

В случае, когда параметры α и μ неизвестны, мы предполагаем, что $\alpha_2 \leq \alpha \leq \alpha_1$ и $|\mu| \leq \mu_*$, где $\alpha_2 < \alpha_1 < 0$ и $\mu_* > 0$ — известные фиксированные константы. Наша задача состоит в том, чтобы построить стратегии, приближающиеся в определенном смысле к оптимальным, а именно, мы будем искать δ -оптимальные стратегии в смысле следующего определения.

О п р е д е л е н и е 2.1. Стратегию $\tilde{\vartheta} \in \mathcal{V}$ будем называть δ -оптимальной, если

$$\sup_{\alpha_2 \leq \alpha \leq \alpha_1} \sup_{|\mu| \leq \mu_*} \mathbf{E} \left(J(T_0, x, Y_{T_0}, \tilde{\vartheta}) - J^*(T_0, x, Y_{T_0}) \right) \leq \delta.$$

З а м е ч а н и е 2.1. Отметим, что если параметры α и μ известны, то мы рассматриваем задачу (2.6) с $T_0 = 0$. Следует также отметить, что при известных параметрах эта задача решается в [1], но в качестве экономического фактора Y там рассматривается общий процесс диффузии с ограниченными коэффициентами. В данной работе мы предполагаем, что Y является процессом Орнштейна–Уленбека, т.е. снос неограничен и мы, к сожалению, не можем пользоваться результатами работы [1].

3. Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана (НJB). Сейчас мы введем уравнение НJB для задачи (2.6). С этой целью для дважды дифференцируемой функции $f: [0, T] \times \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ обозначим через $Df(t, x, y)$ и $D^2f(t, x, y)$ следующие векторы частных производных:

$$Df(t, x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(t, x, y), \frac{\partial}{\partial y} f(t, x, y) \right)',$$

$$D^2f(t, x, y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t, x, y), \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(t, x, y) \right)'$$

(здесь штрих обозначает транспонирование). Пусть $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbf{R}^2$, $\mathbf{M} = (M_1, M_2) \in \mathbf{R}^2$ и $\nu = (\nu_1, \nu_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ — некоторые фиксированные параметры. Для этих параметров положим

$$H_0(x, y, \mathbf{q}, \mathbf{M}, \nu) := (r + \nu_1 \theta(y) - \nu_2) x q_1 + \alpha y q_2 + \frac{1}{2} M_1 \nu_1^2 x^2 + \frac{\beta^2}{2} M_2 + (\nu_2 x)^\gamma.$$

Уравнение НJB в этом случае имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} z(t, x, y) + \sup_{\nu \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+} H_0(x, y, Dz(t, x, y), D^2z(t, x, y), \nu) = 0, \quad (3.1)$$

$$z(T, x, y) = x^\gamma.$$

Отметим, что в этом случае для $x > 0$, $q_1 > 0$ и $M_1 < 0$

$$\sup_{\nu \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+} H_0(x, y, \mathbf{q}, \mathbf{M}, \nu) = x r q_1 + \alpha y q_2 + \frac{1}{q_*} \left(\frac{\gamma}{q_1} \right)^{q_*-1} + \frac{|\theta(y) q_1|^2}{2|M_1|} + \frac{\beta^2}{2} M_2,$$

где $q_* = (1 - \gamma)^{-1}$. Для изучения этого уравнения мы представляем $z(t, x, y)$ в виде

$$z(t, x, y) = x^\gamma h(t, y). \quad (3.2)$$

Легко вывести, что функция h удовлетворяет квазилинейному уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial}{\partial t} h(t, y) + Q(y) h(t, y) + \alpha y \frac{\partial}{\partial y} h(t, y) + \frac{\beta^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} h(t, y) + \frac{1}{q_*} \left(\frac{1}{h(t, y)} \right)^{q_*-1} = 0, \quad (3.3)$$

$$h(T, y) = 1,$$

где

$$Q(y) = \gamma \left(r + \frac{\theta^2(y)}{2(1 - \gamma)} \right). \quad (3.4)$$

Отметим, что условия на $\sigma(y)$ гарантируют, что функция $Q(y)$ ограничена, дифференцируема и имеет ограниченную производную. Следовательно, мы можем определить

$$Q_* = \sup_{y \in \mathbf{R}} Q(y) \quad \text{и} \quad Q_1^* = \sup_{y \in \mathbf{R}} \left| \frac{dQ(y)}{dy} \right|. \quad (3.5)$$

Наша задача заключается в изучении уравнения (3.3). Используя вероятностное представление для линейных уравнений в частных производных (формула Фейнмана–Каца), мы покажем (см. предложение 5.4), что решение этого уравнения является неподвижной точкой для специального оператора интегрального типа, который будет определен в следующем разделе.

4. Необходимые определения. Чтобы изучить уравнение (3.3), прежде всего введем специальное функциональное пространство. Пусть $\mathcal{X}$ — множество равномерно непрерывных функций на $\mathcal{K} := [T_0, T] \times \mathbf{R}$ со значениями в $[1, \infty)$ таких, что

$$\|f\|_\infty = \sup_{(t,y) \in \mathcal{K}} |f(t,y)| \leq \mathbf{r}^*, \quad (4.1)$$

где $\mathbf{r}^* = (\tilde{T} + 1)e^{Q_*\tilde{T}}$ и $\tilde{T} = T - T_0$. Определим метрику $\varrho_*(\cdot, \cdot)$ в $\mathcal{X}$ следующим образом: для любых $f, g \in \mathcal{X}$ положим

$$\varrho_*(f, g) = \|f - g\|_* = \sup_{(t,y) \in \mathcal{K}} e^{-\varkappa(T-t)} |f(t,y) - g(t,y)|. \quad (4.2)$$

Здесь $\varkappa = Q_* + \zeta + 1$ и ζ — некоторый положительный параметр, значение которого будет уточнено позже. Определим процесс η формулой

$$d\eta_s = \alpha \eta_s ds + \beta d\tilde{\mathbf{U}}_s, \quad \eta_0 = Y_0, \quad (4.3)$$

где $(\tilde{\mathbf{U}}_t)_{t \geq 0}$ — стандартное броуновское движение, независимое от $(\mathbf{U}_t)_{t \geq 0}$. Таким образом, $(\eta_t)_{t \geq 0}$ имеет такое же распределение, как $(Y_t)_{t \geq 0}$. Определим отображение Фейнмана–Каца $\mathcal{L}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ равенством

$$\mathcal{L}_f(t, y) = \mathbf{E} \mathcal{G}(t, T, y) + \frac{1}{q_*} \int_t^T \mathcal{H}_f(t, s, y) ds, \quad (4.4)$$

где $\mathcal{G}(t, s, y) = \exp\{\int_t^s Q(\eta_u^{t,y}) du\}$,

$$\mathcal{H}_f(t, s, y) = \mathbf{E} \left[(f(s, \eta_s^{t,y}))^{1-q_*} \mathcal{G}(t, s, y) \right] \quad (4.5)$$

и $(\eta_s^{t,y})_{t \leq s \leq T}$ — процесс η с условием $\eta_t = y$. Чтобы решить уравнение НЖВ, нам нужно найти неподвижную точку отображения $\mathcal{L}$ в $\mathcal{X}$, т.е. функцию h такую, что

$$h = \mathcal{L}_h. \quad (4.6)$$

Для этого мы строим следующую итеративную схему. Мы определяем последовательность $h_0 \equiv 1$,

$$h_n(t, y) = \mathcal{L}_{h_{n-1}}(t, y), \quad n \geq 1, \quad (4.7)$$

и изучаем сходимость этой последовательности в $\mathcal{K}$. На самом деле мы будем использовать существование неподвижной точки для сжимающего оператора в полном метрическом пространстве.

5. Решение уравнения НЖВ. В этом разделе мы приводим результат о существовании и единственности решения уравнения (3.3). Для этого мы сначала изучим некоторые свойства оператора Фейнмана–Каца $\mathcal{L}$.

Предложение 5.1. *Оператор $\mathcal{L}$ «устойчив» в $\mathcal{X}$, т.е.*

$$\mathcal{L}_f \in \mathcal{X} \quad \forall f \in \mathcal{X}.$$

Доказательство. Очевидно, что $\mathcal{L}_f \geq 1$ для любых $f \in \mathcal{X}$. Более того, полагая

$$\tilde{f}_s = f(s, \eta_s^{t,y}), \quad (5.1)$$

мы представим $\mathcal{L}_f(t, y)$ в виде

$$\mathcal{L}_f(t, y) = \mathbf{E} \mathcal{G}(t, T, y) + \frac{1}{q_*} \int_t^T \mathbf{E} \left[(\tilde{f}_s)^{1-q_*} \mathcal{G}(t, s, y) \right] ds. \quad (5.2)$$

Следовательно, принимая во внимание, что $\tilde{f}_s \geq 1$ и $q_* \geq 1$, мы получаем

$$\mathcal{L}_f(t, y) \leq e^{Q_*(T-t)} + \int_t^T \frac{1}{q_*} e^{Q_*(s-t)} ds \leq \mathbf{r}^*, \quad (5.3)$$

где верхняя грань $\mathbf{r}^*$ определена в (4.1). Теперь мы должны показать, что $\mathcal{L}_f$ — равномерно непрерывная функция на $\mathcal{K}$ для любых $f \in \mathcal{X}$. Для любых $f \in \mathcal{X} \cap C^{1,1}(\mathcal{K})$ рассмотрим уравнение (3.3), т.е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(t, y) + Q(y)u(t, y) + \alpha y \frac{\partial}{\partial y} u(t, y) \\ + \frac{\beta^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(t, y) + \frac{1}{q_*} \left(\frac{1}{f(t, y)} \right)^{q_*-1} = 0, \\ u(T, y) = 1. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Полагая здесь $\tilde{u}(t, y) = u(T_0 + T - t, y)$, мы получаем равномерно параболическое уравнение для $\tilde{u}$ с начальным условием $\tilde{u}(T_0, y) = 1$. Более того, мы знаем, что у Q производная ограничена. Мы заключаем, что

для любой $f \in \mathcal{X} \cap C^{1,1}(\mathcal{K})$ теорема 5.1 из [17] с $0 < l < 1$ гарантирует существование единственного решения уравнения (5.4), принадлежащего $C^{1,2}(\mathcal{K})$. Применяя формулу Ито к процессу

$$\left(u(s, \eta_s^{t,y}) \exp \left\{ \int_t^s Q(\eta_v^{t,y}) dv \right\} \right)_{t \leq s \leq T}$$

и принимая во внимание уравнение (5.4), мы получаем

$$u(t, y) = \mathcal{L}_f(t, y). \quad (5.5)$$

Следовательно, $\mathcal{L}_f(t, y) \in C^{1,2}(\mathcal{K})$, т.е. $\mathcal{L}_f \in \mathcal{X}$ для всех $f \in \mathcal{X} \cap C^{1,1}(\mathcal{K})$. Кроме того, для любой $f \in \mathcal{X}$ существует последовательность $(f_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{X} \cap C^{1,1}(\mathcal{K})$ такая, что

$$\sup_{(t,y) \in \mathcal{K}} |f_n(t, y) - f(t, y)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что

$$\sup_{(t,y) \in \mathcal{K}} |\mathcal{L}_{f_n}(t, y) - \mathcal{L}_f(t, y)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, $\mathcal{L}_f(t, y)$ равномерно непрерывна на $\mathcal{K}$, т.е. $\mathcal{L}_f \in \mathcal{X}$. Предложение 5.1 доказано.

Предложение 5.2. *Отображение $\mathcal{L}$ является сжимающим в метрическом пространстве $(\mathcal{X}, \varrho_*)$, т.е. для любых $f, g \in \mathcal{X}$*

$$\varrho_*(\mathcal{L}_f, \mathcal{L}_g) \leq \lambda \varrho_*(f, g), \quad (5.6)$$

где $\lambda = 1/(\zeta + 1)$ и $\zeta > 0$.

На самом деле, как будет показано в следствии 6.1, при соответствующем выборе ζ неравенство (5.6) дает супергеометрическую скорость сходимости последовательности $(h_n)_{n \geq 1}$, определенной в (4.7), к предельной функции $h(t, y)$, которая является неподвижной точкой оператора $\mathcal{L}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что для любых $a > b \geq 1$ и $q > 0$

$$b^{-q} - a^{-q} \leq q(b - a).$$

Используя эту оценку, можно получить, что для любых $f, g \in \mathcal{X}$ и любого $y \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_f(t, y) - \mathcal{L}_g(t, y)| &\leq \frac{1}{q_*} \mathbf{E} \int_t^T \mathcal{G}(t, s, y) \left| (\tilde{f}_s)^{1-q_*} - (\tilde{g}_s)^{1-q_*} \right| ds \\ &\leq \gamma \mathbf{E} \int_t^T \mathcal{G}(t, s, y) |\tilde{f}_s - \tilde{g}_s| ds. \end{aligned}$$

Напомним, что $\tilde{f}_s = f(s, \eta_s^{t,y})$ и $\tilde{g}_s = g(s, \eta_s^{t,y})$. Учитывая, что $\mathcal{G}(t, s, y) \leq e^{Q_*(s-t)}$, мы получаем

$$|\mathcal{L}_f(t, y) - \mathcal{L}_g(t, y)| \leq \int_t^T e^{Q_*(s-t)} \mathbf{E} |\tilde{f}_s - \tilde{g}_s| ds.$$

Принимая во внимание последнее неравенство, приходим к оценке

$$|\tilde{f}_s - \tilde{g}_s| \leq e^{\varkappa(T-s)} \varrho_*(f, g) \quad \text{п.н.} \quad (5.7)$$

Следовательно, для всех (t, y) из $\mathcal{K}$

$$\left| e^{-\varkappa(T-t)} (\mathcal{L}_f(t, y) - \mathcal{L}_g(t, y)) \right| \leq \frac{1}{\varkappa - Q_*} \varrho_*(f, g). \quad (5.8)$$

Используя определение $\varkappa$ (см. (4.2)), мы получим неравенство (5.6). Предложение 5.2 доказано.

Предложение 5.3. Уравнение $\mathcal{L}_h = h$ имеет единственное решение в $\mathcal{K}$.

Доказательство. Используя то, что оператор $\mathcal{L}$ является сжимающим в $\mathcal{K}$, а также определение (4.7) последовательности $(h_n)_{n \geq 1}$, мы получаем, что для любого $n \geq 1$

$$\varrho_*(h_n, h_{n-1}) \leq \lambda^{n-1} \varrho_*(h_1, h_0), \quad (5.9)$$

т.е. последовательность $(h_n)_{n \geq 1}$ является фундаментальной в $(\mathcal{K}, \varrho_*)$. Метрическое пространство $(\mathcal{K}, \varrho_*)$ является полным, так как оно входит в банахово пространство $C^{0,0}(\mathcal{K})$ и норма $\|\cdot\|_\infty$ эквивалентна норме $\|\cdot\|_*$, определенной в (4.2). Таким образом, последовательность $(h_n)_{n \geq 1}$ имеет предел в $\mathcal{K}$, т.е. существует функция h из $\mathcal{K}$, для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_*(h, h_n) = 0.$$

Более того, принимая во внимание равенство $h_n = \mathcal{L}_{h_{n-1}}$, мы получаем, что для любых $n \geq 1$

$$\varrho_*(h, \mathcal{L}_h) \leq \varrho_*(h, h_n) + \varrho_*(\mathcal{L}_{h_{n-1}}, \mathcal{L}_h) \leq \varrho_*(h, h_n) + \lambda \varrho_*(h, h_{n-1}).$$

Последнее выражение стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, $\varrho_*(h, \mathcal{L}_h) = 0$, т.е. $h = \mathcal{L}_h$. Из предложения 5.2 сразу получаем, что решение единственно. Предложение 5.3 доказано.

Мы готовы изложить результат о решении уравнения НЖВ.

Предложение 5.4. Уравнение (3.3) имеет единственное решение h , которое является неподвижной точкой оператора $\mathcal{L}$: $\mathcal{L}_h = h$.

Доказательство. Заметим, что в силу леммы 10.5 функция $\mathcal{L}_h(t, y)$ является $1/2$ -гёльдеровской по t на $\{|y| < n\}$ для любых $n \geq 1$. Следовательно, выбирая в уравнении (5.4) в качестве f функцию $f_n(t, y) = u(t, \tilde{y}_n)$ (где $\tilde{y}_n$ — проекция y в $[-n, n]$), мы получаем по теореме 5.1 из [17] и лемме 10.5, что это уравнение имеет единственное решение $u_n(t, y)$. Понятно, что функция

$$u(t, y) = \sum_{n \geq 1} u_n(t, y) \mathbf{1}_{\{n-1 < |y| \leq n\}}$$

является решением уравнения (5.4) для $f = u(t, y)$. Принимая во внимание представление (5.5) и уравнение $\mathcal{L}_h = h$, мы получаем, что решением уравнения (5.4) является функция

$$u = \mathcal{L}_h = h.$$

Следовательно, h удовлетворяет уравнению (3.3). Кроме того, это решение единственно, так как h является единственным решением проблемы о неподвижной точке. Предложение 5.4 доказано.

З а м е ч а н и е 5.1. В [21] можно найти доказательство существования и единственности для более общего квазилинейного уравнения, но это доказательство не дает способа расчета решения, в то время как в нашем случае решение — это неподвижная точка оператора Фейнмана–Каца. Кроме того, наш метод позволяет получить супергеометрическую скорость сходимости для последовательности функций, аппроксимирующей решение. Это является очень важным свойством на практике. В работе [3] теорема существования и единственности доказывается с помощью соответствующей локальной теоремы. Следует также отметить, что метод применения сжимающих отображений или теоремы о неподвижной точке для изучения нелинейных уравнений в частных производных уже встречался ранее в других постановках (см., например, [8] и [24]). Термин «обобщенное решение» используется для квазилинейных/полулинейных уравнений в частных производных, и решение представляется как неподвижная точка для оператора Фейнмана–Каца.

6. Супергеометрическая скорость сходимости. Для последовательности $(h_n)_{n \geq 1}$, определенной в (4.7), и решения уравнения $\mathcal{L}_h = h$ мы изучим отклонение

$$\Delta_n(t, y) = h(t, y) - h_n(t, y).$$

В следующей теореме мы выводим верхнюю границу для модуля этой разности, что позволит выбрать ζ для параметра сжатия λ так, чтобы получить супергеометрическую скорость сходимости для последовательности $(h_n)_{n \geq 1}$.

Теорема 6.1. Уравнение $\mathcal{L}_h = h$ имеет единственное решение h в $\mathcal{X}$ такое, что для всех $n \geq 1$ и $\zeta > 0$

$$\sup_{(t,y) \in \mathcal{X}} |\Delta_n(t,y)| \leq \mathbf{B}^* \lambda^n, \quad (6.1)$$

где $\mathbf{B}^* = e^{\kappa \tilde{T}} (1 + \mathbf{r}^*) / (1 - \lambda)$, $\tilde{T} = T - T_0$ и константа κ введена в (4.2).

Доказательство. Единственность установлена в предложении 5.3. Далее, из (5.9) легко видеть, что для любого $n \geq 1$

$$\varrho_*(h, h_n) \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} \varrho_*(h_1, h_0).$$

В силу предложения 5.1 все функции h_n принадлежат $\mathcal{X}$, и, значит, по определению пространства $\mathcal{X}$

$$\varrho_*(h_1, h_0) \leq \sup_{(t,y) \in \mathcal{X}} |h_1(t,y) - 1| \leq 1 + \mathbf{r}^*.$$

Учитывая, что $\sup_{(t,y) \in \mathcal{X}} |\Delta_n(t,y)| \leq e^{\kappa \tilde{T}} \varrho_*(h, h_n)$, мы получаем неравенство (6.1). Теорема 6.1 доказана.

Теперь мы можем минимизировать верхнюю границу (6.1) по $\zeta > 0$. Действительно,

$$\mathbf{B}^* \lambda^n = \mathbf{C}^* \exp\{\mathbf{g}_n(\zeta)\},$$

где $\mathbf{C}^* = (1 + \mathbf{r}^*) e^{(Q^*+1)\tilde{T}}$ и функция $\mathbf{g}_n$ имеет вид

$$\mathbf{g}_n(x) = x\tilde{T} - \ln x - (n-1) \ln(1+x).$$

Минимизируем эту функцию по $x > 0$:

$$\min_{x>0} \mathbf{g}_n(x) = x_n^* \tilde{T} - \ln x_n^* - (n-1) \ln(1+x_n^*),$$

где

$$x_n^* = \frac{\sqrt{(\tilde{T} - n)^2 + 4\tilde{T}} + n - \tilde{T}}{2\tilde{T}}.$$

Следовательно, при $\zeta = \zeta_n^* = x_n^*$ мы получаем оптимальную границу (6.1).

Следствие 6.1. Уравнение $\mathcal{L}_h = h$ имеет единственное решение h в $\mathcal{X}$ такое, что для всех $n \geq 1$

$$\sup_{(t,y) \in \mathcal{X}} |\Delta_n(t,y)| \leq \mathbf{U}_n^*, \quad (6.2)$$

где $\mathbf{U}_n^* = \mathbf{C}^* \exp\{\mathbf{g}_n^*\}$. Более того, для любого $0 < \delta < 1$

$$\mathbf{U}_n^* = O(n^{-\delta n}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Это означает, что скорость сходимости быстрее любой геометрической, т.е. является супергеометрической.

7. Известные параметры. Сейчас мы рассмотрим нашу задачу оптимального потребления и инвестирования в случае рынков с известными параметрами. Следующая теорема является аналогом теоремы 3.4 в [1]. Основное различие заключается в том, что коэффициент сноса у процесса Y в [1] должен быть ограниченным, что не позволяет использовать процесс Орнштейна–Уленбека.

Теорема 7.1. *Оптимальное значение $J(T_0, x, y, \vartheta)$ для оптимизационной проблемы (2.6) дается формулой*

$$J_{T_0}^* = J(T_0, x, y, \vartheta^*) = \sup_{\vartheta \in \mathcal{V}} J(T_0, x, y, \vartheta) = x^\gamma h(T_0, y),$$

где $h(t, y)$ — единственное решение уравнения (3.3). Кроме того, для всех $T_0 \leq t \leq T$ оптимальная финансовая стратегия $\vartheta^* = (\pi^*, c^*)$ имеет вид

$$\pi_t^* = \pi^*(Y_t) = \frac{\theta(Y_t)}{1 - \gamma}, \quad c_t^* = c^*(t, Y_t) = (h(t, Y_t))^{-q^*}. \quad (7.1)$$

Оптимальный процесс капитала $(X_t^*)_{T_0 \leq t \leq T}$ удовлетворяет следующему стохастическому дифференциальному уравнению:

$$dX_t^* = \mathbf{a}^*(t, Y_t) X_t^* dt + X_t^* \mathbf{b}^*(Y_t) dW_t, \quad X_{T_0}^* = x, \quad (7.2)$$

где

$$\mathbf{a}^*(t, y) = \frac{|\theta(y)|^2}{1 - \gamma} + r - (h(t, y))^{-q^*}, \quad \mathbf{b}^*(y) = \frac{\theta(y)}{1 - \gamma}. \quad (7.3)$$

Решение X_t^* может быть записано в виде

$$X_s^* = X_t^* \exp \left\{ \int_t^s \mathbf{a}^*(v, Y_v) dv \right\} \mathcal{E}_{t,s}, \quad (7.4)$$

где $\mathcal{E}_{t,s} = \exp \{ \int_t^s \mathbf{b}^*(Y_v) dW_v - (1/2) \int_t^s |\mathbf{b}^*(Y_v)|^2 dv \}$.

Доказательство теоремы такое же, как доказательство теоремы 3.4 в [1], и поэтому опускается. Подчеркнем только, что теорема доказывается с помощью проверочной теоремы (теорема 6.2 в [1]) для задачи (2.6), из которой, в частности, вытекает, что решение уравнения (3.1) является единственным в соответствующем функциональном классе.

8. Неизвестные параметры. В этом разделе мы рассмотрим рынок Блэка–Шоулса с неизвестным параметром α (случай известного параметра μ изучается в п. 8.2, случай, когда μ не известен, — в п. 8.3). Мы наблюдаем процесс Y в интервале $[0, T_0]$ (в этом случае $T_0 > 0$) и используем последовательные методы для оценки сноса. После этого мы решаем задачу оптимального потребления и инвестирования на конечном интервале $[T_0, T]$ и изучаем поведение оптимального значения целевой функции $J^*(T_0, x, y)$. Определим $\hat{J}_{T_0}^*$ как оценку для $J_{T_0}^*$:

$$\hat{J}_{T_0}^* := \mathbf{E}_{T_0} \left(\int_{T_0}^T (\hat{c}_t^*)^\gamma (\hat{X}_t^*)^\gamma dt + (\hat{X}_T^*)^\gamma \right), \quad (8.1)$$

где $\mathbf{E}_{T_0}$ — условное математическое ожидание $\mathbf{E}(\cdot | \mathcal{F}_{T_0})$ и для упрощения обозначений мы пишем $\hat{X}_t^*$ вместо $X_t^{\hat{\vartheta}^*}$. Из (7.4) получаем

$$\hat{X}_s^* = \hat{X}_t^* \exp \left\{ \int_t^s \hat{\mathbf{a}}^*(v, Y_v) dv \right\} \hat{\mathcal{E}}_{t,s}^*, \quad (8.2)$$

где $\hat{\mathcal{E}}_{t,s}^* = \exp \{ \int_t^s \hat{\mathbf{b}}^*(Y_v) dW_v - (1/2) \int_t^s |\hat{\mathbf{b}}^*(Y_v)|^2 dv \}$. Функции $\hat{\mathbf{a}}^*(t, y)$ и $\hat{\mathbf{b}}^*(t, y)$ определяются формулами

$$\hat{\mathbf{a}}^*(t, y) = \frac{|\hat{\theta}(y)|^2}{1 - \gamma} + r - (\hat{h}(t, y))^{-q^*}, \quad \hat{\mathbf{b}}^*(y) = \frac{\hat{\theta}(y)}{1 - \gamma}, \quad \hat{\theta}(y) = \frac{\hat{\mu} - r}{\sigma(y)}. \quad (8.3)$$

Оцениваемый процесс потребления — это $\hat{c}_t^* = \hat{c}^*(t, Y_t) = (\hat{h}(t, Y_t))^{-q^*}$, где $\hat{h}(t, y)$ — единственное решение уравнения $\hat{\mathcal{L}}_h = h$. Оператор $\hat{\mathcal{L}}$ определен следующим образом:

$$\hat{\mathcal{L}}_f(t, y) = \mathbf{E} \hat{\mathcal{G}}(t, T, y) + \frac{1}{q_*} \int_t^T \mathbf{E} \left([f(s, \hat{\eta}_s^{t,y})]^{1-q_*} \hat{\mathcal{G}}(t, s, y) \right) ds, \quad (8.4)$$

где $\hat{\mathcal{G}}(t, s, y) = \exp \{ \int_t^s \hat{Q}(\hat{\eta}_u^{t,y}) du \}$ и

$$d\hat{\eta}_s^{t,y} = \hat{\alpha} \hat{\eta}_s^{t,y} ds + \beta d\tilde{U}_s, \quad \hat{\eta}_t^{t,y} = y. \quad (8.5)$$

Здесь $\hat{\alpha}$ и $\hat{\mu}$ — некоторые оценки для α и μ , которые будут определены позже.

8.1. Последовательная процедура. Как уже отмечалось выше, в случае неизвестного параметра α мы предполагаем, что он принимает значения в некотором ограниченном интервале $[\alpha_2, \alpha_1]$, где $\alpha_2 \leq \alpha \leq \alpha_1 < 0$. Оценку $\hat{\alpha}$ мы определим как проекцию на интервал $[\alpha_2, \alpha_1]$ последовательной оценки α^* , т.е.

$$\hat{\alpha} = \text{Proj}_{[\alpha_2, \alpha_1]} \alpha^*, \quad \alpha^* = \frac{\int_0^{\tau_H} Y_t dY_t}{H} \mathbf{1}_{\{\tau_H \leq T_0\}}, \quad (8.6)$$

где $\tau_H = \inf \{ t \geq 0: \int_0^t Y_s^2 ds \geq H \}$ и для любого $x \in \mathbf{R}$

$$\text{Proj}_{[\alpha_2, \alpha_1]}(x) = \alpha_2 \mathbf{1}_{\{x \leq \alpha_2\}} + x \mathbf{1}_{\{\alpha_2 \leq x \leq \alpha_1\}} + \alpha_1 \mathbf{1}_{\{x \geq \alpha_1\}}.$$

Далее, определим функцию $\epsilon(\cdot)$, которая будет использоваться позже при доказательстве δ -оптимальности:

$$\epsilon(T_0) = \sqrt{\frac{\beta^2}{\beta_2(T_0 - T_0^{5/6})} + \frac{\alpha_2^2}{\beta^{12}} \left(\frac{\mathbf{k}(3)}{T_0^2} \right)}, \quad (8.7)$$

где $\beta_2 = \beta^2 / (2|\alpha_2|)$, $\mathbf{k}(m) = 3^{2m-1} (Y_0^{2m} + [1 + (m(2m-1))^m (2\beta)^{2m}] \mathbf{k}_1(m))$,

$$\mathbf{k}_1(m) = 2^{2m-1} (Y_0^{2m} + (2m-1)!! \beta_1^m) \quad \text{и} \quad \beta_1 = \frac{\beta^2}{2|\alpha_1|}.$$

Следующее предложение дает верхнюю границу для математического ожидания $\mathbf{E} |\bar{\alpha}|$ отклонения $\bar{\alpha} = \hat{\alpha} - \alpha$.

Предложение 8.1. Для любых $0 < T_0 < T$ последовательная процедура (8.6) удовлетворяет следующему неравенству:

$$\sup_{\alpha_2 \leq \alpha \leq \alpha_1} \mathbf{E} |\bar{\alpha}| \leq \epsilon(T_0).$$

Доказательство. Заметим, что $\mathbf{E} |\bar{\alpha}| \leq \mathbf{E} |\alpha^* - \alpha|$, поэтому достаточно доказать неравенство $\sup_{\alpha_2 \leq \alpha \leq \alpha_1} \mathbf{E} |\alpha^* - \alpha| \leq \epsilon(T_0)$. Кроме того, мы знаем из [19, гл. 17], что оценка максимального правдоподобия для α равна

$$\frac{\int_0^{T_0} Y_t dY_t}{\int_0^{T_0} Y_t^2 dt}.$$

В качестве оценки параметра α мы используем последовательную оценку максимального правдоподобия, предложенную в [19] и [23]:

$$\tilde{\alpha} = \frac{\int_0^{\tau_H} Y_t dY_t}{\int_0^{\tau_H} Y_t^2 dt} = \alpha + \beta \frac{\int_0^{\tau_H} Y_t dU_t}{H}.$$

Учитывая, что $\int_0^\infty Y_t^2 dt = +\infty$ п.н., получаем, что $\tilde{\alpha} \sim \mathcal{N}(\alpha, \beta^2/H)$ и, следовательно,

$$\mathbf{E} |\tilde{\alpha} - \alpha|^2 = \frac{\beta^2}{H}.$$

Проблема с использованием этой оценки состоит в том, что τ_H может быть больше, чем T_0 . Чтобы преодолеть эту трудность, мы используем усеченную модификацию последовательной процедуры $\hat{\alpha}$ из [14], т.е. $\alpha^* = \tilde{\alpha} \mathbf{1}_{\{\tau_H \leq T_0\}}$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \alpha^* - \alpha &= (\alpha^* - \alpha) \mathbf{1}_{\{\tau_H \leq T_0\}} + (\alpha^* - \alpha) \mathbf{1}_{\{\tau_H > T_0\}} \\ &= \beta \frac{\int_0^{\tau_H} Y_t dU_t}{H} \mathbf{1}_{\{\tau_H \leq T_0\}} - \alpha \mathbf{1}_{\{\tau_H > T_0\}}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\alpha^* - \alpha)^2 &= \frac{\beta^2}{H^2} \mathbf{E} \left(\int_0^{\tau_H} Y_t dU_t \mathbf{1}_{\{\tau_H \leq T_0\}} \right)^2 + \alpha^2 \mathbf{P}(\tau_H > T_0) \\ &\leq \frac{\beta^2}{H^2} \mathbf{E} \left(\int_0^{\tau_H} Y_t dU_t \right)^2 + \alpha^2 \mathbf{P}(\tau_H > T_0) \\ &\leq \frac{\beta^2}{H} + \alpha^2 \mathbf{P} \left(\int_0^{T_0} Y_t^2 dt < H \right). \end{aligned} \quad (8.8)$$

Кроме того, по формуле Ито

$$dY_t^2 = 2Y_t dY_t + \beta^2 dt = (2\alpha Y_t^2 + \beta^2) dt + 2\beta Y_t dU_t.$$

Отсюда следует равенство

$$\int_0^{T_0} (2\alpha Y_t^2 + \beta^2) dt = Y_{T_0}^2 - Y_0^2 - 2\beta \int_0^{T_0} Y_t dU_t.$$

Учитывая, что $\alpha_2 \leq \alpha \leq \alpha_1 < 0$, и используя неравенство Маркова, мы получаем для любого целого $m > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\int_0^{T_0} Y_t^2 dt < H\right) &= \mathbf{P}\left(\int_0^{T_0} (2\alpha Y_t^2 + \beta^2) dt > 2\alpha H + \beta^2 T_0\right) \\ &= \mathbf{P}\left(Y_{T_0}^2 - Y_0^2 - 2\beta \int_0^{T_0} Y_t d\mathbf{U}_t > 2\alpha H + \beta^2 T_0\right) \\ &\leq \frac{\mathbf{E}(Y_{T_0}^2 - Y_0^2 - 2\beta \int_0^{T_0} Y_t d\mathbf{U}_t)^{2m}}{(2\alpha_2 H + \beta^2 T_0)^{2m}}. \end{aligned}$$

Здесь $2\alpha H + \beta^2 T_0 > 0$, т.е. $0 < H < \beta_2 T_0$. Для стохастического интеграла $\xi_t = \int_0^t \beta e^{\alpha(t-v)} d\mathbf{U}_v$ мы получаем при любом $m \in \mathbf{N}_*$ оценку

$$\mathbf{E} \xi_t^{2m} = (2m-1)!! [\mathbf{E} \xi_t^2]^m \leq (2m-1)!! \beta_1^m.$$

Более того, так как $Y_{T_0} = Y_0 e^{\alpha T_0} + \xi_{T_0}$, то

$$\mathbf{E} Y_{T_0}^{2m} \leq 2^{2m-1} (\mathbf{E}(Y_0 e^{\alpha T_0})^{2m} + \mathbf{E} \xi_{T_0}^{2m}) \leq \mathbf{k}_1(m).$$

Кроме того (см., например, [18, лемма 4.12]),

$$\mathbf{E}\left(\int_0^{T_0} Y_t d\mathbf{U}_t\right)^{2m} \leq (m(2m-1))^m T_0^{m-1} \int_0^{T_0} \mathbf{E} Y_s^{2m} ds \leq \mathbf{k}_2(m) T_0^m,$$

где $\mathbf{k}_2(m) = (m(2m-1))^m \mathbf{k}_1(m)$. Мы получаем

$$\mathbf{P}\left(\int_0^{T_0} Y_t^2 dt < H\right) \leq \frac{3^{2m-1} (Y_0^{2m} + \mathbf{k}_1(m) + (2\beta)^{2m} \mathbf{k}_2(m) T_0^m)}{(2\alpha_2 H + \beta^2 T_0)^{2m}}.$$

Положим $H = \beta_2 (T_0 - T_0^\varepsilon)$ для некоторого ε . Тогда

$$\mathbf{P}\left(\int_0^{T_0} Y_t^2 dt < H\right) \leq \frac{1}{(\beta^2)^{2m}} \frac{\mathbf{k}(m)}{T_0^{m(2\varepsilon-1)}}.$$

Подставляя это неравенство в (8.8), приходим к оценке

$$\mathbf{E}(\alpha^* - \alpha)^2 \leq \frac{\beta^2}{\beta_2(T_0 - T_0^\varepsilon)} + \frac{\alpha^2}{\beta^{4m}} \frac{\mathbf{k}(m)}{T_0^{m(2\varepsilon-1)}}.$$

Выберем $\varepsilon = 5/6$ и $m = 3$, так что $m(2\varepsilon - 1) = 2$, что дает $\varepsilon^2(T_0)$ и, следовательно, желаемый результат. Предложение 8.1 доказано.

8.2. Известный параметр μ . В этом пункте мы рассматриваем задачу оптимального потребления и инвестирования для рынков с известным μ и неизвестным α , т.е. в этом случае $\hat{\mu} = \mu$ и, следовательно, $\hat{\theta}(y) = \theta(y)$ в (8.3). Положим

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1 &= \frac{1 + 2\gamma + \zeta_0}{1 + \zeta_0} \frac{\tilde{T}}{|\alpha_1|} (2Q_1^* \tilde{T} + \gamma h_1^*), \\ \Gamma &= \left(q_* \tilde{T} (\sqrt{\tilde{c}})^\gamma + (\tilde{T} + 1) (\sqrt{\tilde{c} q_*})^\gamma\right) \frac{1}{\varkappa^\gamma} e^{\gamma \varkappa \tilde{T}}, \end{aligned} \tag{8.9}$$

где $\zeta_0 > 0$, $\tilde{c} = 4\tilde{T}e^{2c_0\tilde{T}}$,

$$c_0 = \theta_*^4 + \theta_*^2(2|r| + 3) + (|r| + 1)^2 \quad \text{и} \quad \theta_* = \frac{\mu_* + |r|}{\sigma_1(1 - \gamma)}.$$

Кроме того,

$$h_1^* = \left(\tilde{T}Q_1^* + \frac{Q_1^*\tilde{T}^2}{q_*} \right) e^{Q_*\tilde{T}} + \frac{3}{q_*} \sqrt{\frac{2|\alpha_2|}{\beta^2(1 - e^{2\alpha_2})}} e^{Q_*\tilde{T}} \tilde{T}. \quad (8.10)$$

Теорема 8.1. Для любых $0 < T_0 < T$ и любых $m \geq 1$

$$\sup_{\alpha_2 \leq \alpha \leq \alpha_1} \sup_{|\mu| \leq \mu_*} \mathbf{E} \left| \hat{J}_{T_0}^* - J^*(T_0, x, Y_{T_0}) \right| \leq \delta_m, \quad (8.11)$$

где

$$\delta_m = \delta_m(x, T_0) = \Gamma \mathbf{h}_1^\gamma x^\gamma \left((2\iota_0)^\gamma + \left(\frac{(2m-1)!! \beta^{2m}}{(2|\alpha_1|)^m} \right)^{\gamma/(2m)} \right) \epsilon^\gamma(T_0),$$

$\iota_0 = \beta/\sqrt{2|\alpha_1|}$ и функция $\epsilon(\cdot)$ определена в (8.7).

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$\sup_{(s,y) \in \mathcal{H}} \left(|\mathbf{a}^*(s, y)|^2 + |\mathbf{b}^*(y)|^2 \right) \leq c_0.$$

Кроме того, для любых $T_0 < T$

$$\begin{aligned} |\hat{J}_{T_0}^* - J_{T_0}^*| &\leq \mathbf{E}_{T_0} \int_{T_0}^T \left| (\hat{c}_t^*)^\gamma (\hat{X}_t^*)^\gamma - (c_t^*)^\gamma (X_t^*)^\gamma \right| dt + \mathbf{E}_{T_0} |(\hat{X}_T^*)^\gamma - (X_T^*)^\gamma| \\ &\leq \mathbf{E}_{T_0} \int_{T_0}^T |\hat{c}_t^* \hat{X}_t^* - c_t^* X_t^*|^\gamma dt + \mathbf{E}_{T_0} |\hat{X}_T^* - X_T^*|^\gamma. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Используя приводимую ниже лемму 8.1, мы получаем

$$|\hat{J}_{T_0}^* - J^*(T_0, x, Y_{T_0})| \leq \Gamma \mathbf{h}_1^\gamma x^\gamma (2\iota_0 + |Y_{T_0}|)^\gamma |\bar{\alpha}|^\gamma$$

и, следовательно,

$$\mathbf{E} |\hat{J}_{T_0}^* - J^*(T_0, x, Y_{T_0})| \leq \Gamma x^\gamma \mathbf{h}_1^\gamma (2\iota_0)^\gamma \mathbf{E} |\bar{\alpha}|^\gamma \Gamma x^\gamma \mathbf{h}_1^\gamma \mathbf{E} (|Y_{T_0}|^\gamma |\bar{\alpha}|^\gamma).$$

По неравенствам Гёльдера и Йенсена для $m' = m(2-\gamma)/\gamma > 1$, где $m \geq 1$, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} (|Y_{T_0}|^\gamma |\bar{\alpha}|^\gamma) &\leq \left(\mathbf{E} |Y_{T_0}|^{2\gamma/(2-\gamma)} \right)^{(2-\gamma)/2} (\mathbf{E} |\bar{\alpha}|^2)^{\gamma/2} \\ &\leq \left(\mathbf{E} |Y_{T_0}|^{2\gamma m'/(2-\gamma)} \right)^{(2-\gamma)/(2m')} \epsilon^\gamma(T_0) \\ &\leq \left(\mathbf{E} |Y_{T_0}|^{2m} \right)^{\gamma/(2m)} \epsilon^\gamma(T_0). \end{aligned}$$

Из [11, лемма 1.1.1] следует, что $\mathbf{E} |Y_{T_0}|^{2m} \leq c_m(T_0) \leq c_m(0)$, где

$$c_m(T_0) = (2m-1)!! \beta^{2m} \left(\frac{1 - e^{2\alpha T_0}}{2|\alpha|} \right)^m.$$

Мы получаем, что для любого $m \geq 1$

$$\mathbf{E} (|Y_{T_0}|^\gamma |\bar{\alpha}|^\gamma) \leq \left(\frac{(2m-1)!! \beta^{2m}}{(2|\alpha_1|)^m} \right)^{\gamma/(2m)} \epsilon^\gamma(T_0), \quad (8.13)$$

что дает желаемый результат. Теорема 8.1 доказана.

З а м е ч а н и е 8.1. Математическое ожидание $\mathbf{E} |\hat{J}_{T_0}^* - J^*(T_0, x, y)|$ в теореме 8.1 можно сделать произвольно малым либо за счет увеличения интервала наблюдения $[0, T_0]$ процесса Y , либо за счет уменьшения начального капитала x . Это означает, что даже в случае, когда интервал оценивания недостаточно широк (как часто и бывает на практике), мы всегда можем найти стратегию, которая сколь угодно близка к оптимальной. Но в этом случае следует быть осторожными в выборе первоначального вклада, принимая во внимание оценку (8.11).

Лемма 8.1. Для любых $0 < T_0 \leq T$

$$\mathbf{E}_{T_0} \sup_{T_0 \leq s \leq T} (\hat{X}_s^*)^2 < x^2 \tilde{c}. \quad (8.14)$$

Кроме того,

$$\sup_{T_0 \leq t \leq T} \mathbf{E}_{T_0} |\hat{X}_t^* - X_t^*|^\gamma \leq k_1 x^\gamma \left(\mathbf{h}_1(2\ell_0 + |Y_{T_0}|) \right)^\gamma |\bar{\alpha}|^\gamma \quad (8.15)$$

и

$$\mathbf{E}_{T_0} \int_{T_0}^T |\hat{c}_t^* \hat{X}_t^* - c_t^* X_t^*|^\gamma dt \leq k_2 x^\gamma \left(\mathbf{h}_1(2\ell_0 + |Y_{T_0}|) \right)^\gamma |\bar{\alpha}|^\gamma, \quad (8.16)$$

где $k_1 = (\sqrt{c}q_*)^\gamma e^{\gamma\kappa\tilde{T}}/\kappa^\gamma$ и $k_2 = (\tilde{T}(\sqrt{c}q_*)^\gamma + \tilde{d}^\gamma q_* \tilde{T})e^{\gamma\kappa\tilde{T}}/\kappa^\gamma$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что, так же как в доказательстве теоремы 8.1, $(A^*)^2 + (B^*)^2 \leq c_0$, где

$$A^* = \sup_{(s,y) \in \mathcal{K}} |\hat{\mathbf{a}}^*(s, y)| \quad \text{и} \quad B^* = \sup_{y \in \mathbf{R}} |\hat{\mathbf{b}}^*(y)|.$$

Функции $\hat{\mathbf{a}}^*(s, y)$ и $\hat{\mathbf{b}}^*(y)$ определены в (8.3). Далее, из (8.2) понятно, что для ограниченной функции $\hat{\mathbf{b}}^*(y)$ процесс $(\hat{\mathcal{E}}_{t,s}^*)_{t \leq s \leq T}$ является квадратично интегрируемым мартингалом, и по неравенству Дуба

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{T_0} \sup_{T_0 \leq s \leq T} (\hat{X}_s^*)^2 &\leq x^2 e^{2\tilde{T}A^*} \mathbf{E} \sup_{t \leq s \leq T} \hat{\mathcal{E}}_{t,s}^2 \leq x^2 \cdot 4e^{2\tilde{T}A^*} \mathbf{E} \hat{\mathcal{E}}_{t,T}^2 \\ &\leq 4x^2 e^{2\tilde{T}A^*} e^{\tilde{T}(B^*)^2}. \end{aligned}$$

Это доказывает оценку (8.14). Положим $\Delta_t = \hat{X}_t^* - X_t^*$, $A_s = \mathbf{a}^*(s, Y_s)$, $B_s = \mathbf{b}^*(Y_s)$, $\hat{A}_s = \hat{\mathbf{a}}^*(s, Y_s)$ и $\hat{B}_s = \hat{\mathbf{b}}^*(Y_s)$. Ясно, что если μ известно (т.е. $\hat{\mu} = \mu$), то функция $\hat{B}_s$ совпадает с B_s . Но мы сохраним обозначение $\hat{B}_s$, чтобы использовать его в случае неизвестного параметра μ . Далее, положим $\varphi_1(s) = \hat{A}_s \hat{X}_s^* - A_s X_s^*$ и $\varphi_2(s) = \hat{B}_s \hat{X}_s^* - B_s X_s^*$. Таким образом, из (7.2) получаем

$$\begin{aligned} \Delta_t^2 &= \left(\int_{T_0}^t \varphi_1(s) ds + \int_{T_0}^t \varphi_2(s) dW_s \right)^2 \\ &\leq 2(t - T_0) \int_{T_0}^t \varphi_1^2(s) ds + 2 \left(\int_{T_0}^t \varphi_2(s) dW_s \right)^2. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\varphi_1^2(s) \leq \left(|\hat{A}_s - A_s| |\hat{X}_s^*| + |A_s| |\Delta_s| \right)^2 \leq 2|\hat{A}_s - A_s|^2 |\hat{X}_s^*|^2 + 2|A_s|^2 |\Delta_s|^2.$$

Так как $\hat{B}_s = B_s$, то $\varphi_2^2(s) \leq (|\hat{B}_s - B_s| |\hat{X}_s^*| + |B_s| |\Delta_s|)^2 \leq |B_s|^2 |\Delta_s|^2$. Полагая $g(t) = \mathbf{E}_{T_0} \Delta_t^2$, получим

$$g(t) \leq c_0 \int_{T_0}^t g(s) ds + \psi(t), \quad \text{где} \quad \psi(t) = 4\tilde{T} \int_{T_0}^t \mathbf{E}_{T_0} \left(|\hat{A}_s - A_s|^2 |\hat{X}_s^*|^2 \right) ds.$$

Неравенство Гронвулла–Беллмана дает

$$\begin{aligned} g(t) &\leq \psi(t) e^{2c_0 t} \leq x^2 \cdot 4\tilde{T} e^{c_0 T} \int_{T_0}^t \mathbf{E}_{T_0} \left(|\hat{A}_s - A_s|^2 |\hat{X}_s^*|^2 \right) ds \\ &\leq \tilde{c}^2 x^2 \int_{T_0}^t \mathbf{E}_{T_0} |\hat{A}_s - A_s|^2 ds \leq \tilde{c}^2 x^2 \int_{T_0}^t \mathbf{E}_{T_0} |\hat{h}(s, Y_s)^{-q_*} - h(s, Y_s)^{-q_*}|^2 ds \\ &\leq \tilde{c}^2 x^2 q_* \int_{T_0}^t \mathbf{E}_{T_0} |\hat{h}(s, Y_s) - h(s, Y_s)|^2 ds. \end{aligned}$$

Воспользовавшись предложением 10.1 и леммой 10.6, получим, что для любого $T_0 \leq s \leq T$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{T_0} |\hat{h}(s, Y_s) - h(s, Y_s)| &\leq \mathbf{h}_1 \mathbf{E}_{T_0} \left(e^{\kappa(T-s)} (\iota_0 + |Y_s|) \right) |\bar{\alpha}| \\ &\leq \mathbf{h}_1 (\iota_0 + \mathbf{E}_{T_0} |Y_s|) e^{\kappa(T-s)} |\bar{\alpha}| \\ &\leq \mathbf{h}_1 (2\iota_0 + |Y_{T_0}|) e^{\kappa(T-s)} |\bar{\alpha}|. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Следовательно,

$$g(t) \leq x^2 \tilde{c}^2 q_* \left(\mathbf{h}_1 (2\iota_0 + |Y_{T_0}|) \right)^2 \frac{e^{2\kappa\tilde{T}}}{\kappa^2} |\bar{\alpha}|^2,$$

т.е. неравенство (8.15) выполняется. Докажем неравенство (8.16). Заметим, что в силу (7.1) оптимальная интенсивность потребления ограничена: $0 \leq c_t^* \leq 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{T_0} \int_{T_0}^T |\widehat{c}_t^* \widehat{X}_t^* - c_t^* X_t^*|^\gamma dt \\ \leq \mathbf{E}_{T_0} \int_{T_0}^T |\widehat{c}_t^* - c_t^*|^\gamma |\widehat{X}_t^*|^\gamma dt + \int_{T_0}^T \mathbf{E}_{T_0} |\widehat{X}_t^* - X_t^*|^\gamma dt \\ \leq x^\gamma \widetilde{d}^\gamma \mathbf{E}_{T_0} \int_{T_0}^T |\widehat{c}_t^* - c_t^*|^\gamma dt + \widetilde{T} \sup_{T_0 \leq t \leq T} \mathbf{E}_{T_0} |\widehat{X}_t^* - X_t^*|^\gamma. \end{aligned}$$

Используя верхнюю границу (8.17) и принимая во внимание неравенство $\inf_{(t,y) \in \mathcal{K}} h(t,y) \geq 1$, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{T_0} \int_{T_0}^T |\widehat{c}_t^* - c_t^*|^\gamma dt &\leq q_* \int_{T_0}^T \mathbf{E}_{T_0} |\widehat{h}(s, Y_s) - h(s, Y_s)|^\gamma dt \\ &\leq q_* \widetilde{T} \left(\mathbf{h}_1(2\iota_0 + |Y_{T_0}|) \right)^\gamma \frac{e^{\gamma \widetilde{T}}}{\varkappa^\gamma} \mathbf{E}_{T_0} |\overline{\alpha}|^\gamma. \end{aligned}$$

Значит,

$$\mathbf{E}_{T_0} \int_{T_0}^T |\widehat{c}_t^* \widehat{X}_t^* - c_t^* X_t^*|^\gamma dt \leq k_2 x^\gamma \left(\mathbf{h}_1(2\iota_0 + |Y_{T_0}|) \right)^\gamma \mathbf{E}_{T_0} |\overline{\alpha}|^\gamma.$$

Отсюда следует (8.16). Лемма 8.1 доказана.

8.3. Случай неизвестного μ . На практике не реалистично рассматривать рынок с известным параметром μ . В этом разделе мы обсудим модель, где неизвестным является не только параметр α , но и параметр μ . Напомним, что динамика акций задается уравнениями (2.1). Пусть оценка $\widehat{\mu}$ определена формулой

$$\widehat{\mu} = \text{Proj}_{[-\mu_*, \mu_*]}(\widetilde{\mu}), \quad \widetilde{\mu} = \frac{Z_{T_0}}{T_0}, \quad Z_t = \int_0^t \frac{1}{S_t} dS_t. \quad (8.18)$$

Лемма 8.2. При любом $0 < T_0 < T$ справедливы следующие неравенства:

$$\sup_{|\mu| \leq \mu_*} \mathbf{E} |\widehat{\mu} - \mu| \leq \epsilon_1(T_0) \quad \text{и} \quad \sup_{|\mu| \leq \mu_*} \mathbf{E} |\widehat{\mu} - \mu|^2 \leq \epsilon_1^2(T_0), \quad (8.19)$$

где $\epsilon_1(T_0) = \sigma^*/\sqrt{T_0}$ и $\sigma^* = \sup_{y \in \mathbf{R}} \sigma(y)$.

Доказательство. Из определения процесса Z следует, что

$$\widetilde{\mu} - \mu = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sigma(Y_t) dW_t,$$

откуда непосредственно получаем оценки

$$\sup_{|\mu| \leq \mu_*} \mathbf{E} |\tilde{\mu} - \mu| \leq \epsilon_1(T_0) \quad \text{и} \quad \sup_{|\mu| \leq \mu_*} \mathbf{E} |\tilde{\mu} - \mu|^2 \leq \epsilon_1^2(T_0).$$

Учитывая, что $|\tilde{\mu} - \mu| \leq |\hat{\mu} - \mu|$, приходим к (8.19). Лемма 8.2 доказана.

Пусть $J^*(T_0, x, y)$ — оптимальная целевая функция и ее оценка $\hat{J}_{T_0}^*$ определена в (8.1). Введем константы

$$k'_1 = 2\sqrt{\tilde{c}\tilde{T}} \frac{2\mu_* + r + \sigma_1 + 1}{\sigma_1^2(1 - \gamma)} \quad \text{и} \quad k'_2 = \frac{e^{\varkappa\tilde{T}}}{\varkappa}.$$

Кроме того, положим

$$\begin{aligned} k_3 &= (k'_1)^\gamma + \left(\sqrt{2\tilde{c}q_*}k'_2\mathbf{h}_2\right)^\gamma, \quad k_4 = \left(\sqrt{2\tilde{c}q_*}k'_2\mathbf{h}_1\right)^\gamma, \\ k_5 &= \tilde{T}(k'_1)^\gamma + k_7(k'_2\mathbf{h}_2)^\gamma, \quad k_6 = k_7(k'_2\mathbf{h}_1)^\gamma, \quad k_7 = \left(\sqrt{2\tilde{c}q_*} + q_*\tilde{d}^\gamma\right), \end{aligned}$$

где параметры $\tilde{c}$, $\mathbf{h}_1$ введены в (8.9) и

$$\mathbf{h}_2 = \frac{\gamma(\mu_* + r)}{(1 - \gamma)\sigma_1^2} \frac{2\tilde{T}^2}{\iota_0}. \quad (8.20)$$

Теорема 8.2. Оценка $\hat{J}_{T_0}^*$ оптимальной целевой функции удовлетворяет следующему неравенству:

$$|\hat{J}_{T_0}^* - J^*(T_0, x, Y_{T_0})| \leq x^\gamma \Gamma_1(2\iota_0 + |Y_{T_0}|)^\gamma \varpi^\gamma + x^\gamma \Gamma_2(2\iota_0 + |Y_{T_0}|)^\gamma |\bar{\alpha}|^\gamma, \quad (8.21)$$

где $\Gamma_1 = k_3 + k_5$, $\Gamma_2 = k_4 + k_6$ и $\varpi = |\hat{\mu} - \mu| + |\hat{\mu} - \mu|^2$. Кроме того, для любых $m \geq 1$

$$\sup_{\alpha_2 \leq \alpha \leq \alpha_1} \sup_{|\mu| \leq \mu_*} \mathbf{E} |\hat{J}_{T_0}^* - J^*(T_0, x, Y_{T_0})| \leq \check{\delta}_m, \quad (8.22)$$

где $\check{\delta}_m = \check{\delta}_m(x, T_0) = x^\gamma (\Gamma_1(3\iota_0^\gamma + |Y_0|^\gamma) \epsilon_2^\gamma(T_0) + \check{\Gamma}_m \epsilon^\gamma(T_0))$ и

$$\check{\Gamma}_m = \Gamma_2 \left((2\iota_0)^\gamma + \left(\frac{(2m-1)!! \beta^{2m}}{(2|\alpha_1|)^m} \right)^{\gamma/2m} \right).$$

Здесь $\iota_0 = \beta/\sqrt{2|\alpha_1|}$, $\epsilon_2(T_0) = \epsilon_1(T_0) + \epsilon_1^2(T_0)$, функции $\epsilon_1(\cdot)$ и $\epsilon(\cdot)$ определены в (8.19) и (8.7) соответственно.

Доказательство. Чтобы получить (8.21), мы используем то же рассуждение, что в теореме 8.1, и лемму 8.3. Для доказательства (8.22) заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} |\hat{J}_{T_0}^* - J^*(T_0, x, Y_{T_0})| &\leq x^\gamma \Gamma_1 \left((2\iota_0)^\gamma + (\mathbf{E} |Y_{T_0}|)^\gamma \right) \mathbf{E} \varpi^\gamma \\ &\quad + x^\gamma \Gamma_2 (2\iota_0)^\gamma \epsilon^\gamma(T_0) + \mathbf{E} (|Y_{T_0}|^\gamma |\bar{\alpha}|^\gamma). \end{aligned}$$

Учитывая, что $\mathbf{E} \varpi \leq \epsilon_2(T_0)$, и используя неравенство (8.13), мы получаем (8.22). Теорема 8.2 доказана.

Лемма 8.3. *Оцениваемый процесс капитала $(\hat{X}_t^*)_{T_0 \leq t \leq T}$ удовлетворяет следующим неравенствам:*

$$\sup_{T_0 \leq t \leq T} \mathbf{E}_{T_0} |\hat{X}_t^* - X_t^*|^\gamma \leq x^\gamma k_3 (2\iota_0 + |Y_{T_0}|)^\gamma \varpi^\gamma + x^\gamma k_4 (2\iota_0 + |Y_{T_0}|)^\gamma |\bar{\alpha}|^\gamma, \quad (8.23)$$

$$\mathbf{E}_{T_0} \int_{T_0}^T |\hat{c}_t^* \hat{X}_t^* - c_t^* X_t^*|^\gamma dt \leq x^\gamma k_5 (2\iota_0 + |Y_{T_0}|)^\gamma \varpi^\gamma + x^\gamma k_6 (2\iota_0 + |Y_{T_0}|)^\gamma |\bar{\alpha}|^\gamma. \quad (8.24)$$

Доказательство. Следуя доказательству леммы 8.1, положим $\Delta_t = \hat{X}_t^* - X_t^*$, $g(t) = \mathbf{E}_{T_0} \Delta_t^2$. Тогда

$$g(t) \leq c_0 \int_{T_0}^t g(s) ds + \psi(t),$$

где $\psi(t) = 4 \mathbf{E}_{T_0} \int_{T_0}^t (|\hat{A}_s - A_s|^2 + |\hat{B}_s - B_s|^2) |\hat{X}_s^*|^2 ds$. Воспользовавшись неравенством Гронуолла–Беллмана, приходим к следующей оценке:

$$\begin{aligned} g(t) &\leq \psi(t) e^{c_0 t} \leq x^2 \tilde{c} \int_{T_0}^t \mathbf{E}_{T_0} (|\hat{A}_s - A_s|^2 + |\hat{B}_s - B_s|^2) ds \\ &\leq x^2 \tilde{c} \tilde{T} \frac{2(2\mu_* + r)^2 + \sigma_1^2}{\sigma_1^4 (1 - \gamma)^2} \varpi^2 + 2x^2 \tilde{c} \int_{T_0}^t \mathbf{E}_{T_0} \left| \hat{h}(s, Y_s)^{-q_*} - h(s, Y_s)^{-q_*} \right|^2 ds \\ &\leq 2x^2 \tilde{c} \tilde{T} \left(\frac{2\mu_* + r + \sigma_1}{\sigma_1^2 (1 - \gamma)} \right)^2 \varpi^2 + 2x^2 \tilde{c} q_* \int_{T_0}^t \mathbf{E}_{T_0} |\hat{h}(s, Y_s) - h(s, Y_s)|^2 ds. \end{aligned}$$

Мы используем предложение 10.2, чтобы получить аналог неравенства (8.17):

$$\mathbf{E}_{T_0} |\hat{h}(s, Y_s) - h(s, Y_s)| \leq e^{\varkappa(T-s)} (2\iota_0 + |Y_{T_0}|) \tilde{\delta}, \quad (8.25)$$

где $\tilde{\delta} = \mathbf{h}_2 \varpi + \mathbf{h}_1 |\bar{\alpha}|$. Далее,

$$\begin{aligned} g(t) &\leq 2x^2 \tilde{c} \tilde{T} \left(\frac{2\mu_* + r + \sigma_1}{\sigma_1^2 (1 - \gamma)} \right)^2 \varpi^2 + 2x^2 \tilde{c} q_* \frac{e^{2\varkappa \tilde{T}}}{\varkappa^2} (2\iota_0 + |Y_{T_0}|)^2 \tilde{\delta}^2 \\ &\leq x^2 \left(k'_1 \varpi + k'_2 (2\iota_0 + |Y_{T_0}|) \tilde{\delta} \right)^2, \end{aligned}$$

так что

$$\mathbf{E}_{T_0} |\Delta_t| \leq x \left(k'_1 \varpi + k'_2 (2\iota_0 + |Y_{T_0}|) \tilde{\delta} \right).$$

Используя неравенство Йенсена для степенной функции z^γ (с $0 < \gamma < 1$), получаем (8.23). Теперь докажем (8.24). Мы рассуждаем так же, как при доказательстве леммы 8.1. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \int_{T_0}^T |\hat{c}_t^* \hat{X}_t^* - c_t^* X_t^*|^\gamma dt &\leq x^\gamma q_* \tilde{d}^\gamma \int_{T_0}^T \mathbf{E} |\hat{h}(s, Y_s) - h(s, Y_s)|^\gamma ds \\ &\quad + \tilde{T} \sup_{T_0 \leq t \leq T} \mathbf{E} |\hat{X}_t^* - X_t^*|^\gamma. \end{aligned}$$

Следовательно, верхняя граница (8.24) немедленно вытекает из (8.23) и (8.25). Лемма 8.3 доказана.

9. Моделирование. В этом разделе мы используем для моделирования пакет программ Scilab. На рис. 1 мы моделируем усеченную последовательную процедуру $\hat{\alpha}$ для различных значений T_0 по 30 траекториям процесса Y . Последовательные оценки представлены крестиками $\times$ для T_0 , равного 5 дням, и звездочками $\star$ для T_0 , равного 10 дням.

Истинное значение сноса процесса Y равно $\alpha = -5$. Мы берем границы $\alpha \in [-0.15, -10]$ и полагаем $\beta = 1$.

Рис. 1. Усеченная последовательная процедура для $T_0 = 5$ и $T_0 = 10$.

Рис. 2. Предельные функции $h(t, 0)$ и $\hat{h}(t, 0)$.

На рис. 2 мы моделируем предельные функции $h(t, y)$ и $\hat{h}(t, y)$ при следующих настройках рынка: $T_0 = 5$ и $\bar{T} = T - T_0 = 1$, $r = 0.01$, $\mu = 0.02$. Параметр волатильности определен как $\sigma(y) = 0.5 + \sin^2 y$. Параметр полезности γ равен 0.75. Для моделирования $\hat{h}(t, y)$ мы используем очень пессимистическую реализацию усеченной оценки, а именно

$\hat{\alpha} = -0.5$. Истинное значение α равно -5 . Мы видим, что даже в этой крайней ситуации функция $\hat{h}(t, y)$ не очень существенно отклоняется от истинной функции $h(t, y)$.

10. Приложение. Пусть h — неподвижная точка для $\mathcal{L}$, т.е. $h = \mathcal{L}h$. Напомним, что оператор $\mathcal{L}$ определен в (4.4), (4.5). В этом разделе мы изучаем свойства непрерывности по параметрам α и μ функции h . Для этого мы исследуем сначала частные производные функций $\mathcal{H}_f(t, s, y)$ и h по y .

Лемма 10.1. Для любых t и s таких, что $T_0 < t \leq s \leq T$,

$$\sup_{y \in \mathbf{R}} \sup_{f \in \mathcal{F}} \left| \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{H}_f(t, s, y) \right| \leq Q_1^* \tilde{T} e^{Q_* \tilde{T}} + \frac{e^{Q_* \tilde{T}}}{\nu_s}, \quad (10.1)$$

$$2de \nu_s^2 = \beta^2(1 - e^{2\alpha(s-t)})/(2|\alpha|).$$

Доказательство. Чтобы вычислить условное математическое ожидание в (4.5), заметим сначала, что

$$\eta_s = ye^{\alpha(s-t)} + \int_t^s \beta e^{\alpha(s-v)} d\tilde{\mathbf{U}}_v = ye^{\alpha(s-t)} + \xi_s.$$

Так как η является гауссовским процессом, то для любых $t < v_1 < \dots < v_k < s$ и любых ограниченных функций $G: \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}$ выполнено равенство

$$\mathbf{E}(G(\eta_{v_1}, \dots, \eta_{v_k}) | \eta_s = z) = \mathbf{E}G(\mathbf{B}_{v_1}, \dots, \mathbf{B}_{v_k}), \quad (10.2)$$

где $\mathbf{B}_v = \eta_v - k(v)\eta_s + k(v)z$ и коэффициент $k(v)$ выбран так, что

$$\mathbf{E}[(\xi_v - k(v)\xi_s)\xi_s] = 0, \quad \text{т.е.} \quad k(v) = \frac{\mathbf{E}(\xi_v \xi_s)}{\mathbf{E}\xi_s^2} = e^{\alpha(s-v)} \frac{1 - e^{2\alpha(v-t)}}{1 - e^{2\alpha(s-t)}} \leq 1.$$

Условное математическое ожидание относительно η_s позволяет представить $\mathcal{H}_f$ как

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_f(t, s, y) &= \int_{\mathbf{R}} \widehat{\mathcal{H}}_f(s, y, z) \mathbf{p}(z, y) dz, \\ \mathbf{p}(z, y) &= \frac{1}{\nu_s \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(z - \mu(y))^2}{2\nu_s^2} \right\}, \end{aligned} \quad (10.3)$$

где $\mu(y) = \mathbf{E}\eta_s = ye^{\alpha(s-t)}$ и $\nu_s^2 = \mathbf{D}\eta_s$. Так как $\mathbf{B}_s = z$, мы получаем

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{H}}_f(s, y, z) &= \mathbf{E} \left((f(s, \eta_s^{t,y}))^{1-q_*} \exp \left\{ \int_t^s Q(\eta_u^{t,y}) du \right\} \middle| \eta_s = z \right) \\ &= \mathbf{E} \left((f(s, z))^{1-q_*} \exp \left\{ \int_t^s Q(\mathbf{B}_u) du \right\} \right) \leq e^{Q_*(s-t)}. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Отсюда следует, что

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} \widehat{\mathcal{H}}_f(s, y, z) \right| \leq \left| \int_t^s \frac{\partial Q(\mathbf{B}_u)}{\partial y} du \right| \widehat{\mathcal{H}}_f(s, y, z) \leq Q_1^*(s-t) e^{Q_*(s-t)} \leq Q_1^* \tilde{T} e^{Q_* \tilde{T}}.$$

Теперь из (10.3) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}_f(t, s, y)}{\partial y} &= \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial \widehat{\mathcal{H}}_f(s, y, z)}{\partial y} \mathbf{p}(z, y) dz \\ &+ \int_{\mathbf{R}} \widehat{\mathcal{H}}_f(s, y, z) \frac{(z - \mu(y)) \mu'(y)}{\nu_s^2} \mathbf{p}(z, y) dz. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \mathcal{H}_f(t, s, y)}{\partial y} \right| &\leq Q_1^*(s-t) e^{Q_*(s-t)} + e^{Q_*(s-t)} \frac{\mu'(y)}{\nu_s^2} \int_{\mathbf{R}} |z - \mu(y)| \mathbf{p}(z, y) dz \\ &\leq Q_1^*(s-t) e^{Q_*(s-t)} + \frac{e^{(Q_* + \alpha)(s-t)}}{\nu_s^2} \frac{2\nu_s}{\sqrt{2\pi}} \leq Q_1^* \tilde{T} e^{Q_* \tilde{T}} + \frac{e^{Q_* \tilde{T}}}{\nu_s}. \end{aligned}$$

Таким образом, лемма 10.1 доказана.

Лемма 10.2. *Неподвижная точка $h = \mathcal{L}_h$ дифференцируема по $y \in \mathbf{R}$, и ее частная производная ограничена:*

$$\sup_{T_0 \leq t \leq T, y \in \mathbf{R}} \left| \frac{\partial}{\partial y} h(t, y) \right| \leq h_1^*, \quad (10.5)$$

где h_1^* определено в (8.10).

Доказательство. Ясно, что достаточно показать, что функция $\mathcal{L}_f(t, y)$ дифференцируема по y и ее частная производная ограничена:

$$\sup_{T_0 \leq t \leq T, y \in \mathbf{R}} \left| \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{L}_f(t, y) \right| \leq h_1^*.$$

Из определения $\mathcal{L}_f$ (см. (4.4)) для всех $f \in \mathcal{X}$ и всех $t \in [T_0, T]$, $y \in \mathbf{R}$ следует, что

$$\frac{\partial}{\partial y} \mathcal{L}_f(t, y) = \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{G}(t, T, y) + \frac{1}{q_*} \int_t^T \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{H}_f(t, s, y) ds.$$

С помощью леммы 10.1 и приводимой далее леммы 10.4 получаем

$$\begin{aligned} \sup_{T_0 \leq t \leq T, y \in \mathbf{R}} \left| \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{L}_f(t, y) \right| &\leq \tilde{T} Q_1^* e^{Q_* \tilde{T}} + \frac{1}{q_*} \int_t^T Q_1^* \tilde{T} e^{Q_* \tilde{T}} ds + \frac{1}{q_*} \int_t^T \frac{e^{Q_* \tilde{T}}}{\nu_s} ds \\ &\leq \tilde{T} Q_1^* e^{Q_* \tilde{T}} + \frac{Q_1^* \tilde{T}^2}{q_*} e^{Q_* \tilde{T}} + \frac{e^{Q_* \tilde{T}}}{q_*} \int_t^T \frac{1}{\nu_s} ds. \end{aligned}$$

Чтобы оценить $\int_t^T (1/\nu_s) ds$, заметим, что $2|\alpha|(s-t) \leq 2|\alpha|\tilde{T}$ и, значит,

$$\begin{aligned}\nu_s^2 &= \beta^2 \frac{1 - e^{2\alpha(s-t)}}{2|\alpha|(s-t)} (s-t) \geq \beta^2 \frac{1 - e^{2\alpha}}{2|\alpha|} (s-t), \quad \text{если } s-t \leq 1, \\ \nu_s^2 &= \beta^2 \frac{1 - e^{2\alpha(s-t)}}{2|\alpha|} \geq \beta^2 \frac{1 - e^{2\alpha}}{2|\alpha|}, \quad \text{если } s-t \geq 1.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\int_t^T \frac{1}{\nu_s} ds &\leq \sqrt{\frac{2|\alpha|}{\beta^2(1 - e^{2\alpha})}} \int_t^{t+1} \frac{1}{\sqrt{s-t}} ds + \sqrt{\frac{2|\alpha|}{\beta^2(1 - e^{2\alpha})}} \int_{t+1}^T ds \\ &\leq 2\sqrt{\frac{2|\alpha|}{\beta^2(1 - e^{2\alpha})}} + \sqrt{\frac{2|\alpha|}{\beta^2(1 - e^{2\alpha})}} \tilde{T} \leq 3\sqrt{\frac{2|\alpha|}{\beta^2(1 - e^{2\alpha})}} \tilde{T}.\end{aligned}$$

Учитывая, что $\alpha_2 \leq \alpha \leq \alpha_1 < 0$, мы получаем желаемый результат. Лемма 10.2 доказана.

Сейчас мы изучим частные производные функции $\mathcal{G}(t, s, y)$, определенной в (4.4). Для этого нам нужен следующий результат.

Лемма 10.3. Пусть $F = F(y, \omega): \mathbf{R} \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ — случайная ограниченная функция такая, что для некоторой неслучайной константы c^*

$$\left| \frac{d}{dy} F(y, \omega) \right| \leq c^* \quad \text{n.н.}$$

Тогда

$$\frac{d}{dy} \mathbf{E} F(y, \omega) = \mathbf{E} \frac{d}{dy} F(y, \omega).$$

Эта лемма непосредственно вытекает из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости.

Лемма 10.4. Для любых $t < s$ функция $\mathcal{G}$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\sup_{y \in \mathbf{R}} \left| \frac{\partial \mathcal{G}(t, s, y)}{\partial y} \right| \leq (s-t) Q_1^* e^{Q_*(s-t)}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{E} \mathcal{G}(t, s, y) = \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{G}(t, s, y). \quad (10.6)$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{\partial \mathcal{G}(t, s, y)}{\partial y} = \mathcal{G}(t, s, y) \mathbf{G}(t, s, y),$$

где $\mathbf{G}(t, s, y) = \int_t^s Q_1(\eta_u^{t,y})(\partial \eta_u^{t,y} / \partial y) du$ и $Q_1(z) = dQ(z)/dz$. Теперь лемма 10.4 следует непосредственно из леммы 10.3.

Лемма 10.5. Для любой функции $f \in \mathcal{X}$, имеющей ограниченную частную производную по $y \in \mathbf{R}$, и для любого $N > 0$

$$\sup_{|y| < N} \sup_{0 \leq t_1 < t_2 \leq T} \frac{|\mathcal{L}_f(t_2, y) - \mathcal{L}_f(t_1, y)|}{\sqrt{t_2 - t_1}} < \infty.$$

Доказательство. Можно проверить, что

$$\sup_{|y| < N} \sup_{0 \leq t_1 < t_2 \leq s \leq T} \frac{\mathbf{E} |\eta_s^{t_2, y} - \eta_s^{t_1, y}|}{\sqrt{t_2 - t_1}} < \infty.$$

Отсюда получаем лемму 10.5.

Напомним, что процессы $(\eta_s)_{0 \leq s \leq T}$ и $(\hat{\eta}_s^{t, y})_{0 \leq s \leq T}$ определены в (4.3) и (8.5) соответственно.

Лемма 10.6. Для любых $T_0 \leq t \leq s \leq T$

$$\mathbf{E}_{T_0} |\hat{\eta}_s^{t, y}| \leq \iota_0 + |y| = \frac{\beta}{\sqrt{2|\alpha_1|}} + |y| := \tilde{m}(y), \quad (10.7)$$

$$\mathbf{E}_{T_0} \int_t^T |\hat{\eta}_s^{t, y} - \eta_s^{t, y}| dt \leq \frac{\tilde{T} \tilde{m}(y)}{|\alpha_1|} |\bar{\alpha}|. \quad (10.8)$$

Кроме того, для известного параметра μ и неизвестного α

$$\mathbf{E}_{T_0} |\hat{\mathcal{G}}(t, s, y) - \mathcal{G}(t, s, y)| \leq \tilde{T} Q_1^* e^{Q_*(T-t)} \frac{\tilde{m}(y)}{|\alpha_1|} |\bar{\alpha}|, \quad (10.9)$$

где Q^* и Q_1^* определены в (3.5), а функция $\hat{\mathcal{G}}(t, s, y)$ определена в (8.4).

Доказательство. Так как $\eta_s = \eta_t e^{\alpha(s-t)} + \int_t^s \beta e^{\alpha(s-v)} d\tilde{\mathbf{U}}_v$, то для любого $\alpha_2 \leq \alpha \leq \alpha_1 < 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} (\eta_s^{t, y})^2 &= y^2 e^{2\alpha(s-t)} + \beta^2 \int_t^s e^{2\alpha(t-v)} dv \leq y^2 + \frac{\beta^2}{2|\alpha_1|} \\ &\leq \left(|y| + \frac{\beta}{\sqrt{2|\alpha_1|}} \right)^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует (10.7). Более того, полагая $\bar{\eta}_s = \hat{\eta}_s^{t, y} - \eta_s^{t, y}$, получаем

$$d\bar{\eta}_s = (\hat{\alpha} \hat{\eta}_s^{t, y} - \alpha \eta_s^{t, y}) ds = \alpha \bar{\eta}_s ds + \bar{\alpha} \hat{\eta}_s^{t, y} ds,$$

т.е. $\bar{\eta}_s = \int_t^s \bar{\alpha} e^{\alpha(s-u)} \hat{\eta}_u^{t, y} du$. Следовательно, $|\bar{\eta}_s| \leq |\bar{\alpha}| \int_t^s |\hat{\eta}_u^{t, y}| e^{\alpha(s-u)} du$. Так как $\hat{\alpha}$ независима от броуновского движения $(\tilde{\mathbf{U}}_t)$, мы получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{T_0} |\bar{\eta}_s| &\leq |\bar{\alpha}| \mathbf{E}_{T_0} \int_t^s |\hat{\eta}_u^{t, y}| e^{\alpha(s-u)} du \\ &\leq |\bar{\alpha}| \int_t^s e^{\alpha(s-u)} \mathbf{E}_{T_0} |\hat{\eta}_u^{t, y}| du \leq \frac{\tilde{m}(y)}{|\alpha_1|} |\bar{\alpha}|. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Следовательно, для всех $T_0 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{T_0} \int_t^T |\bar{\eta}_s| ds &\leq \mathbf{E}_{T_0} \left(\int_t^T |\bar{\alpha}| \int_t^s e^{\alpha(s-u)} |\hat{\eta}_u^{t, y}| du ds \right) \\ &\leq \tilde{T} |\bar{\alpha}| \int_t^T e^{\alpha(s-u)} \mathbf{E}_{T_0} |\hat{\eta}_u^{t, y}| du \leq \frac{\tilde{m}(y) \tilde{T}}{|\alpha_1|} |\bar{\alpha}|, \end{aligned}$$

и мы получаем (10.8). Чтобы доказать неравенство (10.9), заметим, что

$$\begin{aligned} |\widehat{\mathcal{G}}(t, s, y) - \mathcal{G}(t, s, y)| &\leq e^{Q_*(T-t)} \left| \int_t^s Q(\widehat{\eta}_u^{t,y}) du - \int_t^s Q(\eta_u^{t,y}) du \right| \\ &\leq e^{Q_*(T-t)} \int_t^s \sup_{y \in \mathbf{R}} \left| \frac{\partial Q(y)}{\partial y} \right| |\bar{\eta}_u| du \\ &\leq Q_1^* e^{Q_*(T-t)} \int_t^T |\bar{\eta}_u| du. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\mathbf{E}_{T_0} |\widehat{\mathcal{G}}(t, s, y) - \mathcal{G}(t, s, y)| \leq Q_1^* e^{Q_*(T-t)} \int_t^T \mathbf{E}_{T_0} |\bar{\eta}_u| du.$$

Отсюда и из (10.10) следует (10.9). Таким образом, лемма 10.6 доказана.

В следующем предложении мы изучим поведение функции $h(t, y)$, являющейся решением уравнения $h = \mathcal{L}_h$, используя оценку $\hat{\alpha}$ для параметра α . Нам надо изучить отклонение

$$\bar{h}(t, y) = \hat{h}(t, y) - h(t, y), \quad (10.11)$$

где $\hat{h} = \widehat{\mathcal{L}}_h$. Оператор $\widehat{\mathcal{L}}$ определен в (8.4). Аналогично (4.2) мы определим на $\mathcal{X}$ метрику $\tilde{\varrho}_*$:

$$\tilde{\varrho}_*(f, g) = \sup_{(t,y) \in \mathcal{X}} e^{-\varkappa(T-t)} \frac{|f(t, y) - g(t, y)|}{\iota_0 + |y|}, \quad (10.12)$$

где $\iota_0 = \beta/\sqrt{2\alpha_1}$, $\varkappa = Q_* + \zeta + 1$ и $\zeta = \zeta_0 + 2\gamma$ для некоторого $\zeta_0 > 0$.

Предложение 10.1. Для известного μ и неизвестного α и для любого $0 < T_0 < T$

$$\tilde{\varrho}_*(\hat{h}, h) \leq \mathbf{h}_1 |\bar{\alpha}|, \quad (10.13)$$

где константа $\mathbf{h}_1$ определена в (8.9).

Доказательство. Мы используем определение (4.4) оператора $\mathcal{L}$:

$$h(t, y) = \mathcal{L}_h(t, y) = \mathbf{E} \mathcal{G}(t, T, y) + \frac{1}{q_*} \int_t^T \mathcal{H}_h(t, s, y) ds.$$

С помощью (4.5) мы можем оценить отклонение (10.11) следующим образом:

$$|\bar{h}(t, y)| \leq \mathbf{E}_{T_0} |\widehat{\mathcal{G}}(t, T, y) - \mathcal{G}(t, T, y)| + I(\hat{\alpha}),$$

где

$$I(\hat{\alpha}) = \frac{1}{q_*} \int_t^T \mathbf{E}_{T_0} \left| \left(\widehat{h}(s, \widehat{\eta}_s^{t,y}) \right)^{1-q_*} \widehat{\mathcal{G}}(t, s, y) - \left(h(s, \eta_s^{t,y}) \right)^{1-q_*} \mathcal{G}(t, s, y) \right| ds.$$

Более того, эта функция допускает следующую оценку:

$$\begin{aligned}
 I(\hat{\alpha}) &\leq \frac{1}{q_*} \int_t^T \mathbf{E}_{T_0} \left(h(s, \eta_s^{t,y})^{1-q_*} |\hat{\mathcal{G}}(t, s, y) - \mathcal{G}(t, s, y)| \right) ds \\
 &\quad + \frac{1}{q_*} \int_t^T \mathbf{E}_{T_0} \left| \left(\hat{h}(s, \hat{\eta}_s^{t,y}) \right)^{1-q_*} - (h(s, \eta_s^{t,y}))^{1-q_*} \right| e^{Q_*(s-t)} ds \\
 &\leq \int_t^T \mathbf{E}_{T_0} |\hat{\mathcal{G}}(t, s, y) - \mathcal{G}(t, s, y)| ds \\
 &\quad + \frac{|1-q_*|}{q_*} \int_t^T \mathbf{E}_{T_0} |\hat{h}(s, \hat{\eta}_s^{t,y}) - h(s, \eta_s^{t,y})| e^{Q_*(s-t)} ds.
 \end{aligned}$$

Учитывая, что $q_* = 1/(1-\gamma) > 1$, и используя неравенства (10.9) и (10.10), находим

$$\begin{aligned}
 |\bar{h}(t, y)| &\leq (1 + \tilde{T}) \mathbf{E}_{T_0} |\hat{\mathcal{G}}(t, T, y) - \mathcal{G}(t, T, y)| \\
 &\quad + \gamma \int_t^T \mathbf{E}_{T_0} |h(s, \hat{\eta}_s^{t,y}) - h(s, \eta_s^{t,y})| e^{Q_*(s-t)} ds \\
 &\quad + \gamma \int_t^T \mathbf{E}_{T_0} |\hat{h}(s, \hat{\eta}_s^{t,y}) - h(s, \hat{\eta}_s^{t,y})| e^{Q_*(s-t)} ds.
 \end{aligned}$$

Оценка сверху (10.5) влечет за собой неравенство

$$|h(s, \hat{\eta}_s^{t,y}) - h(s, \eta_s^{t,y})| \leq h_1^* |\hat{\eta}_s^{t,y} - \eta_s^{t,y}|.$$

В силу определений метрики $\tilde{\varrho}_*$ (см. (10.12)) и параметра $\varkappa$ (см. (4.2)) мы получаем

$$\begin{aligned}
 \tilde{\varrho}_*(\hat{h}, h) &\leq \frac{(1 + \tilde{T}) \tilde{T} Q_1^*}{|\alpha_1|} \sup_{(t,y) \in \mathcal{K}} \left(\frac{\tilde{m}(y)}{\iota_0 + |y|} e^{(Q_* - \varkappa)(T-t)} \right) |\hat{\alpha} - \alpha| \\
 &\quad + \gamma \sup_{(t,y) \in \mathcal{K}} \int_t^T h_1^* \mathbf{E}_{T_0} |\hat{\eta}_s^{t,y} - \eta_s^{t,y}| e^{(Q_* - \varkappa)(T-t)} ds \\
 &\quad + \gamma \sup_{(t,y) \in \mathcal{K}} \int_t^T \mathbf{E}_{T_0} \frac{|\hat{h}(s, \hat{\eta}_s^{t,y}) - h(s, \hat{\eta}_s^{t,y})| e^{-\varkappa(T-s)}}{\iota_0 + |\hat{\eta}_s^{t,y}|} \\
 &\quad \quad \times \frac{\iota_0 + |\hat{\eta}_s^{t,y}|}{\iota_0 + |y|} e^{(Q_* - \varkappa)(s-t)} ds.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \tilde{\varrho}_*(\hat{h}, h) &\leq \Upsilon^* |\hat{\alpha} - \alpha| + \gamma \tilde{\varrho}_*(\hat{h}, h) \sup_{(t,y) \in \mathcal{K}} \int_t^T \frac{\iota_0 + \mathbf{E}_{T_0} |\hat{\eta}_s^{t,y}|}{\iota_0 + |y|} e^{(Q_* - \varkappa)(s-t)} ds \\
 &\leq \Upsilon^* |\hat{\alpha} - \alpha| + \gamma \tilde{\varrho}_*(\hat{h}, h) \sup_{(t,y) \in \mathcal{K}} \left(\frac{\iota_0 + \tilde{m}(y)}{\iota_0 + |y|} \int_t^T e^{(Q_* - \varkappa)(s-t)} ds \right) \\
 &\leq \Upsilon^* |\hat{\alpha} - \alpha| + \frac{2\gamma}{\varkappa - Q_*} \tilde{\varrho}_*(\hat{h}, h),
 \end{aligned}$$

где $\Upsilon^* = (2Q_1^* \tilde{T} + \gamma h_1^*) \tilde{T} / |\alpha_1|$. Следовательно,

$$\tilde{\varrho}_*(\hat{h}, h) \leq \frac{\varkappa - Q_*}{\varkappa - Q_* - 2\gamma} \Upsilon^* |\bar{\alpha}|.$$

Учитывая, что $\varkappa = Q_* + \zeta_0 + 2\gamma + 1$, получаем (10.13). Предложение 10.1 доказано.

Рассмотрим случай, когда оба параметра μ и α неизвестны. Следующая лемма дает аналог неравенства (10.9).

Лемма 10.7. *Если параметры μ , α неизвестны, то при любом $0 < T_0 < T$ имеет место оценка*

$$\mathbf{E}_{T_0} |\hat{\mathcal{G}}(t, s, y) - \mathcal{G}(t, s, y)| \leq \gamma \frac{\mu_2 + r + 1}{(1 - \gamma)\sigma_1^2} \tilde{T} e^{Q_*(T-t)} \varpi + \tilde{T} Q_1^* e^{Q_*(T-t)} \frac{\tilde{m}(y)}{|\alpha_1|} |\bar{\alpha}|, \quad (10.14)$$

где $\varpi = |\hat{\mu} - \mu| + |\hat{\mu} - \mu|^2$.

Доказательство. Сначала напомним, что функция Q определена в (3.4). Мы можем получить следующую верхнюю границу:

$$\hat{Q}(z) - Q(z) = \frac{\gamma(\hat{\theta}^2(z) - \theta^2(z))}{2(1 - \gamma)} \leq \frac{\gamma(\mu_2 + r + 1)}{(1 - \gamma)\sigma_1^2} \varpi.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |\hat{\mathcal{G}}(t, s, y) - \mathcal{G}(t, s, y)| &\leq \left| \exp \left\{ \int_t^s \hat{Q}(\hat{\eta}_u^{t,y}) du \right\} - \exp \left\{ \int_t^s Q(\hat{\eta}_u^{t,y}) du \right\} \right| \\ &\quad + e^{Q_*(T-t)} \left| \int_t^s Q(\hat{\eta}_u^{t,y}) du - \int_t^s Q(\eta_u^{t,y}) du \right| \\ &\leq \tilde{T} e^{Q_*(T-t)} \frac{\gamma(\mu_2 + r + 1)}{(1 - \gamma)\sigma_1^2} \varpi \\ &\quad + Q_1^* e^{Q_*(T-t)} \int_t^T |\hat{\eta}_u^{t,y} - \eta_u^{t,y}| du. \end{aligned}$$

С помощью (10.8) мы получаем (10.14). Лемма 10.7 доказана.

Следующее предложение — это аналог предложения 10.1. Разница в том, что в предложении ниже оба параметра μ и α неизвестны.

Предложение 10.2. *Для неизвестных параметров μ , α и любых $0 < T_0 < T$ имеет место оценка*

$$\tilde{\varrho}_*(\hat{h}, h) \leq \mathbf{h}_1 |\bar{\alpha}| + \mathbf{h}_2 \varpi,$$

где метрика $\tilde{\varrho}_*$ определена в (10.12), а константы $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$ определены в (8.9) и (8.20) соответственно.

Доказательство. Мы рассуждаем так же, как при доказательстве предложения 10.1, и используем оценку для $\mathbf{E}_{T_0} |\hat{\mathcal{G}}(t, T, y) - \mathcal{G}(t, T, y)|$ из леммы 10.7.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Berdjane B., Pergamenshchikov S.* Optimal consumption and investment for markets with random coefficients. — *Finance Stoch.*, 2013, v. 17, № 2, p. 419–446.
2. *Castañeda-Leyva N., Hernández-Hernández D.* Optimal consumption-investment problems in incomplete markets with stochastic coefficients. — *SIAM J. Control Optim.*, 2005, v. 44, № 4, p. 1322–1344.
3. *Delarue F.* On the existence and uniqueness of solutions to FBSDEs in a non-degenerate case. — *Stochastic Process. Appl.*, 2002, v. 99, № 2, p. 209–286.
4. *Delong L., Klüppelberg C.* Optimal investment and consumption in a Black–Scholes market with Lévy-driven stochastic coefficients. — *Ann. Appl. Probab.*, 2008, v. 18, № 3, p. 879–908.
5. *Fleming W., Hernández-Hernández D.* An optimal consumption model with stochastic volatility. — *Finance Stoch.*, 2003, v. 7, № 2, p. 245–262.
6. *Fleming W., Rishel R.* Deterministic and Stochastic Optimal Control. Berlin: Springer-Verlag, 1975, 222 p. (Appl. Math., v. 1.)
7. *Fouque J.P., Papanicolaou G., Sircar R.* Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000, 201 p.
8. *Freidlin M. I.* Functional Integration and Partial Differential Equations. Princeton: Princeton Univ. Press, 1985, 545 p. (Ann. Math. Stud., v. 109.)
9. *Hernández-Hernández D., Schied A.* Robust utility maximization in a stochastic factor model. — *Statist. Decisions*, 2006, v. 24, № 1, p. 109–125.
10. *Jackwerth J., Rubinstein M.* Recovering probability distributions from option prices. — *J. Finance*, 1996, v. 51, № 5, p. 1611–1631.
11. *Kabanov Yu. M., Pergamenshchikov S. M.* Two-Scale Stochastic Systems. Asymptotic Analysis and Control. Berlin: Springer-Verlag, 2003, 266 p. (Appl. Math., v. 49.)
12. *Karatzas I., Shreve S. E.* Brownian Motion and Stochastic Calculus. New York: Springer, 1991, 470 p.
13. *Karatzas I., Shreve S. E.* Methods of Mathematical Finance. Berlin: Springer, 1998, 407 p.
14. *Konev V., Pergamenshchikov S.* On truncated sequential estimation of the parameters of diffusion processes. — *Methods of Economical Analysis*. Ed. by S. Aivazian. Moscow: Central Economical and Mathematical Institute of Russian Academy of Science, 1992, p. 3–31.
15. *Korn R.* Optimal Portfolios. Singapore: World Scientific, 1997, 338 p.
16. *Kraft H., Steffensen M.* Portfolio problems stopping at first hitting time with application to default risk. — *Math. Methods Oper. Res.*, 2006, v. 63, № 1, p. 123–150.
17. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967, 736 с.
18. *Liptser R. S., Shiryaev A. N.* Statistics of Random Process. I: General Theory. Berlin: Springer-Verlag, 2001, 427 p.
19. *Liptser R. S., Shiryaev A. N.* Statistics of Random Process. II: Applications. Berlin: Springer-Verlag, 2001, 402 p.
20. *Bardi M., Cesaroni A., Manca L.* Convergence by viscosity methods in multiscale financial models with stochastic volatility. — *SIAM J. Financial Math.*, 2010, v. 1, p. 230–265.
21. *Ma J., Protter P., Yong J.* Solving forward-backward stochastic differential equations explicitly — a four step scheme. — *Probab. Theory Related Fields*, 1994, v. 98, № 3, p. 339–359.
22. *Merton R.* Optimal consumption and portfolio rules in a continuous time model. — *J. Econom. Theory*, 1971, v. 3, № 4, p. 373–413.
23. *Новиков А. А.* Последовательное оценивание параметров диффузионных процессов. (Резюме доклада, сделанного на заседании семинара по теории вероятностей и математической статистике в Математическом институте Академии наук СССР.) — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1971, т. 16, в. 2, с. 394–396.
24. *Pazy A.* Demigroups in Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. New York: Springer, 1983, 279 p. (Appl. Math. Sci., v. 44.)

25. *Pham H.* Smooth solutions to optimal investment models with stochastic volatilities and portfolio constraints. — *Appl. Math. Optim.*, 2002, v. 46, № 1, p. 55–78.
26. *Presman E. L., Sethi S. P.* Risk-aversion behavior in consumption/investment problems. — *Math. Finance*, 1991, v. 1, № 1, p. 100–124.
27. *Rogers L. C. G.* *Optimal Investment*. Berlin: Springer-Verlag, 2013, 156 p. (Springer Briefs Quant. Finance.)
28. *Rubinstein M.* Nonparametric tests of alternative option pricing models using all reported trades and quotes on the 30 most active CBOE option classes from August 23, 1976 through August 31, 1976. — *J. Finance*, 1985, v. 40, № 2, p. 455–480.
29. *Sethi S. P., Taksar M. I., Presman E. L.* Explicit solution of a general consumption/portfolio problem with subsistence consumption and bankruptcy. — *J. Econom. Dynam. Control*, 1992, v. 16, № 3–4, p. 747–768.
30. *Sircar R., Zariphopoulou T.* Bounds and asymptotic approximations for utility prices when volatility is random. — *SIAM J. Control Optim.*, 2005, v. 43, № 4, p. 1328–1353.
31. *Zariphopoulou T.* A solution approach to valuation with unhedgeable risks. — *Finance Stoch.*, 2001, v. 5, № 1, p. 61–82.

Поступила в редакцию
2.III.2015