Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Бобков, Некоторые обобщения результатов Ю. В. Прохорова о неравенствах типа Хинчина для полиномов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, том 45, выпуск 4, 745–748

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp503>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 12:44:30

© 2000 г.

БОБКОВ С. Г.*

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ Ю. В. ПРОХОРОВА О
НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА ХИНЧИНА ДЛЯ ПОЛИНОМОВ¹⁾

Основным результатом статьи можно считать теорему 3, в которой устанавливается справедливость неравенства (2) для полиномов от компонент случайных векторов в пространстве с логарифмически вогнутой плотностью.

Ключевые слова и фразы: неравенства типа Хинчина.

Несколько лет тому назад Ю. В. Прохоров исследовал неравенства типа Хинчина

$$\left(\mathbb{E}|f(\xi)|^2\right)^{1/2} \leq C(d) \mathbb{E}|f(\xi)| \quad (1)$$

в классе полиномов f степени n . В работе [9], используя разложение по полиномам Эрмита, им установлено такое неравенство в случае нормально распределенных случайных величин ξ . В следующей работе [10] с привлечением обобщенных полиномов Лагерра неравенства вида (1) доказаны для случайных величин, имеющих гамма-распределение. Как и собственно результаты, несомненный интерес представляет сам подход к (1), основанный на применении известного неравенства Маркова, связывающего максимальные значения полинома и его производной на конечном интервале. В обоих случаях этот подход позволил получить неравенство (1) с правильным экспоненциальным возрастанием множителей $C(d)$ при растущей степени d . Естественным обобщением этих результатов может служить следующее утверждение, доказанное в [2].

Теорема 1. *Неравенство (1) справедливо в классе всех полиномов f на $\mathbf{R}^n$ степени d от произвольных наборов случайных величин $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, имеющих в совокупности логарифмически вогнутую плотность на $\mathbf{R}^n$, причем с множителем вида $C(d) = C^d$, где C — некоторая универсальная постоянная.*

Напомним, что неотрицательная функция ρ на $\mathbf{R}^n$ называется логарифмически вогнутой, если она удовлетворяет неравенству $\rho((1-t)x + ty) \geq \rho(x)^{1-t} \rho(y)^t$ при всех $x, y \in \mathbf{R}^n$ и $t \in (0, 1)$.

В одномерном случае ($n = 1$) теорему 1 можно легко доказать, если не придавать значения скорости роста множителей $C(d)$ (см. [3]). Однако в данном виде утверждение становится намного более деликатным. Впервые вопрос о сравнимости L^p - и L^1 -норм — для полиномов от нескольких переменных по отношению к равномерному распределению λ_K на выпуклом компактном теле K в $\mathbf{R}^n$ — был поставлен В. Д. Мильманом. Решение этой задачи с использованием параметризации Кноте дано Бургеном [4], получившим оценку для вероятностей больших уклонений $\lambda_K\{|f| \geq t\mathbb{E}|f|\} \leq \exp\{-t^c/d\}$, $t \geq t_0$, где $c \in (0, 1)$ и $t_0 > 0$ — абсолютные постоянные. Эквивалентно, для случайного вектора ξ , равномерно распределенного на K , справедливо неравенство типа Хинчина

$$\left(\mathbb{E}|f(\xi)|^p\right)^{1/p} \leq C(p, d) \mathbb{E}|f(\xi)|, \quad (2)$$

причем с постоянными вида $C(p, d) = (Cpd)^{C^d}$, $C > 1$. Еще ранее М. Л. Громов и В. Д. Мильман рассмотрели линейный случай $d = 1$ [5]. Из частного случая результата Дж. Бургена (если его применить к равномерному распределению на кубе $[-1, 1]^n$ при растущей размерности n) в силу центральной предельной теоремы

* Математический факультет, Сыктывкарский университет, 167001 Сыктывкар, Россия; Department of Mathematics, Bielefeld University, Bielefeld 33501, Germany.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00247.

вытекает неравенство (1) для нормально распределенных случайных величин ξ ; однако с худшим ростом констант $C(d)$ по сравнению с результатом Ю. В. Прохорова. Позднее Л. Ловаш и М. Смирновиц [8] ввели так называемый локализационный метод, позволяющий сводить некоторые соотношения между многомерными интегралами к одномерным (в связи с изопериметрическими задачами на сфере близкие идеи были ранее развиты в [6], см. также [1]). В развитие этого метода Р. Каннан, Л. Ловаш и М. Смирновиц доказали, в частности, одну важную теорему ([7, теорема 2.7]), из которой вытекает следующая

Теорема 2. Пусть $p \geq 1$, $C \geq 1$, и пусть f — непрерывная функция на $\mathbf{R}^n$. Неравенство

$$(E|f(\xi)|^p)^{1/p} \leq CE|f(\xi)|$$

справедливо для всех случайных векторов ξ , имеющих логарифмически вогнутую плотность на $\mathbf{R}^n$, тогда и только тогда, когда оно справедливо для случайных векторов вида $\xi = a + \eta b$, где η — случайная величина со значениями в $[0, 1]$, имеющая плотность $\lambda e^{-\lambda x} / (1 - e^{-\lambda})$, $x \in [0, 1]$ ($a, b \in \mathbf{R}^n$ и $\lambda \in \mathbf{R}$ — произвольные параметры).

Если $f = f(x_1, \dots, x_n)$ — полином степени d от n переменных, и $t \in \mathbf{R}$, то $f(a + tb)$ — полином степени не выше d от одного переменного. Поэтому теорема 2 сводит неравенства (1), (2) к размерности $n = 1$. Более того, при оценивании постоянных множителей $C(p, d)$, выбирая при необходимости подходящий масштаб, можно предполагать, что случайная величина ξ имеет усеченное показательное распределение ν_n с плотностью

$$\frac{d\nu_u(x)}{dx} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-u}} 1_{(0, u)}(x), \quad x \in \mathbf{R}, \quad u > 0$$

(в предельном случае получаем стандартное показательное распределение $\nu_{+\infty} = \nu$ с плотностью e^{-x} , $x > 0$).

Таким образом, теорема 2 существенно упрощает ситуацию. Однако вопрос об экстремальных полиномах и распределениях, определяющих значение оптимальных констант в (2), все еще остается открытым, и требуется привлечение дополнительных средств при изучении асимптотического поведения $C(p, d)$ как функции двух параметров. Как показано в [2], комбинирование подхода Ю. В. Прохорова с теоремой 2 позволяет получить утверждение теоремы 1 (с постоянной $C = e^{11}$). Если применить неравенство (1) последовательно к полиномам $f^2, f^4, \dots, f^{2^k}$, то при $p \geq 2$ мы приходим к неравенству (2) с множителями $C(p, d) = p^{C^d}$, где $C > 1$ — некоторая численная постоянная. В данной заметке мы покажем, как получить более точное утверждение.

Теорема 3. Неравенство (2) справедливо в классе всех полиномов f на $\mathbf{R}^n$ степени d от произвольных случайных векторов ξ , имеющих логарифмически вогнутую плотность на $\mathbf{R}^n$, причем с множителем вида $C(p, d) = (Cp)^d$, где C — некоторая универсальная постоянная.

Отметим, что, как показывает пример полинома $f(x) = x^d$ и случайной величины, имеющей стандартное показательное распределение ν , оптимальная константа в (2) должна удовлетворять неравенству $C(p, d) \geq cp^d/d^{(p-1)/(2p)}$ при некоторой $c > 0$.

Для доказательства теоремы 3 потребуются некоторые приготовления. Мы опираемся на теоремы 1, 2 и используем рассуждения из [10].

Лемма. Пусть случайная величина ξ имеет распределение ν . Для любого полинома f на $\mathbf{R}$ степени $d \geq 1$ и любого $p \geq 1$

$$(E|f(\xi)|^p)^{1/p} \leq (e^{12}p)^d E|f(\xi)|.$$

Доказательство. Обозначим $\|\eta\|_p = (E|\eta|^p)^{1/p}$. В силу теоремы 1, которую мы применяем с $C = e^{11}$, можно предполагать, что $p \geq 2$. По однородности

можно считать, что $\|f(\xi)\|_2^2 = \int_0^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 e^{-x} dx = 1$. Введем полиномы Лагерра

$$L_k(x) = \frac{e^x}{k!} \frac{d^k}{dx^k} (x^k e^{-x}) = \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j \frac{x^j}{j!}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3)$$

Они образуют полную ортонормальную систему в $L^2(\nu)$, причем f допускает представление $f = \sum_{k=0}^d a_k L_k$, где $\sum_{k=0}^d |a_k|^2 = 1$. Следовательно, $|f|^2 \leq \sum_{k=0}^d |L_k|^2$ и

$$\|f(\xi)\|_p^2 = \left\| |f(\xi)|^2 \right\|_{p/2} \leq \sum_{k=0}^d \left\| |L_k(\xi)|^2 \right\|_{p/2} = \sum_{k=0}^d \|L_k(\xi)\|_p^2. \quad (4)$$

Из формулы Стирлинга легко вывести, что $\Gamma(pj+1)^{1/p} \leq p^j \Gamma(j+1)$ для всех $p \geq 2$ и всех целых $j \geq 0$. В силу (3) получаем:

$$\|L_k(\xi)\|_p \leq \sum_{j=0}^k C_k^j \frac{\|\xi^j\|_p}{j!} = \sum_{j=0}^k C_k^j \frac{\Gamma(pj+1)^{1/p}}{j!} \leq \sum_{j=0}^k C_k^j p^j = (p+1)^k.$$

Применяя (4), заключаем, что

$$\|f(\xi)\|_p^2 \leq \sum_{k=0}^d (p+1)^{2k} \leq (d+1)(p+1)^{2d} < (2p)^{2d}, \quad d \geq 2,$$

и $\|f(\xi)\|_p^2 \leq 1 + (p+1)^2 < (2p)^2$ при $d = 1$. Таким образом, $\|f(\xi)\|_p \leq (2p)^d \|f(\xi)\|_2$. Остается применить теорему 1. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. В силу теоремы 2 достаточно установить с некоторой универсальной постоянной C неравенство

$$\left(\mathbf{E} |f(\xi_u)|^p \right)^{1/p} \leq (Cp)^d \mathbf{E} |f(\xi_u)|, \quad p \geq 1, u > 0, \quad (5)$$

где f — произвольный полином степени $d \geq 1$ и ξ_u — случайная величина, имеющая распределение ν_u . Как и ранее, $\|\eta\|_p = (\mathbf{E} |\eta|^p)^{1/p}$ ($1 \leq p \leq +\infty$).

Шаг 1: $0 < u < 24d$. Пусть $x_0 \in [0, u]$ — точка максимума $|f|$ на интервале $[0, u]$. Не умаляя общности $f(x_0) > 0$. По неравенству Маркова имеем

$$\|f'(\xi_u)\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq u} |f'(x)| \leq \frac{2d^2}{u} \max_{0 \leq x \leq u} |f(x)| = \frac{2d^2}{u} \|f(\xi_u)\|_\infty.$$

Следовательно, для всех $x \in [0, u]$

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(x_0) - \|f'(\xi_u)\|_\infty |x - x_0| \\ &\geq f(x_0) - \frac{2d^2}{u} \|f(\xi_u)\|_\infty |x - x_0| = \left(1 - \frac{2d^2}{u} |x - x_0| \right) \|f(\xi_u)\|_\infty. \end{aligned}$$

Поэтому для точек x из интервала $\delta = [x_1, x_2] \equiv [x_0 - u/(4d^2), x_0 + u/(4d^2)] \cap [0, u]$ верна оценка $f(x) \geq \frac{1}{2} \|f(\xi_u)\|_\infty$. Как следствие,

$$\|f(\xi_u)\|_1 \geq \int_\delta f(x) d\nu_u(x) \geq \frac{1}{2} \|f(\xi_u)\|_\infty \nu_u(\delta). \quad (6)$$

Кроме того, так как $x_2 - x_1 \geq u/(4d^2)$, для некоторой точки $x_3 \in [x_1, x_2]$ имеем

$$\nu_u(\delta) = \frac{e^{-x_1} - e^{-x_2}}{1 - e^{-u}} = \frac{x_2 - x_1}{1 - e^{-u}} e^{-x_3} \geq \frac{1}{4d^2} \frac{u}{1 - e^{-u}} e^{-24d} \geq \frac{1}{4d^2} e^{-24d}.$$

Комбинируя с (6), получаем, что $8d^2 e^{24d} \|f(\xi_u)\|_1 \geq \|f(\xi_u)\|_\infty \geq \|f(\xi_u)\|_p$, и (5) легко следует.

Шаг 2: $u \geq 24d$. Пусть ξ — случайная величина, имеющая распределение ν . Применяя неравенство Коши–Буняковского и теорему 1 (снова с $C = e^{11}$), имеем

$$\int_u^\infty |f(x)| e^{-x} dx \leq \|f(\xi)\|_2 \left[\nu(u, +\infty) \right]^{1/2} \leq e^{11d-u/2} \|f(\xi)\|_1 \leq e^{-d} \|f(\xi)\|_1.$$

Поэтому

$$\frac{1}{1-e^{-u}} \int_u^\infty |f(x)| e^{-x} dx \leq \frac{1}{e(1-e^{-24})} \|f(\xi)\|_1 \leq \frac{1}{2} \|f(\xi)\|_1,$$

что эквивалентно неравенству $\mathbf{E}|f(\xi_u)| \geq \frac{1}{2} \mathbf{E}|f(\xi)|$. Наконец, в силу леммы

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|f(\xi_u)|^p &= \frac{1}{1-e^{-u}} \int_0^u |f(x)|^p e^{-x} dx \leq \frac{1}{1-e^{-24}} \int_0^\infty |f(x)|^p e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{1-e^{-24}} \mathbf{E}\|f(\xi)\|^p \leq 2(e^{12}p)^{p^d} (\mathbf{E}|f(\xi)|)^p \leq 2^{p+1}(e^{12}p)^{p^d} (\mathbf{E}|f(\xi_u)|)^p. \end{aligned}$$

Приходим к неравенству (5) с $C = 4e^{12}$. Теорема 3 доказана.

Автор хотел бы выразить искреннюю признательность Ю. В. Прохорову за стимулирующие обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alesker S. Localization technique on the sphere and the Gromov–Milman theorem on the concentration phenomenon on uniformly convex sphere. — Math. Sci. Res. Inst. Publ., 1999, v. 34, p. 17–27.
2. Bobkov S. G. Remarks on the growth of L^p -norms of polynomials. — Geometric Aspects of Functional Analysis (Israel Seminar) (to appear).
3. Бобков С. Г., Гётце Ф. О моментах полиномов. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 3, с. 638–640.
4. Bourgain J. On the distribution of polynomials on high dimensional convex sets. — Lecture Notes in Math., 1991, v. 1469, p. 127–137.
5. Gromov M., Milman V. D. Brunn theorem and a concentration of volume phenomena for symmetric convex bodies. — Geometric Aspects of Functional Analysis (Israel Seminar), v. 12, Tel Aviv University, Israel, 1983–1984.
6. Gromov M., Milman V. D. Generalization of the spherical isoperimetric inequality to uniformly convex Banach spaces. — Compositio Math., 1987, v. 62, p. 263–282.
7. Kannan R., Lovász L., Simonovits M. Isoperimetric problems for convex bodies and localization lemma. — Discrete Comput. Geom., 1995, v. 13, p. 541–559.
8. Lovász L., Simonovits M. Random walks in a convex body and an improved volume algorithm. — Random Structures Algorithms, 1993, v. 4, № 3, p. 359–412.
9. Прохоров Ю. В. О полиномах от нормально распределенных случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1992, т. 37, в. 4, с. 692–694.
10. Прохоров Ю. В. О полиномах от случайных величин, имеющих гамма-распределение. — Теория вероятн. и ее примен., 1993, т. 38, в. 1, с. 198–202.

Поступила в редакцию
24.V.2000

© 2000 г.

БОГУСЛАВСКАЯ Е. В.*

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ДОЛГОСРОЧНЫХ НЕОБРАТИМЫХ ИНВЕСТИЦИЙ В ОДНОЙ ДИФФУЗИОННОЙ МОДЕЛИ

В работе Пиндайка [4] была рассмотрена модель, где главным фактором, вносящим неопределенность, являлся неизвестный заранее требуемый объем инвестиций. В настоящей работе получено точное решение для этой задачи.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 117966 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: elenab@mi.ras.ru