Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Разоньи, Х. Г. Родригес-Вильяреаль, Оптимальное инвестирование при поведенческом критерии в диффузионной модели неполного рынка, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2015, том 60, выпуск 4, 720–739

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp5032>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 12:17:19

© 2015 г.

РАЗОНЫИ М.*,
РОДРИГЕС-ВИЛЬЯРЕАЛЬ Х. Г.**ОПТИМАЛЬНОЕ ИНВЕСТИРОВАНИЕ ПРИ ПОВЕДЕНЧЕСКОМ
КРИТЕРИИ В ДИФфуЗИОННОЙ МОДЕЛИ НЕПОЛНОГО РЫНКА¹⁾

(Перевод Белкиной Т. А.)

Устанавливается существование оптимальной стратегии для поведенческого инвестора в модели неполного рынка с непрерывным временем.

Ключевые слова и фразы: теория кумулятивных перспектив, неполные рынки диффузионного типа, независимость, теорема Крылова.

1. Введение. Наиболее распространенные модели предпочтений инвестора основываются на теории ожидаемой полезности, восходящей к [2], [19]. В соответствии с принципами этой теории инвестор предпочитает случайный доход X доходу Y , если $Eu(X) \geq Eu(Y)$ для некоторой функции полезности $u: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, которая обычно предполагается неубывающей и вогнутой. Позднее возникли другие теории, ставящие новые задачи перед математикой.

В настоящей статье мы обращаемся к теории кумулятивных перспектив (cumulative prospect theory — CPT) [11], [18], где рассматриваются «S-образные» функции u (т.е. выпуклые вплоть до некоторой точки и вогнутые после нее). Кроме того, мы применяем возмущенные вероятностные меры, чтобы вычислить полезность данного состояния относительно (возможно, случайного) показателя G . Заметим, что методы, используются в данной работе, легко переносятся также на другие типы предпочтений, такие как ранговая полезность (rank-dependent utility, [14]) или индексы приемлемости [8].

Теория выбора оптимального портфеля для CPT-предпочтений находится еще только на начальной стадии своего развития. Исследования

*Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Hungarian Academy of Sciences, Budapest, Hungary; e-mail: rasonyi@renyi.mta.hu

**University of Edinburgh, Edinburgh, UK.

¹⁾ Первый автор поддержан «Lendület»-грантом LP2015-6/2015 Венгерской Академии наук. Второй автор благодарит за поддержку грант CONACYT, Мехико, а также Университет Эдинбурга. Часть этой работы была выполнена во время пребывания первого автора в Университете Эдинбурга.

в случае непрерывного времени почти всегда предполагают модель полного рынка [3], [10], [7], [5], [16]. На сегодняшний день изучены только очень специфические типы моделей неполного рынка в непрерывном времени (конечные смеси моделей полного рынка; случай, когда цена является мартингалом относительно физической меры; случай, когда рыночная цена риска детерминирована), см. [17], [15]. В настоящей работе мы делаем шаг вперед и рассматриваем модели неполных рынков диффузионного типа, где доходность от инвестиций зависит от некоторых экономических факторов. Наш основной результат состоит в утверждении (при достаточно слабых предположениях) существования оптимальной стратегии в случае, когда шум, входящий в описание экономических факторов, независим от шума при описании инвестиций, а доходность неотрицательна. Нужно признать, что условие независимости является достаточно сильным условием, исключающим эффект рычага (см. [4]). Но мы можем рассмотреть также модели некоторых специфических типов, где экономический фактор имеет ненулевую корреляцию с инвестициями. Полагаем, что наши результаты откроют новые возможности для дальнейших обобщений.

2. Модель оптимального инвестирования при поведенческом критерии. В этом разделе представлены определения и обозначения, используемые при описании проблемы поведенческого оптимального инвестирования (см. [12], [6]).

К сожалению, большинство имеющихся в литературе методов нахождения оптимального управления связано или с марковской природой проблемы, или с выпуклой двойственностью, и эти методы уже не применимы к решению задач с поведенческими критериями. Поэтому мы будем рассматривать формулировку слабого типа оптимальности по отношению к проблеме оптимального инвестирования (п. 2.1). Введя формулировку проблемы таким образом, что к ней становятся применимы результаты работы [12], мы доказываем существование оптимальной инвестиционной стратегии (п. 2.3).

2.1. Постановка задачи: рынок и предпочтения. Зафиксируем конечный горизонт $T > 0$. Рассмотрим финансовый рынок, состоящий из рискового актива, дисконтированная цена $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$ которого зависит от экономических факторов. Эти факторы описываются d -мерным стохастическим процессом $\{Y_t\}_{0 \leq t \leq T}$. Не вводя пока строгих определений, опишем модель рынка следующими уравнениями:

$$dY_t = \nu_t(Y) dt + \kappa_t(Y) dB_t, \quad Y_0 = y, \quad (1)$$

$$dS_t = \theta_t(Y) S_t dt + \lambda_t(Y) S_t dW_t, \quad S_0 = s > 0, \quad (2)$$

где B, W — независимые стандартные винеровские процессы соответствующих размерностей.

При этом предполагаем также, что существует безрисковый актив с постоянной ценой, равной 1. Более строгое описание модели приводится в п. 2.2. Модель стохастической волатильности является важным примером модели финансового рынка с динамикой, описанной соотношениями (1), (2), см. [9].

Инвестор оперирует рисковым и безрисковым активами, инвестируя долю $\phi_t \in [0, 1]$ своего капитала в рисковый актив в момент t . Тогда динамика капитала инвестора описывается следующим уравнением:

$$dX_t = \phi_t \theta_t(Y) X_t dt + \phi_t \lambda_t(Y) X_t dW_t, \quad X_0 = x, \quad (3)$$

где $x > 0$ — начальный капитал инвестора.

Заемствования и короткие позиции не допускаются, следовательно, ϕ_t — процесс, принимающий значения в $[0, 1]$. Заметим, что в этой модели цена рискового актива не оказывает влияния на экономические факторы. Далее, в разделе 3, мы покажем, что это условие может быть ослаблено.

Нам понадобятся некоторые результаты о замкнутости для распределений процессов Ито (см. [12]), что приводит к необходимости иметь дело со «слабой» постановкой проблемы стохастической оптимальности, при которой лежащее в ее основе вероятностное пространство не является фиксированным.

Сформулируем сначала требования на коэффициенты уравнений (1) и (3). Пусть $C([0, T]; \mathbf{R}^n)$ — пространство непрерывных функций на $[0, T]$ со значениями в $\mathbf{R}^n$.

Обозначим $p_t: C([0, T], \mathbf{R}^d) \rightarrow \mathbf{R}^d$ проекции $p_t(x) = x_t$ и определим σ -алгебры $\mathcal{N}_t = \sigma(\{p_s: s \leq t\})$ и $\mathcal{N} = \sigma(\{p_s: s \leq T\})$.

О п р е д е л е н и е 2.1. ν_t — прогрессивно измеримый процесс со значениями в $\mathbf{R}^d$ на фильтрованном пространстве $(C([0, T]; \mathbf{R}^d), \mathcal{N}_T, \{\mathcal{N}_t\}_{0 \leq t \leq T})$. Будем обозначать этот процесс или $\nu_t(y)$, или $\nu(t, y)$. Аналогично определим коэффициенты θ, λ, κ с теми же свойствами измеримости, что и ν , но со значениями в $\mathbf{R}, \mathbf{R}$ и S_+^d соответственно, где S_+^d обозначает множество вещественных симметрических положительно полуопределенных $(d \times d)$ -матриц.

О п р е д е л е н и е 2.2. Пусть $x > 0, y \in \mathbf{R}^d$ фиксированы. Инвестиционная стратегия π определяется следующим набором:

$$\pi := \left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}, \mathbf{P}, X_t, Y_t, \phi_t, (B_t, W_t) \right),$$

где

(а) $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}, \mathbf{P})$ — полное вероятностное пространство с фильтрацией, удовлетворяющей обычным условиям;

(б) $(B_t, W_t)_{t \geq 0}$ — стандартный $(d + 1)$ -мерный $\mathcal{F}_t$ -согласованный винеровский процесс; при этом W_t — одномерный процесс;

(с) $\phi: \Omega \times [0, T] \rightarrow [0, 1]$ является $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0, T])$ -измеримым и $\mathcal{F}_t$ -согласованным;

(d) X_t, Y_t — заданные на фильтрованном вероятностном пространстве $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0, T])$ -измеримые и $\mathcal{F}_t$ -согласованные процессы такие, что

$$Y_t = y + \int_0^t \nu_s(Y) ds + \int_0^t \kappa_s(Y) dB_s, \quad (4)$$

$$X_t = x + \int_0^t \phi_s \theta_s(Y) X_s ds + \int_0^t \phi_s \lambda_s(Y) X_s dW_s \quad (5)$$

при $t \in [0, T]$.

Другими словами, $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}, \mathbf{P}, X_t, Y_t, (B_t, W_t))$ является слабым решением системы уравнений (1), (3). Процесс ϕ_t представляет собой долю капитала, инвестируемую в рисковый актив, является измеримым и $\mathcal{F}_t$ -согласованным. Мы не рассматриваем процесс определяемый в (2) цены S_t как таковой, так как достаточно иметь дело с управляемым динамическим процессом X_t .

При необходимости будем использовать обозначения X^π, Y^π и т.д., чтобы подчеркнуть, что рассматриваемый объект входит в набор π . Пусть $\Pi = \Pi(x, y)$ обозначает множество всех стратегий.

Предположение 2.1. *Функционал θ неотрицателен, т.е. $\theta(t, y) \geq 0$ для всех $t \in \mathbf{R}_+$ и $y \in C([0, T]; \mathbf{R}^d)$.*

Замечание 2.1. Другими словами, доходность рискового актива должна быть неотрицательной, что является вполне естественным предположением. С другой стороны, как уже упоминалось, условие (b) в определении 2.2 является ограничительным. Это условие исключает «эффект рычага», а именно часто встречающийся феномен рынка, при котором цена акций и его волатильность (положительно) коррелированы. Условие (b) может быть ослаблено (см. раздел 3).

Теперь опишем постановку задачи оптимального инвестирования с позиции СРТ, как предложено в [18]. Будем придерживаться понятий, разработанных в [15] и [6].

Инвестор оценивает стратегии посредством измерения полезности доходов и потерь, что описывается в терминах функций $u_\pm: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$, опорной точки G и функций $w_\pm: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Функции $w_\pm$ вводятся с целью описания искажения восприятия инвестора в «окрестности» его доходов и потерь.

В соответствии с принципами СРТ инвестор использует некоторый показатель (benchmark) для оценки портфеля, моделируемый с помощью вещественнозначной случайной величины G . Величина G зависит от экономических факторов следующим образом. Обозначим F фиксированный детерминированный функционал, $F: C([0, T]; \mathbf{R}^d) \rightarrow \mathbf{R}_+$, являющийся $\mathcal{N}_T$ -измеримым. Так как вероятностное пространство не фиксировано, для каждого $\pi \in \Pi$ определим соответствующую опорную точку

$G^\pi := F(Y^\pi)$. Таким образом, мы предполагаем, что бенчмарк определяется функционалом от экономических факторов. Дальнейшие результаты могут быть легко распространены на несколько более общий случай, когда $G^\pi := F(Y^\pi, B^\pi)$ для некоторого функционала F .

Теперь перейдем к описанию оптимизационной задачи, которую будем рассматривать в дальнейшем. Как и в теории ожидаемой полезности, необходимо максимизировать функцию, зависящую в данном случае от капитала инвестора, от описанных выше элементов $u_\pm$, $w_\pm$ и опорной точки G инвестора. Для любой стратегии $\pi \in \Pi$ определим функционалы

$$V_+(\pi) := \int_0^\infty w_+ \left(\mathbf{P}^\pi \left(u_+((X_T^\pi - G^\pi)_+) > t \right) \right) dt, \quad (6)$$

$$V_-(\pi) := \int_0^\infty w_- \left(\mathbf{P}^\pi \left(u_-((X_T^\pi - G^\pi)_-) > t \right) \right) dt. \quad (7)$$

Проблема оптимального выбора портфеля с позиции СРТ состоит в максимизации следующего функционала качества:

$$V(\pi) := V_+(\pi) - V_-(\pi), \quad (8)$$

который определен, если хотя бы одно из слагаемых конечно. Положим $\Pi' := \{\pi \in \Pi: V_-(\pi) < \infty\}$ и определим

$$V := \sup_{\pi \in \Pi'} V(\pi). \quad (9)$$

Величина V представляет максимальное удовлетворение, достижимое при инвестировании в акции и безрисковый актив при постановке задачи в рамках СРТ. Наша цель состоит в доказательстве того, что при некоторых предположениях существует $\hat{\pi} \in \Pi'$ такое, что $V(\hat{\pi}) = V$.

2.2. Основной результат. Введем следующие предположения (напомним обозначение $y_t^* = \sup_{s \leq t} |y_s|$).

Предположение 2.2. Функционалы $\lambda: [0, T] \times C([0, T]; \mathbf{R}^d) \rightarrow \mathbf{R}$ и $\theta: [0, T] \times C([0, T]; \mathbf{R}^d) \rightarrow \mathbf{R}$ равномерно ограничены.

Функционалы κ и ν удовлетворяют условию линейного роста, т.е. существует константа $K > 0$ такая, что для любых $t \in [0, T]$ и $y \in C([0, T]; \mathbf{R}^d)$

$$\|\kappa_t(y)\| \leq K(1 + |y_t|) \quad \text{и} \quad |\nu_t(y)| \leq K(1 + |y_t|).$$

Более того, для фиксированного $t \geq 0$ и функций $y^n, z \in C([0, T]; \mathbf{R}^d)$ таких, что $(y^n - z)_t^* \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, имеет место сходимость $\kappa_t(y^n) \rightarrow \kappa_t(z)$, и то же выполнено для функционалов λ, θ и ν . Будем называть это свойство коэффициентов непрерывностью по траекториям в каждый момент $t \in [0, T]$.

Предположение 2.3. (Слабое) решение уравнения (4) существует и единственно по распределению.

Предположение 2.4. Функции $u_{\pm}: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ и $w_{\pm}: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ непрерывны и не убывают, $u_{\pm}(0) = 0$, $w_{\pm}(0) = 0$, $w_{\pm}(1) = 1$, причем

$$u_+(x) \leq k_+(x^\alpha + 1) \quad \text{для всех } x \in \mathbf{R}_+, \quad (10)$$

$$w_+(p) \leq g_+ p^\gamma \quad \text{для всех } p \in [0, 1], \quad (11)$$

где $\gamma, \alpha, k_+, g_+ > 0$ – фиксированные константы.

Обозначим $L^p(\Omega, \mathbf{P})$ обычное пространство случайных величин на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, интегрируемых в степени p (p -интегрируемых).

Предположение 2.5. Существует $\psi > 0$ такое, что $G^\pi \in L^\psi(\Omega, \mathbf{P}^\pi)$ для всех $\pi \in \Pi$.

Заметим, что при выполнении предположения 2.3 распределение G^π не зависит от π и, следовательно, предположение 2.5 выполнено тогда и только тогда, когда $G^\pi \in L^\psi(\Omega, \mathbf{P}^\pi)$ для некоторого конкретного π . Положим $\vartheta := \psi/\gamma$.

Чтобы убедиться, что функционал V и оптимизационная задача в (9) определены на непустом множестве, введем следующее предположение на функцию u_- , возмущающую функцию w_- и опорную точку G^π .

Предположение 2.6. Функции w_- , u_- таковы, что для всех $\pi \in \Pi$

$$\int_0^\infty w_-(\mathbf{P}^\pi(u_-(G^\pi) > y)) dy < \infty. \quad (12)$$

Это предположение гарантирует, что множество Π' непусто. Действительно, пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}, \mathbf{P})$ — фильтрованное вероятностное пространство, на котором уравнение (1) имеет решение Y_t . Тогда, полагая $\phi_t := 0$ и $X_t := x$ для всех t , получаем, что

$$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}, \mathbf{P}, x, Y_t, 0, (B_t, W_t))$$

содержится в Π' .

Замечание 2.2. Так как $u_{\pm}$ и $w_{\pm}$ не убывают, то при выполнении предположения 2.6 и в соответствии с приводимым далее замечанием 2.6 имеет место равенство $\Pi' = \Pi$.

Теперь мы можем сформулировать основной результат.

Теорема 2.1. В предположениях 2.1–2.3 задача (9) корректна, т.е. $V < \infty$. Более того, существует оптимальная стратегия $\hat{\pi} \in \Pi'$, доставляющая супремум в (9), т.е. $V = V(\hat{\pi})$.

2.3. Расширение множества управлений. Будем рассматривать «ослабление» проблемы, расширяя класс инвестиционных стратегий, введенных в определении 2.2, и называя это расширение классом вспомогательных управлений. Это ослабление вводится, чтобы гарантировать замкнутость множества распределений процессов $\{(Y^\pi, X^\pi): \pi \in \bar{\Pi}\}$ и $\Pi \subset \bar{\Pi}$.

Коэффициенты процессов (Y_t, X_t) возникают в формулировке мартингальной проблемы для уравнений (4) и (5) как коэффициенты дифференциального оператора (см. определение 2.4 ниже). Чтобы использовать результаты о компактности семейства распределений [12], будем рассматривать «выпуклое расширение» множеств, в которых коэффициенты уравнений (4) и (5) принимают свои значения.

О п р е д е л е н и е 2.3. Обозначим $\mathbf{A}$ множество $S_+^{d+1} \times \mathbf{R}^{d+1}$. Для любой пары непрерывных функций $(x, y) \in C([0, T]; \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d)$ и для любого $t \in [0, T]$ определим

$$A_t(x, y) = \left\{ (a, b) \in \mathbf{A} \mid a = \begin{pmatrix} \kappa \kappa^*(t, y)/2 & 0 \\ 0 & m \lambda^2(t, y) x_t^2/2 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. b = \begin{pmatrix} \nu(t, y) \\ l \theta(t, y) x_t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq m \leq 1, \quad 0 \leq l \leq \sqrt{m} \right\}. \quad (13)$$

З а м е ч а н и е 2.3. Для любой инвестиционной стратегии π , введенной в определении 2.2, если

$$\sigma_t = \begin{pmatrix} \kappa(t, y) & 0 \\ 0 & \phi_t \lambda(t, y) x_t \end{pmatrix}, \quad b_t = \begin{pmatrix} \nu(t, y) \\ \phi_t \theta(t, y) x_t \end{pmatrix},$$

то пара (a_t, b_t) , где $a_t = \sigma_t \sigma_t^*/2$, принадлежит $A_t(x, y)$.

Следующее определение описывает семейство вспомогательных управлений, используемое в дальнейшем в данной работе. Оно подчеркивает тот факт, что мы имеем дело с процессами Ито, коэффициенты которых принадлежат выпуклым множествам $A_t(x, y)$ «измеримым образом», когда t, x и y меняются.

О п р е д е л е н и е 2.4. Определим семейство вспомогательных управлений $\bar{\pi} = \bar{\pi}(x, y)$. А именно, вспомогательное управление $\bar{\pi} \in \bar{\Pi}$ — это набор

$$\bar{\pi} := \left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}, \mathbf{P}, X_t, Y_t, (B_t, W_t) \right),$$

где

(а) $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}, \mathbf{P})$ — полное вероятностное пространство с фильтрацией, удовлетворяющей обычным условиям;

(б) $\xi_t := (B_t, W_t)$ является $\mathbf{R}^{d+1}$ -мерным стандартным $\mathcal{F}_t$ -согласованным винеровским процессом; при этом W_t — одномерный процесс;

(с) существует $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0, T])$ -измеримый $\mathcal{F}_t$ -согласованный процесс со значениями в $\mathbf{A}$ (обозначаемый (a_t, b_t)) такой, что выполнены следующие условия:

(с1) процессы X_t и Y_t являются $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0, T])$ -измеримыми, $\mathcal{F}_t$ -согласованными и такими, что п.н. для всех $t \in [0, T]$

$$\begin{pmatrix} Y_t \\ X_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} + \int_0^t \sqrt{2a_s} d\xi_s + \int_0^t b_s ds; \quad (14)$$

(с2) для почти всех $(\omega, t) \in \Omega \times [0, T]$ выполнено соотношение $(a_t, b_t) \in A_t(X, Y)$.

Будем писать X^π, Y^π , если нужно подчеркнуть, что X, Y являются составляющими $\bar{\pi}$.

Для каждого $\bar{\pi} \in \bar{\Pi}$ можно определить $V_\pm(\bar{\pi})$ так же, как выше, и положить $V(\bar{\pi}) := V_+(\bar{\pi}) - V_-(\bar{\pi})$ для $\bar{\pi} \in \bar{\Pi}' := \{\pi \in \bar{\Pi}: V_-(\pi) < \infty\}$.

З а м е ч а н и е 2.4. Для пары процессов a_t и b_t из $A_t(X, Y)$ можно определить соответствующие вещественнозначные процессы l_t и m_t такие, что $0 \leq m_t \leq 1, 0 \leq l_t \leq \sqrt{m_t}$, полагая

$$l_t := \frac{b_t^{d+1} 1_{\theta_t(t, Y_t) \neq 0}}{X_t \theta_t(t, Y_t)}, \quad m_t := \frac{a_t^{d+1, d+1} 1_{\lambda_t(t, Y_t) \neq 0}}{X_t^2 \lambda^2(t, Y_t)}.$$

Из условий (с1) и (с2) в определении 2.4 и предположения 2.2 следует, что l_t, m_t могут быть выбраны $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0, T])$ -измеримыми и $\mathcal{F}_t$ -согласованными.

Если обозначить

$$\sigma_t = \begin{pmatrix} \kappa(t, Y) & 0 \\ 0 & \sqrt{m_t} \lambda(t, Y) X_t \end{pmatrix}, \quad b_t = \begin{pmatrix} \nu(t, Y) \\ l_t \theta(t, Y) X_t \end{pmatrix},$$

то уравнение (14) может быть переписано в виде следующей системы:

$$Y_t = y + \int_0^t \nu_s(Y) ds + \int_0^t \kappa_s(Y) dB_s, \quad (15)$$

$$X_t = x + \int_0^t l_s \theta_s(Y) X_s ds + \int_0^t \sqrt{m_s} \lambda_s(Y) X_s dW_s. \quad (16)$$

О п р е д е л е н и е 2.5. Пусть $\bar{\pi} \in \bar{\Pi}$ — вспомогательное управление. Будем говорить, что X_t^π — процесс *стоимости портфеля*, если $l_t = \sqrt{m_t}$, т.е.

$$dX_t = \sqrt{m_t} \theta(t, Y) X_t dt + \sqrt{m_t} \lambda(t, Y) X_t dW_t. \quad (17)$$

З а м е ч а н и е 2.5. Если X_t^π — процесс стоимости портфеля, то, положив $\phi_t = \sqrt{m_t}$, получим, что

$$(\Omega^\pi, \mathcal{F}^\pi, \{\mathcal{F}_t^\pi\}_{t \geq 0}, \mathbf{P}^\pi, X_t^\pi, Y_t^\pi, \phi_t, (B_t^\pi, W_t^\pi))$$

принадлежит Π .

З а м е ч а н и е 2.6. Предположим, что задано $\pi \in \bar{\Pi}$, т.е. существуют стандартный $(d+1)$ -мерный винеровский процесс (B, W) на $(\Omega^\pi, \mathcal{F}^\pi, \{\mathcal{F}_t^\pi\}_{t \geq 0}, \mathbf{P}^\pi)$ и процессы $X_t^\pi, Y_t^\pi, m_t^\pi, l_t^\pi$ такие, что выполнены уравнения (15) и (16). Определим непрерывный семимартингал

$$M_t^\pi := \int_0^t \sqrt{m_s^\pi} \lambda_s(Y) dW_s + \int_0^t l_s^\pi \theta_s(Y) ds.$$

Тогда уравнение (16) можно переписать в виде

$$X_t = x + \int_0^t X_s dM_s^\pi. \quad (18)$$

Уравнение (18) имеет единственное сильное решение на заданном вероятностном пространстве, а именно стохастическую экспоненту

$$X_t^\pi = x \exp \left\{ \int_0^t \sqrt{m_s} \lambda_s(Y^\pi) dW_s^\pi + \int_0^t \left[l_s \theta_s(Y^\pi) - \frac{1}{2} m_s \lambda_s^2(Y^\pi) \right] ds \right\}, \quad (19)$$

и этот процесс $\mathbf{P}^\pi$ -п.н. положителен.

2.4. Теорема Крылова и связанные с ней результаты.

Лемма 2.1. Пусть $M = \max\{\|\lambda\|_\infty, \|\theta\|_\infty\}$ и $K > 0$ таково, что

$$|\nu_t(y.)| \vee \|\kappa_t(y.)\| \leq K(1 + |y_t|).$$

Множество $A_t(x., y.)$ выпукло, замкнуто и ограничено, причем граница зависит только от M, K, x_t и y_t .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Символом $|\cdot|$ будем обозначать евклидовы нормы для пространств различных размерностей. Для простоты предположим, что $d = 1$, и обозначим $\zeta_t = (x_t, y_t)$. Заметим, что

$$|(\sigma_t, b_t)| = \left(\kappa_t^2(y.) + m^2 \lambda_t^2(y.) x_t^2 + \nu_t^2(y.) + l^2 \theta_t^2(y.) x_t^2 \right)^{1/2},$$

следовательно,

$$|(\sigma_t, b_t)| \leq K(1 + |y_t|) + M|x_t| + K(1 + |y_t|) + M|x_t| \leq N(1 + |x_t| + |y_t|)$$

при $N = 2K \vee 2M$. Тогда

$$|(\sigma_t, b_t)| \leq N'(1 + |\zeta_t|). \quad (20)$$

Ясно, что такое множество замкнуто. Для фиксированных t , x и y оно ограничено. Действительно, пусть $(a_t, b_t) \in A_t(x, y)$. Тогда

$$\begin{aligned} |(a_t, b_t)| &= \left(\frac{1}{4} (\kappa_t^2(y.))^2 + \frac{1}{4} (m^2 \lambda_t^2(y.) x_t^2)^2 + \nu_t^2(y.) + l^2 \theta_t^2(y.) x_t^2 \right)^{1/2}, \\ |(a_t, b_t)| &\leq \frac{1}{2} K^2 (1 + |y_t|)^2 + \frac{1}{2} M^2 |x_t|^2 + K(1 + |y_t|) + M|x_t| \\ &\leq K_1(1 + |y_t|)^2 + M_1(1 + |x_t|)^2 \end{aligned}$$

при $K_1 = K^2/2 + K$ и $M_1 = M^2/2 \vee 1$, так что

$$|(a_t, b_t)| \leq \mathcal{N}(1 + |\zeta_t|^2),$$

где $\mathcal{N}$ зависит только от K и M . Множество $A_t(x, y)$ также является выпуклым.

Пусть $(\alpha, b), (\gamma, c) \in A_t(x, y)$, тогда при $0 \leq \mu \leq 1$

$$\begin{aligned} \mu(\alpha, b) + (1 - \mu)(\gamma, c) &= \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \kappa_t^2(y.) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} (\mu m + (1 - \mu)n) \lambda_t^2(y.) x_t^2 \end{pmatrix} \right), \\ &\quad \left(\begin{pmatrix} \nu_t(y.) \\ (\mu l + (1 - \mu)p) \theta_t(y.) x_t \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

если $0 \leq m, n \leq 1$, $0 \leq l \leq \sqrt{m}$ и $0 \leq p \leq \sqrt{n}$. Ясно, что

$$\mu l + (1 - \mu)p \leq \sqrt{\mu m + (1 - \mu)n}$$

в силу вогнутости функции квадратного корня. Лемма 2.1 доказана.

З а м е ч а н и е 2.7. Введя новое обозначение, мы можем подытожить утверждение предыдущей леммы следующим образом:

$$\|A_t(x, y)\| := \max \left\{ |(a_t, b_t)| : (a_t, b_t) \in A_t(x, y) \right\} \leq K'(1 + |x_t|^2) \quad (21)$$

для некоторого $K' \geq 0$.

Чтобы рассматривать вопрос (полу)непрерывности относительно семейства множеств, введенного в определениях 2.3 и (13), рассмотрим опорные функции множеств $A_t(x, y)$. Для всех $u \in \mathbf{R}^{(d+1)(d+1)}$, $v \in \mathbf{R}^{d+1}$ и $t \in [0, T]$ обозначим

$$F_t(x, y)(u, v) = \max \left\{ \sum_{i,j} a_{ij} u_{ij} + \sum_j b_j v_j : (a, b) \in A_t(x, y) \right\}. \quad (22)$$

В предположении 2.2 для фиксированных $t \geq 0$ и (u, v) опорная функция $(x, y) \mapsto F_t(x, y)(u, v)$ непрерывна, так как, фиксируя t , мы сужаем

траекторию на $[0, t]$ и, следовательно, максимум берется на компактном множестве по лемме 2.1. В частности, множество $A_t(x, y)$ является полунепрерывным сверху в смысле предположения 3.1, iii) в [12].

Для фиксированных $u, v \in \mathbf{A}$ функция $(t, x, y) \mapsto F_t(x, y)(u, v)$ является борелевской на $[0, T] \times C([0, T]; \mathbf{R}^{d+1})$.

Теперь приведем некоторые оценки моментов, которые будут, в частности, гарантировать плотность семейства распределений $(X^{\bar{\pi}}, Y^{\bar{\pi}})$, $\bar{\pi} \in \bar{\Pi}$, в $C([0, T]; \mathbf{R}^{d+1})$.

Предложение 2.1. Пусть $\zeta_t^{\bar{\pi}} = (Y_t^{\bar{\pi}}, X_t^{\bar{\pi}})$. В предположениях 2.2 и 2.3 для любого $m > 0$

$$\sup_{\bar{\pi} \in \bar{\Pi}} \mathbf{E}_{\bar{\pi}} \left[\sup_{t \leq T} |\zeta_t^{\bar{\pi}}|^m \right] < \infty. \quad (23)$$

Предложение 2.2. В предположениях 2.2 и 2.3 пусть $\bar{\pi} \in \bar{\Pi}$ — вспомогательное управление и $(Y_t^{\bar{\pi}}, X_t^{\bar{\pi}})$ — ассоциированные с ним процессы, удовлетворяющие (15) и (16). Тогда существует не зависящая от $\bar{\pi} \in \bar{\Pi}$ константа $K > 0$ такая, что для любых $\eta > 0$ и $s, t \in [0, T]$

$$\mathbf{E}_{\bar{\pi}} \|\zeta_t^{\bar{\pi}} - \zeta_s^{\bar{\pi}}\|^\eta \leq K |t - s|^{\eta/2}. \quad (24)$$

Стандартное доказательство обоих сформулированных выше утверждений приведено в приложении (раздел 4). Хорошо известный результат о плотности семейства мер на $C([0, T]; \mathbf{R}^{d+1})$ приводит к следующему утверждению, которое может быть получено также методом теоремы 3.2 в [13].

Следствие 2.1. Пусть выполнено предположение 2.2 и $\{\bar{\pi}_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subset \bar{\Pi}$. Последовательность распределений процессов $\zeta^{\bar{\pi}_n}$ на $C([0, T]; \mathbf{R}^{d+1})$ относительно слабо компактна.

Теперь мы переформулируем теорему 3.2 из [12] в нашей постановке, которая будет обеспечивать слабую компактность распределений слабых управлений.

Теорема 2.2. Пусть выполнено предположение 2.2 и $\mathbf{Q}^{\bar{\pi}}$ — распределение $\zeta^{\bar{\pi}}$ на $C([0, T]; \mathbf{R}^{d+1})$. Тогда множество $\{\mathbf{Q}^{\bar{\pi}}: \bar{\pi} \in \bar{\Pi}\}$ слабо компактно по последовательностям: для любой последовательности $\bar{\pi}_n \in \bar{\Pi}$ существуют подпоследовательность $n(m) \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$, и вспомогательное управление $\bar{\pi} \in \bar{\Pi}$ такие, что для любой вещественнозначной ограниченной непрерывной функции $H(x)$ на $C([0, T]; \mathbf{R}^{d+1})$ выполнено соотношение

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{\nu_m} H(\zeta^{\nu_m}) = \mathbf{E}_{\bar{\pi}} H(\zeta^{\bar{\pi}}), \quad (25)$$

где $\nu_m = \pi_{n(m)}$.

Доказательство. Из приведенных выше рассуждений следует, что предположения 3.1, ii), iii) в [12] выполнены в рассматриваемом случае. Выполнения предположения 3.1, i) из [12] (условия линейного роста $\|A_t(X, Y)\|$) не требуется, здесь вместо этого имеется квадратичный рост, см. (21). Но, как показывает следствие 2.1, этого достаточно, чтобы утверждать плотность (и, следовательно, относительно слабую компактность) последовательности $\mathbf{Q}^{\bar{\pi}^n}$ в нашей постановке. Тогда можно проверить, что доказательство теоремы 3.2 в [12] здесь проходит, и тем завершить наше доказательство.

Следующая лемма показывает, что любому вспомогательному управлению $\bar{\pi}$ в смысле определения 2.4 можно поставить в соответствие *инвестиционную стратегию* (в смысле определения 2.2) с большей функцией выигрыша.

Лемма 2.2. Пусть

$$\bar{\pi} = \left(\Omega^{\bar{\pi}}, \mathcal{F}^{\bar{\pi}}, \{\mathcal{F}_t^{\bar{\pi}}\}_{0 \leq t \leq T}, \mathbf{P}^{\bar{\pi}}, (X^{\bar{\pi}}, Y^{\bar{\pi}}), (B^{\bar{\pi}}, W^{\bar{\pi}}) \right) \in \bar{\Pi}.$$

Тогда решение уравнения

$$dY_t = \nu_t(Y)dt + \kappa_t(Y)dB_t, \quad Y_0 = y, \quad (26)$$

$$d\hat{X}_t = \sqrt{m_t}\theta_t(Y)\hat{X}_t dt + \sqrt{m_t}\lambda_t(Y)\hat{X}_t dW_t, \quad X_0 = x, \quad (27)$$

существует на том же фильтрованном вероятностном пространстве и $\hat{X}_T \geq X_T^{\bar{\pi}}$ п.н. Более того, $\{\hat{X}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ — процесс стоимости портфеля.

Доказательство. Определим

$$Z_t := \exp \left(- \int_0^t \left(l_s^{\bar{\pi}} - \sqrt{m_s^{\bar{\pi}}} \right) (X_s^{\bar{\pi}}, Y_s^{\bar{\pi}}) \theta(Y_s^{\bar{\pi}}) ds \right)$$

и положим $\hat{X}_t := Z_t X_t^{\bar{\pi}}$. В соответствии с формулой Ито можно видеть, что $\hat{X}_t$ действительно удовлетворяет (27). Так как по предположению $\theta_t \geq 0$, получаем, что $Z_t \geq 1$, следовательно, $\hat{X}_t \geq X_t^{\bar{\pi}}$ для всех t . Лемма 2.2 доказана.

2.5. Доказательство теоремы 2.1. Пусть $t > 0$. В силу неравенств (11) и (10)

$$w_+ \left(\mathbf{Q}^\pi(u_+((X_T^\pi - G^\pi)_+) > t) \right) \leq g_+ \left[\mathbf{Q}^\pi \left((X_T^\pi - G^\pi)_+^\alpha > \frac{t}{k_+} - 1 \right) \right]^\gamma.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} V_+(\pi) &\leq g_+ \int_0^\infty \left[\mathbf{Q}^\pi \left((X_T^\pi - G^\pi)_+^\alpha > \frac{t}{k_+} - 1 \right) \right]^\gamma dy \\ &= g_+ \left(1 + \int_{k_+}^\infty \left[\mathbf{Q}^\pi \left((X_T^\pi - G^\pi)_+^\alpha > \frac{t}{k_+} - 1 \right) \right]^\gamma dy \right), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & \int_{k_+}^{\infty} \left[\mathbf{Q}^{\pi} \left((X_T^{\pi} - G^{\pi})_+^{\alpha} > \frac{t}{k_+} - 1 \right) \right]^{\gamma} dy \\ & \leq k_+ \int_0^{\infty} \left[\mathbf{Q}^{\pi} ((X_T^{\pi} - G^{\pi})_+^{\alpha} > s) \right]^{\gamma} ds. \end{aligned}$$

Для $s \geq 1$, применяя неравенство Чебышёва и предположение 2.5, получим

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{Q}^{\pi} ((X_T^{\pi} - G^{\pi})_+^{\alpha} > s) \right]^{\gamma} &= \left[\mathbf{Q}^{\pi} ((X_T^{\pi} - G^{\pi})_+^{\alpha\vartheta} > s^{\vartheta}) \right]^{\gamma} \\ &\leq \frac{[\mathbf{E}_{\pi}(X_T^{\pi} - G^{\pi})_+^{\alpha\vartheta}]^{\gamma}}{s^{\vartheta\gamma}} \leq M^{\gamma} \frac{1}{s^{\vartheta\gamma}}, \end{aligned} \quad (29)$$

где $M = \sup_{\pi} \mathbf{E}_{\pi}(X_T^{\pi})_+^{\alpha\vartheta} < \infty$ (заметим, что $G \geq 0$) в соответствии с утверждением 2.1. Заметим также, что $1/s^{\vartheta\gamma}$ интегрируема на $[1, \infty)$.

Следовательно, задача корректна, так как $V(\pi) \leq V_+(\pi)$ для всех $\pi \in \bar{\Pi}'$ и, как было показано, правая часть ограничена сверху величиной, не зависящей от π .

По теореме 2.2 множество распределений $\{\mathbf{Q}^{\pi}\}$, $\pi \in \bar{\Pi}$, процессов $\zeta^{\pi} = (X^{\pi}, Y^{\pi})$ относительно слабо компактно в слабой топологии. Пусть $\{\pi^n\}$ – последовательность управлений $\pi^n \in \bar{\Pi}'$ такая, что

$$V(\pi^n) \rightarrow \sup_{\pi \in \bar{\Pi}'} V(\pi), \quad n \rightarrow \infty. \quad (30)$$

Существует подпоследовательность последовательности $\{\pi^n\}$ (обозначаемая $\{\pi^k\}$) такая, что $\mathbf{Q}^{\pi^k} \Rightarrow \mathbf{Q}^{\pi^*}$ при $k \rightarrow \infty$ и $\pi^* \in \bar{\Pi}$.

По теореме Скорохода существуют вероятностное пространство, которое обозначим $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$, и случайные величины $\tilde{X}^k: (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}}) \rightarrow C([0, T]; \mathbf{R})$ и $\tilde{Y}^k: (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}}) \rightarrow C([0, T]; \mathbf{R}^d)$ такие, что распределение $(\tilde{X}^k, \tilde{Y}^k)$ равно $\mathbf{Q}^{\pi^k}$, а также случайные величины $\tilde{X}: (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}}) \rightarrow C([0, T]; \mathbf{R})$ и $\tilde{Y}: (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}}) \rightarrow C([0, T]; \mathbf{R})$ с распределением, равным $\mathbf{Q}^{\pi^*}$, такие, что $\tilde{X}^k \rightarrow \tilde{X}$, $\tilde{Y}^k \rightarrow \tilde{Y}$ п.н. в равномерной метрике.

По предположению 2.3 величины $\tilde{Y}^k$ и $\tilde{Y}$ имеют одно и то же распределение и $\tilde{Y}^k \rightarrow \tilde{Y}$ по вероятности (и даже почти наверное). По теореме 1 из [1] $F(\tilde{Y}^k) \rightarrow F(\tilde{Y})$ по вероятности.

В силу непрерывности $u_{\pm}$ и проекции $p_T(f) := f(T)$, $f \in C([0, T]; \mathbf{R})$, имеем также, что $u_{\pm}((\tilde{X}_T^k - F(\tilde{Y}^k))_{\pm}) \rightarrow u_{\pm}((\tilde{X}_T - F(\tilde{Y}))_{\pm})$ по вероятности.

Следовательно, обозначив D множество точек разрыва функции распределения $u_{\pm}((\tilde{X}_T - F(\tilde{Y}))_{\pm})$, для любого $y \in \mathbf{R} \setminus D$ получим, что при $k \rightarrow \infty$

$$\mathbf{Q}^{\pi^k} \left(u_{\pm}((\tilde{X}_T^k - F(\tilde{Y}^k))_{\pm}) > y \right) \rightarrow \mathbf{Q}^{\pi^*} \left(u_{\pm}((\tilde{X}_T - F(\tilde{Y}))_{\pm}) > y \right).$$

Так как $w_{\pm}$ непрерывны, также верно, что

$$w_{\pm}\left(\mathbf{Q}^{\pi^k}\left(u_{\pm}((X_T^{\pi^k} - G^{\pi^k})_{\pm}) > y\right)\right) \rightarrow w_{\pm}\left(\mathbf{Q}^{\pi^*}\left(u_{\pm}((X_T^{\pi^*} - G^{\pi^*})_{\pm}) > y\right)\right)$$

для $y \notin D$. По лемме Фату

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} w_{-}\left(\mathbf{Q}^{\pi^*}\left(u_{-}((X_T^{\pi^*} - G^{\pi^*})_{-}) > y\right)\right) dy \\ & \leq \varliminf_k \int_0^{\infty} w_{-}\left(\mathbf{Q}^{\pi^k}\left(u_{-}((X_T^{\pi^k} - G^{\pi^k})_{-}) > y\right)\right) dy, \end{aligned}$$

а из (29), снова в силу леммы Фату, вытекает, что

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} w_{+}\left(\mathbf{Q}^{\pi^*}\left(u_{+}((X_T^{\pi^*} - G^{\pi^*})_{+}) > y\right)\right) dy \\ & \geq \varlimsup_k \int_0^{\infty} w_{+}\left(\mathbf{Q}^{\pi^k}\left(u_{+}((X_T^{\pi^k} - G^{\pi^k})_{+}) > y\right)\right) dy. \end{aligned}$$

Следовательно, $V(\pi^*) = \sup_{\pi \in \bar{\Pi}'} V(\pi)$. Ясно также, что $\pi^* \in \bar{\Pi}'$. Пусть (a_t, b_t) — процесс со значениями в $\mathbf{A}$, ассоциированный с $\pi^* \in \bar{\Pi}$ в соответствии с определением 2.4. По лемме 2.2 существует

$$\pi' = \left(\Omega^{\pi^*}, \mathcal{F}^{\pi^*}, (\mathcal{F}_t^{\pi^*})_{0 \leq t \leq T}, \mathbf{P}^{\pi^*}, X_t^{\pi'}, Y_t^{\pi^*}, (B_t^{\pi^*}, W_t^{\pi^*})\right),$$

который является процессом стоимости портфеля в смысле определения 2.5 и для которого

$$u_{+}((X_T^{\pi'} - G^{\pi'})_{+}) \geq u_{+}((X_T^{\pi^*} - G^{\pi^*})_{+});$$

заметим, что $G^{\pi'} = G^{\pi^*}$ и $u_{-}((X_T^{\pi^*} - G^{\pi^*})_{-}) \geq u_{-}((X_T^{\pi'} - G^{\pi'})_{-})$. Следовательно, $V(\pi') \geq \sup_{\pi \in \bar{\Pi}'} V(\pi)$. Таким образом, с учетом замечания 2.5, инвестиционная стратегия

$$\hat{\pi} = \left(\Omega^{\pi^*}, \mathcal{F}^{\pi^*}, \mathbf{P}^{\pi^*}, \{\mathcal{F}_t^{\pi^*}\}_{0 \leq t \leq T}, X_t^{\pi'}, Y_t^{\pi^*}, \sqrt{m_t^{\pi'}}, (B_t^{\pi^*}, W_t^{\pi^*})\right)$$

оптимальна, т.е. $\sup_{\pi \in \Pi'} V(\pi) \leq V(\pi^*) \leq V(\pi') = V(\hat{\pi})$ и, очевидно, $\hat{\pi} \in \Pi'$. Теорема 2.1 доказана.

3. Некоторые обобщения. Основываясь на экономических предпосылках, обобщим модель, рассмотренную в разделе 2, предполагая, что моделируемый процессом Y_t фактор влияния на процесс стоимости портфеля будет «аддитивным». Это может быть подходящей моделью, например, для крупного инвестора. Более того, включим безрисковый актив с детерминированной доходностью r_t в момент t . Для простоты будем предполагать, что процесс Y одномерный; на многомерный случай результат может быть легко распространен тривиальным образом.

О п р е д е л е н и е 3.1. ν_t — прогрессивно измеримый процесс со значениями в $\mathbf{R}$ на фильтрованном пространстве

$$(C([0, T]; \mathbf{R}^d), \mathcal{N}_T, \{\mathcal{N}_t\}_{0 \leq t \leq T}).$$

Аналогично определим коэффициенты $\theta, \lambda, \rho, \kappa$ со значениями в $\mathbf{R}$, обладающие такими же свойствами измеримости.

В этом случае стохастические дифференциальные уравнения модели оптимального инвестирования задаются следующим образом:

$$dY_t = \nu(t, Y_t) dt + \kappa(t, Y_t) dB_t + \rho(t, X_t) dX_t, \quad (31)$$

$$dX_t = \phi_t \theta(t, Y_t) X_t dt + \phi_t \lambda(t, Y_t) X_t dW_t + (1 - \phi_t) r_t X_t dt, \quad (32)$$

где $\phi_t \in [0, 1]$ представляет собой долю капитала, инвестируемую в акции, Y — экономический фактор, X — процесс стоимости портфеля при заданной стратегии ϕ . Множество Π может быть задано аналогично тому, как это сделано в определении 2.2.

П р е д п о л о ж е н и е 3.1. Для всех $t \geq 0$ скорость роста цены акций больше, чем доходность облигаций, т.е. для всех t и y .

$$\theta(t, y.) \geq r_t \geq 0 \quad \mathbf{P}^\pi\text{-п.н.} \quad (33)$$

Функционалы θ, λ, ρ ограничены и непрерывны по траекториям в смысле предположения 2.2. Функционалы ν и κ могут удовлетворять условию линейного роста, как и в предположении 2.2.

П р е д п о л о ж е н и е 3.2. Опорная точка G постоянна.

Как и в п. 2.3, рассмотрим расширенную постановку. С этой целью определим $\theta^r(t, y.) = \theta(t, y.) - r_t$. В дальнейшем E обозначает (2×2) -матрицу такую, что $E^{11} = 1$ и $E^{ij} = 0$ в остальных случаях.

О п р е д е л е н и е 3.2. Определим следующее семейство множеств:

$$\begin{aligned} A_t(x., y.) = \left\{ (a, b) \in \mathbf{A} \mid a = \frac{1}{2} \kappa^2(t, y.) E \right. \\ \left. + \frac{1}{2} m \lambda^2(t, y.) x_t^2 \begin{pmatrix} \rho^2(t, x.) & \rho(t, x.) \\ \rho(t, x.) & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \nu(t, y.) \\ 0 \end{pmatrix} \right. \\ \left. + (l x_t \theta^r(t, y.) + r_t x_t) \begin{pmatrix} \rho(t, x.) \\ 1 \end{pmatrix}, 0 \leq m \leq 1, 0 \leq l \leq \sqrt{m} \right\}. \end{aligned}$$

Следующая лемма — ключевая: она позволяет использовать результаты работы [12].

Лемма 3.1. Множество $A_t(x., y.)$ замкнуто, выпукло и ограничено для каждого $(x., y.) \in C([0, T]; \mathbf{R}^2)$ и каждого $t \geq 0$.

Доказательство. Необходимо проверить только выпуклость. Пусть $0 \leq \mu \leq 1$ и $(a, b), (\alpha, \beta) \in A_t(x, y)$, тогда выпуклая линейная комбинация $\mu a + (1 - \mu)\alpha$ равна

$$\frac{1}{2} \kappa^2(t, y) E + \frac{1}{2} (\mu m + (1 - \mu)m') \lambda^2(t, y) x_t^2 \begin{pmatrix} \rho^2(t, x) & \rho(t, x) \\ \rho(t, x) & 1 \end{pmatrix},$$

а $\mu b + (1 - \mu)\beta$ равна

$$\begin{pmatrix} \nu(t, y) \\ 0 \end{pmatrix} + ((\lambda l + (1 - \lambda)l') x_t \theta^r(t, y) + r_t x_t) \begin{pmatrix} \rho(t, x) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $\mu l + (1 - \mu)l' \leq \mu \sqrt{m} + (1 - \mu)\sqrt{m'} \leq \sqrt{\mu m + (1 - \mu)m'}$, то $\mu(a, b) + (1 - \mu)(\alpha, \beta) \in A_t(x, y)$. Лемма 3.1 доказана.

Оценки леммы 2.1 здесь также применимы, т.е. для некоторой константы $K > 0$

$$\|A_t(x, y)\| \leq K(1 + |x|^2).$$

Это позволяет применить, как и выше, результаты работы [12], используя класс определенных ниже «слабых» управлений.

Определение 3.3. Будем говорить, что $\bar{\pi} \in \bar{\Pi}$, если

$$\bar{\pi} := (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}, \mathbf{P}, X_t, Y_t, (B_t, W_t)),$$

где

(а) $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}, \mathbf{P})$ — полное вероятностное пространство с фильтрацией, удовлетворяющей обычным условиям;

(б) двумерный процесс $\xi_t := (B_t, W_t)$ — это двумерный стандартный $\mathcal{F}_t$ -согласованный винеровский процесс; при этом W_t — одномерный процесс;

(с) существует $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0, T])$ -измеримый $\mathcal{F}_t$ -согласованный процесс со значениями в $\mathbf{A}$, обозначаемый (a_t, b_t) , такой, что

$$\begin{pmatrix} Y_t \\ X_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} + \int_0^t \sqrt{2a_s} d\xi_s + \int_0^t b_s ds; \quad (34)$$

(d) для почти всех $(\omega, t) \in \Omega \times [0, T]$ выполнено соотношение $(a_t, b_t) \in A_t(X, Y)$ (т.е. пару (m_t, l_t) можно выбрать «измеримым образом»).

Уравнения (4) и (5) могут быть переписаны в векторной форме. Определим

$$\sigma_t := \begin{pmatrix} \kappa(t, y) & \rho(t, x) \sqrt{m_t} x_t \lambda(t, y) \\ 0 & \sqrt{m_t} \lambda(t, y) x_t \end{pmatrix},$$

и снос может быть записан в виде

$$b_t = \begin{pmatrix} \nu(t, y) \\ 0 \end{pmatrix} + (x_t l_t \theta^r(t, y) + x_t r_t) \begin{pmatrix} \rho(t, x) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для заданного слабого управления $\bar{\pi}$ процессы X_t, Y_t являются $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0, T])$ -измеримыми, $\mathcal{F}_t$ -согласованными и для всех $t \in [0, T]$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} dY_t &= \nu(t, Y_t) dt + \kappa(t, Y_t) dB_t + \rho(t, X_t) dX_t, \\ dX_t &= [l_t(\theta(t, Y_t) - r_t)X_t + r_t X_t] dt + \sqrt{m_t} \lambda(t, Y_t) X_t dW_t. \end{aligned}$$

Доказательство следующего результата близко доказательству теоремы 2.1.

Теорема 3.1. Пусть выполнены предположения 2.3, 2.4, 3.1 и 3.2. Задача (9) корректна, и $\Pi' \neq \emptyset$ (тождественно нулевая стратегия принадлежит Π' , где Π' определяется аналогично тому, как это сделано в п. 2.2). Существует $\hat{\pi} \in \Pi'$ такое, что супремум в (9) достигается.

4. Приложение. В этом разделе приводятся доказательства некоторых вспомогательных результатов.

Доказательство утверждения 2.1. Зафиксируем управление $\bar{\pi} \in \bar{\Pi}$, и пусть $\zeta_t = (X_t, Y_t)$ и $\xi_t = (B_t, W_t)$ — соответствующие ему процессы. Пусть $m \geq 2$. Символ $|\cdot|$ будет использоваться для обозначения евклидовой нормы в пространствах различных размерностей. Более того, используя локализацию, мы можем предположить, что процессы ограничены. Тогда

$$|\zeta_t|^m = [(X_t)^2 + |Y_t|^2]^{m/2} \leq 2^{m/2-1} [|X_t|^m + |Y_t|^m], \quad (35)$$

так что будем доказывать отдельные оценки для слагаемых $\sup_{t \leq T} |Y_t|^m$ и $\sup_{t \leq T} |X_t|^m$. Положим $b_s^{(2)} = l_t \theta_t(Y_t) X_t$, $b_s^{(1)} = \nu_t(Y_t)$ и $\sigma_s^{(1)} = (\mathbf{0}', m_t \lambda_t(Y_t) X_t)$, $\sigma_s^{(2)} = (\kappa_t(Y_t), \mathbf{0})$ (здесь $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^{d \times 1}$). Тогда

$$\mathbf{E}_\pi \left[\sup_{t \leq T} |X_t|^m \right] \leq 3^{m-1} \left(|x|^m + \mathbf{E}_\pi \left(\int_0^T |b_s^{(2)}| ds \right)^m + \mathbf{E}_\pi \left[\sup_{t \leq T} \left| \int_0^t \sigma_s^{(2)} d\xi_s \right|^m \right] \right).$$

В силу неравенства Буркхольдера–Дэвиса–Ганди имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\pi \left[\sup_{t \leq T} |X_t|^m \right] &\leq 3^{m-1} \left(|x|^m + \mathbf{E}_\pi \left(\int_0^T |b_s^{(2)}| ds \right)^m \right. \\ &\quad \left. + C_m \mathbf{E}_\pi \left[\left| \int_0^T |\sigma_s^{(2)}|^2 ds \right|^{m/2} \right] \right) \end{aligned}$$

для некоторого $C_m > 0$. Применим неравенство Гёльдера к первому интегралу:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^T |b_s^{(2)}| ds \right)^m &\leq T^{m-1} \int_0^T |b_s^{(2)}|^m ds, \\ \left| \int_0^T |\sigma_s^{(2)}|^2 ds \right|^{m/2} &\leq T^{m/2-1} \int_0^T |\sigma_s^{(2)}|^m ds; \end{aligned}$$

здесь $|\sigma_s^{(2)}|^m = m_t^m |\lambda_t(Y)|^m X_t^m$, $|b_s^{(2)}|^m = l_t^m \theta_t^m(Y) X_t^m$ и

$$\int_0^T |\sigma_s^{(2)}|^m ds \leq \int_0^T \left(|\lambda_s(Y)|^2 X_s^2 m_s^2 + \|\kappa_s(Y)\|^2 \right)^{m/2} ds.$$

В силу (20)

$$\int_0^T |\sigma_s^{(2)}|^m ds \leq 2^{m-1} K^m \mathbf{E}_\pi \left[\int_0^T \left(1 + \sup_{r \leq s} |\zeta_r| \right)^m ds \right],$$

и окончательно мы получаем оценку

$$\mathbf{E}_\pi \left[\sup_{t \leq T} |X_t|^m \right] \leq 3^{m-1} \left(|x|^m + g_1(T) + g_2(T) \mathbf{E}_\pi \left[\int_0^T \sup_{t \leq s} |\zeta_t|^m ds \right] \right), \quad (36)$$

где $g_1(T) = C'_m T^{m/2}$ и $g_2(T) = K'(T^{m/2-1} + T^{m-1})$. Аналогично,

$$\mathbf{E}_\pi \left[\sup_{t \leq T} |Y_t|^m \right] \leq 3^{m-1} \left(|y|^m + h_1(T) + h_2(T) \mathbf{E}_\pi \left[\int_0^T \sup_{t \leq s} |\zeta_t|^m ds \right] \right), \quad (37)$$

где $h_1(T) = C''_m(T^m + T^{m/2})$ и $h_2(T) = K''(T^{m/2-1} + T^{m-1})$.

Обозначим $f(T) = \mathbf{E}[\sup_{t \leq T} |\zeta_t|^m]$; принимая во внимание неравенства (37) и (36), получаем следующее неравенство:

$$f(T) \leq G_1(T) + G_2(T) \int_0^T f(s) ds \quad (38)$$

с подходящими функциями G_1, G_2 . Рассматривая производную функцию $\exp(-\int_0^T G_2(s) ds) \int_0^T f(s) ds$ и условие (38), можно видеть, что

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dT} \left(\exp \left(- \int_0^T G_2(s) ds \right) \int_0^T f(s) ds \right) \\ &= \exp \left(- \int_0^T G_2(s) ds \right) \left(f(T) - G_2(T) \int_0^T f(s) ds \right) \\ &\leq \exp \left(- \int_0^T G_2(s) ds \right) G_1(T); \end{aligned}$$

интегрируя это неравенство:

$$\int_0^T f(s) ds \leq \int_0^T \exp \left(\int_s^T G_2(r) dr \right) G_1(s) ds,$$

получаем из (38) соотношение

$$f(T) \leq G_1(T) + G_2(T) \int_0^T \exp \left(\int_s^T G_2(r) dr \right) G_1(s) ds < \infty.$$

В общем случае следует воспользоваться локализацией и применить теорему о монотонной сходимости. В случае $0 < m < 2$ результат вытекает из свойства монотонности норм. Утверждение 2.1 доказано.

Доказательство утверждения 2.2. Как и в случае утверждения 2.1, достаточно доказать оценку, аналогичную (24), для каждой из координат X_t и Y_t . А именно, докажем, что

$$\mathbf{E}_{\bar{\pi}}|Y_t - Y_s|^\eta \leq K_1|t - s|^{\eta/2} \quad \text{и} \quad \mathbf{E}_{\bar{\pi}}|X_t - X_s|^\eta \leq K_2|t - s|^{\eta/2}. \quad (39)$$

По предположению 2.2 неравенства ниже являются простыми следствиями неравенства Буркхольдера–Дэвиса–Ганди и хорошо известных оценок:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\bar{\pi}}|Y_t - Y_s|^\eta &\leq 2^{\eta-1} \left(\mathbf{E}_{\bar{\pi}} \left(\int_s^t |\nu_r(Y)| dr \right)^\eta \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{E}_{\bar{\pi}} \left(\sup_{s \leq u \leq t} \left| \int_s^u \kappa_r(Y) dB_r \right|^\eta \right) \right), \\ &\leq 2^{\eta-1} \left(M^\eta |t - s|^\eta + C_\eta \mathbf{E}_{\bar{\pi}} \left(\int_s^t \|\kappa_r(Y)\|^2 dr \right)^{\eta/2} \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathbf{E}_{\bar{\pi}}|Y_t - Y_s|^\eta \leq 2^{\eta-1} (M^\eta T^{\eta/2} + C_\eta M^\eta) |t - s|^{\eta/2}.$$

Вторая оценка опирается на утверждение 2.1:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\bar{\pi}}|X_t - X_s|^\eta &\leq 2^{\eta-1} \left(\mathbf{E}_{\bar{\pi}} \left(\int_s^t |l_r \theta_r(Y) X_r| dr \right)^\eta \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{E}_{\bar{\pi}} \left(\sup_{s \leq u \leq t} \left| \int_s^r \lambda_r(Y) \sqrt{m_r} X_r dW_r \right|^\eta \right) \right), \\ &\leq 2^{\eta-1} M^\eta \left(\mathbf{E}_{\bar{\pi}} \left(\int_s^t |X_r| dr \right)^\eta + C_\eta \mathbf{E}_{\bar{\pi}} \left(\left| \int_s^t X_r^2 dr \right|^{\eta/2} \right) \right), \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathbf{E}_{\bar{\pi}}|X_t - X_s|^\eta \leq 2^{\eta-1} M^\eta \left((t-s)^\eta \mathcal{N}(\eta, T) + (t-s)^{\eta/2} \mathcal{N}(\eta, T) \right) = K_3 |t - s|^{\eta/2},$$

где $K_3 = 2^{\eta-1} M^\eta \mathcal{N}(\eta, T) (T^{\eta/2} + 1)$ и $\mathcal{N}(\eta, T)$ — верхняя оценка величины $\sup_{\bar{\pi} \in \bar{\Pi}} \mathbf{E}_{\bar{\pi}} [\sup_{t \leq T} |X_t|^\eta]$ в утверждении 2.1. Заметим, что ни одна из констант — ни M , ни $\mathcal{N}(\eta, T)$ — не зависит от $\bar{\pi}$. Утверждение 2.2 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Barlow M., Émery M., Knight F., Song S., Yor M.* Autour d'un théorème de Tsirelson sur des filtrations browniennes et non browniennes. — *Lecture Notes in Math.*, 1998, v. 1686, p. 264–305.
2. *Bernoulli D.* Theoriae novae de mensura sortis. — *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 1738, v. V, p. 175–192. English transl.: *Bernoulli D.* Exposition of a new theory on the measurement of risk. — *Econometrica*, 1954, v. 22, p. 23–36.
3. *Berkelaar A.B., Kouwenberg R., Post T.* Optimal portfolio choice under loss aversion. — *Rev. Econ. Stat.*, 2004, v. 86, № 4, p. 973–987.
4. *Black F.* Studies of stock market volatility changes. — *Proc. Amer. Statist. Assoc., Business and Economic Statistics Section*, 1976, p. 177–181.
5. *Campi L., Del Vigna M.* Weak insider trading and behavioral finance. — *SIAM J. Financial Math.*, 2012, v. 3, p. 242–279.
6. *Carassus L., Rásonyi M.* On optimal investment for a behavioral investor in multiperiod incomplete market models. — *Math. Finance*, 2015, v. 25, № 1, p. 115–153.
7. *Carlier G., Dana R.-A.* Optimal demand for contingent claims when agents have law invariant utilities. — *Math. Finance*, 2011, v. 21, № 2, p. 169–201.
8. *Cherny A., Madan D.* New measures for performance evaluation. — *Rev. Financ. Stud.*, 2009, v. 22, № 7, p. 2571–2606.
9. *Fouque J.-P., Papanicolaou G., Sircar R.* *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000, 201 p.
10. *Jin H., Zhou X. Y.* Behavioural portfolio selection in continuous time. — *Math. Finance*, 2008, v. 18, № 3, p. 385–426.
11. *Kahneman D., Tversky A.* Prospect theory: an analysis of decision under risk. — *Econometrica*, 1979, v. 47, p. 263–291.
12. *Krylov N. V.* A supermartingale characterization of sets of stochastic integrals and applications. — *Probab. Theory Related Fields*, 2002, v. 123, № 4, p. 521–552.
13. *Krylov N. V., Liptser R.* On diffusion approximation with discontinuous coefficients. — *Stochastic Process. Appl.*, 2002, v. 102, № 2, p. 235–264.
14. *Quiggin J.* A theory of anticipated utility. — *J. Economic and Behavioral Organization*, 1982, v. 3, p. 323–343.
15. *Rásonyi M., Rodrigues A. M.* Optimal portfolio choice for a behavioural investor in continuous-time markets. — *Ann. Finance*, 2013, v. 9, № 2, p. 291–318.
16. *Reichlin C.* Utility maximization with a given pricing measure when the utility is not necessarily concave. — *Math. Financ. Econ.*, 2013, v. 7, № 4, p. 531–556.
17. *Reichlin C.* Non-concave utility maximization: optimal investment, stability and applications. Ph.D. Thesis. ETH Zürich, 2012 (Diss. ETH № 20749.)
18. *Tversky A., Kahneman D.* Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty. — *J. Risk Uncertainty*, 1992, v. 5, № 4, p. 297–323.
19. *фон Нейман Д.* Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970, 707 с.

Поступила в редакцию
23.XII.2014