Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. А. Белкина, Ю. М. Кабанов, Вязкостные решения интегро-
дифференциальных уравнений для вероятности неразорения,
Теория вероятн. и ее примен., 2015, том 60, выпуск 4, 802–810

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp5036>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 17:59:58

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2015 г.

БЕЛКИНА Т. А.* , КАБАНОВ Ю. М.**

ВЯЗКОСТНЫЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТИ НЕРАЗОРЕНИЯ¹⁾

Рассматривается модель страховой компании, инвестирующей свой резерв в рискованные активы, динамика цен которых описывается экспоненциальным процессом Леви. Показано, что вероятность разорения является вязкостным решением интегродифференциального уравнения второго порядка; для указанного решения доказана теорема единственности.

Ключевые слова и фразы: актуарные модели с инвестированием, вероятность разорения, процессы Леви, интегродифференциальные уравнения, вязкостные решения.

1. Введение. Фундаментальным вопросом актуарной теории риска является проблема нахождения вероятности разорения/неразорения или, по крайней мере, определения ее асимптотического поведения, когда начальный резерв u стремится к бесконечности. В качестве одного из важнейших инструментов для исследования этого вопроса выступают интегродифференциальные уравнения (ИДУ) для вероятности неразорения $\Phi(u)$ как функции начального резерва. В моделях страховых компаний, инвестирующих непрерывно свой резерв (или некоторую его долю) в рискованные активы, обычно это уравнения второго порядка [10], [2], [13], [3] и т.д. Вывод этих уравнений, понимаемых в классическом смысле, предполагает наличие гладкости функции Φ , что бывает достаточно трудно установить без дополнительных предположений. В литературе можно найти различные методы исследования гладкости, как вероятностные ([14], [16], [13]), так и основанные на аналитических подходах ([11], [12], [2]–[4] и т.д.).

В данной работе мы предлагаем понимать ИДУ в вязкостном смысле и показываем при этом для достаточно общей модели, что вероятность неразорения всегда удовлетворяет ему в указанном смысле. Предполагая, что распределение размеров

* ЦЭМИ РАН, Москва, Россия; ВШЭ, Международная лаборатория количественных финансов, Москва, Россия; e-mail: tbel@cemi.rssi.ru

** Laboratoire de Mathématiques, Université de Franche-Comté, Besançon, cedex, France; ВШЭ, Международная лаборатория количественных финансов, Москва, Россия; e-mail: youri.kabanov@univ-fcomte.fr

¹⁾ Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ (договор 14.A12.31.0007); работа Белкиной Т.А. поддержана РФФИ (код проекта 13-01-00784-а).

страховых требований имеет полный носитель на полуоси, мы устанавливаем теорему единственности с помощью подхода, аналогичного используемому в [8]. Представленный результат может быть легко распространен на более общую модель, описываемую двумя независимыми процессами Леви, однако, мы предпочли остаться в рамках классической актуарной модели при описании процесса страхового риска.

2. Описание модели. Следуя [10] и [13], рассмотрим модель страховой компании, инвестирующей свой резерв в рискованные активы, цена которых описывается процессом $S = (S_t)_{t \geq 0}$. Обобщая модель, используемую в упомянутых статьях, где S является геометрическим броуновским движением, будем предполагать, что S — диффузионный процесс со скачками, определяемый стохастической экспонентой $\mathcal{E}(Y)$ процесса Леви

$$Y_t = at + \sigma W_t + \int_0^t \int x(\mu - \nu)(ds, dx), \quad (2.1)$$

где $a \in \mathbf{R}$, $\sigma \in \mathbf{R}_+$, W — стандартный винеровский процесс и $\mu(ds, dx)$ — пуассоновская случайная мера с компенсатором $\nu(ds, dx) = \Pi(dx) ds$, таким, что мера $\Pi(dx)$ сосредоточена на $(-1, \infty)$; последнее условие обеспечивает строгую положительность процесса S . Будем предполагать, что

$$\int (|x|^2 \wedge |x|) \Pi(dx) < \infty; \quad (2.2)$$

это предположение позволит нам описать стохастический интеграл по центрированной пуассоновской случайной мере следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int z(\mu - \nu)(ds, dx) &:= \int_0^t \int_{\{|x| \leq 1\}} x(\mu - \nu)(ds, dx) \\ &+ \int_0^t \int_{\{|x| > 1\}} x \mu(ds, dx) - \int_0^t \int_{\{|x| > 1\}} x \nu(ds, dx), \end{aligned}$$

где первый интеграл понимается в среднеквадратическом смысле, в то время как второй и третий — обычные интегралы Лебега, причем сходящиеся (п.н.).

Пусть $p(ds, dx)$ — пуассоновская случайная мера, независимая от Y и имеющая компенсатор $q(ds, dx) = \alpha F(dx) ds$, где $\alpha \geq 0$, и F — вероятностная мера на $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$.

Динамика резерва компании описывается процессом $X = X^u$ вида

$$X_t = u + \int_0^t X_{s-} dY_s + ct - \int_0^t \int x p(ds, dx), \quad t \leq \tau^u, \quad (2.3)$$

где $\tau^u := \inf\{t: X_t^u \leq 0\}$ — момент первого выхода из интервала $(0, \infty)$, интерпретируемый как момент разорения. В актуарной литературе процесс, заданный вторым интегралом в последней формуле, обычно представляется в более наглядном виде как $\sum_{n=1}^{N_t} \xi_n$, где ξ_n (размеры скачков, или страховых выплат по требованиям) — независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением F , и N — независимый от последовательности ξ_n пуассоновский процесс с интенсивностью α и моментами скачков $T_1, T_2, \dots$ (моменты поступления страховых требований).

Обычно или $c > 0$ и F сосредоточена на $(0, \infty)$ (случай рискованного страхования; «вырожденный» случай $c = 0$ рассматривался в [4]), или $c < 0$ и F сосредоточена на интервале $(-\infty, 0)$ (случай страхования жизни или пенсионного страхования). Заметим, что последний случай может также соответствовать модели эволюции капитала венчурной компании, инвестирующей в исследования и развитие и продающей инновации.

Будем использовать стандартные обозначения: $\Psi(u) = \mathbf{P}(\tau^u < \infty)$ (вероятность разорения) и $\Phi(u) = 1 - \Psi(u)$ (вероятность неразорения). Указанные вероятности как функции аргумента u определены на $\mathbf{R}_+$, принимают значения на отрезке $[0, 1]$, причем Ψ — невозрастающая функция, Φ — неубывающая и $\Phi(u) = 0$ для $u \leq 0$.

3. Интегро-дифференциальное уравнение.

Теорема 3.1. *Функция Φ является вязкостным решением следующего интегро-дифференциального уравнения, определенного на интервале $(0, \infty)$:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma^2 u^2 \Phi''(u) + (au + c) \Phi'(u) + \int [\Phi(u(1+z)) - \Phi(u) - \Phi'(u)uz] \Pi(dz) \\ + \alpha \int [\Phi(u-z) - \Phi(u)] dF(z) = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Существуют различные определения вязкостных решений, основанные на выборе тестовых функций. Обозначим $C_b^2(u)$ множество непрерывных ограниченных функций $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, дважды непрерывно дифференцируемых в классическом смысле в некоторой окрестности точки $u \in (0, \infty)$ и равных нулю на $(-\infty, 0)$. Для $f \in C_b^2(u)$ величина

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(u) := \frac{1}{2} \sigma^2 u^2 f''(u) + (au + c) f'(u) + \int [f(u(1+z)) - f(u) - f'(u)uz] \Pi(dz) \\ + \alpha \int [f(u-z) - f(u)] dF(z) \end{aligned}$$

определена корректно.

Функция $\Phi: (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ называется *вязкостным суперрешением* (3.1), если для любого $u \in (0, \infty)$ и любой функции $f \in C_b^2(u)$, такой, что $\Phi(u) = f(u)$ и $\Phi \geq f$, выполнено неравенство $\mathcal{L}f(u) \leq 0$.

Функция $\Phi: (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ называется *вязкостным субрешением* (3.1), если для любого $u \in (0, \infty)$ и любой функции $f \in C_b^2(u)$, такой, что $\Phi(u) = f(u)$ и $\Phi \leq f$, выполнено неравенство $\mathcal{L}f(u) \geq 0$.

Функция $\Phi: (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ является *вязкостным решением*, если Φ является одновременно вязкостным супер- и субрешением.

Наконец, функция $\Phi \in C^2((0, \infty))$ называется *классическим суперрешением* (3.1), если $\mathcal{L}\Phi \leq 0$ на $(0, \infty)$. Будем добавлять прилагательное *строгое*, если $\mathcal{L}\Phi < 0$ на $(0, \infty)$.

Для удобства продолжим Φ на всю вещественную ось, положив $\Phi = 0$ на $\mathbf{R}_-$.

Лемма 3.1. *Функция Φ является вязкостным суперрешением (3.1).*

Доказательство. Пусть $u \in (0, \infty)$ и функция $f \in C_b^2(u)$ такова, что $\Phi(u) = f(u)$ и $\Phi \geq f$ на интервале $(0, \infty)$. Пусть $h > 0$ и $\varepsilon \in (0, u/2)$ достаточно мало для того, чтобы было выполнено включение $f \in C^2((u - \varepsilon, u + \varepsilon))$.

Определим момент остановки $\tau_h = \tau_h^\varepsilon \leq h$, положив

$$\tau_h := \inf \left\{ t \geq 0: X_t^u \notin [u - \varepsilon, u + \varepsilon] \right\} \wedge h.$$

Используя формулу Ито с учетом уравнения (2.3), определяющего процесс X , получим, что

$$\begin{aligned} \Phi(X_{\tau_h}) \geq f(X_{\tau_h}) &= f(u) + \int_0^{\tau_h} f'(X_{s-}) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^{\tau_h} \sigma^2 X_s^2 f''(X_s) ds \\ &\quad + \sum_{s \leq \tau_h} (f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-}) \Delta X_s) \\ &= f(u) + m_{\tau_h} + \int_0^{\tau_h} \mathcal{L}f(X_{s-}) ds, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} m_t &= \sigma \int_0^t f'(X_{s-}) X_{s-} dW_s + \int_0^t \int [f(X_{s-}(1+z)) - f(X_{s-})] (\mu - \nu)(ds, dz) \\ &\quad + \int_0^t \int [f(X_{s-} - x) - f(X_{s-})] (p - q)(ds, dz). \end{aligned}$$

Процесс $(m_{t \wedge \tau_h})$ является мартингалом, $f(u) = \Phi(u)$ и $\Phi(u) = \mathbf{E} \Phi(X_{\tau_h}^u)$ в силу строго марковского свойства X . Следовательно,

$$\mathbf{E} \int_0^{\tau_h} \mathcal{L} f(X_s) ds \leq 0.$$

Заметим, что $\tau_h = h$, если h достаточно мало (порог, начиная с которого выполнено это равенство, зависит от ω). Используя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, получим, что

$$\mathcal{L} f(u) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \mathbf{E} \int_0^{\tau_h} \mathcal{L} f(X_s) ds \leq 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Функция Φ является вязкостным субрешением (3.1).*

Доказательство. Справедливость данного утверждения устанавливается аналогично доказательству предыдущей леммы с заменой знаков неравенств на противоположные.

Замечание 3.1. Имеет место одно из двух соотношений: или $\Phi \equiv 0$, или $\Phi(\infty) = 1$. Действительно, в силу строго марковского свойства для любых $t, u \geq 0$ выполнено тождество $\Phi(u) = \mathbf{E} \Phi(X_{\tau^u \wedge t})$. Используя лемму Фату и монотонность Φ , получим, что при $t \rightarrow \infty$

$$\Phi(u) = \overline{\lim}_t \mathbf{E} \Phi(X_{\tau^u \wedge t}) \leq \mathbf{E} \overline{\lim}_t \Phi(X_{\tau^u \wedge t}) \leq \mathbf{E} \Phi(X_{\tau^u}) I_{\{\tau^u < \infty\}} + \Phi(\infty) \mathbf{E} I_{\{\tau^u = \infty\}}.$$

По определению первый член в правой части равен нулю, в то время как второй член равен $\Phi(u)\Phi(\infty)$. Окончательное неравенство $\Phi(u) \leq \Phi(u)\Phi(\infty)$ эквивалентно требуемому утверждению.

4. Джеты и тестовые функции. В этом разделе приведем краткие сведения об одномерной версии известного результата, который мы будем использовать в доказательстве теоремы единственности. Для более подробного ознакомления читателю следует обратиться к фундаментальным работам [7] и [9]. Вязкостные решения для интегродифференциальных уравнений были введены в [15]; более поздние результаты можно найти в [6] и [5].

Для $p \in \mathbf{R}$ и $A \in \mathbf{R}$ рассмотрим квадратичную функцию

$$Q_{p,A}(z) := pz + \frac{1}{2} Az^2, \quad z \in \mathbf{R},$$

и определим *суб-* и *суперджет* функции v в точке x :

$$\begin{aligned} J^+ v(x) &:= \{(p, A): v(x+z) \leq v(x) + Q_{p,A}(z) + o(|z|^2)\}, \\ J^- v(x) &:= \{(p, A): v(x+z) \geq v(x) + Q_{p,A}(z) + o(|z|^2)\}, \quad z \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Другими словами, $J^+ v(x)$ (соответственно, $J^- v(x)$) — это семейство коэффициентов квадратичных функций $z \mapsto v(x) + Q_{p,A}(z-x)$, мажорирующих функцию $z \mapsto v(z)$ (соответственно мажорируемых этой функцией) в окрестности точки x с точностью до второго порядка малости и совпадающих с v в этой точке.

В классической теории дифференциальных уравнений понятие вязкостных решений допускает эквивалентную формулировку в терминах супер- и субджетов. Конечно, такая характеристика невозможна для интегро-дифференциальных операторов. Тем не менее, можно построить тестовые функции с полезными свойствами из семиджетов. А именно, непрерывной ограниченной функции v на $\mathbf{R}_+ \setminus \{0\}$ и любому элементу $(p, A) \in J^+ v(x)$ можно сопоставить тестовую функцию, мажорирующую v , как угодно близкую к v в равномерной метрике, совпадающую с v в точке x , гладкую в окрестности x и имеющую в этой точке первую и вторую производные, равные p и A соответственно.

Лемма 4.1. Пусть v — непрерывная ограниченная функция, равная нулю на отрицательной полуоси, $\gamma > 0$ и $(p, A) \in J^+v(x)$, $x > 0$. Тогда существует число $r_0 \in (0, 1)$ и C^2 -функция $R: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ с компактным носителем, такая, что отношение $R(h)/h^2$, $h \neq 0$, ограничено,

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^{-2} R(h) = 0, \quad (4.1)$$

и функция $f_0 \in C_b^2(x)$, определяемая соотношением

$$f_0(x+h) := \left[\left(v(x) + Q_{p,A}(h) + R(h) \right) \vee v(x+h) \right] \wedge (v(x+h) + \gamma), \quad x+h > 0, \quad (4.2)$$

обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} f_0(x+h) &= v(x) + Q_{p,A}(h) + R(h), & |h| < r_0, \\ f_0(x) &= v(x), \quad f'_0(x) = p, \quad f''_0(x) = A, & v \leq f_0 \leq v + \gamma. \end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем $r_0 \in (0, x/2)$. По определению

$$v(x+h) - v(x) - Q_{p,A}(h) \leq |h|^2 \varphi(|h|),$$

где $\varphi(u) \rightarrow 0$ при $u \downarrow 0$. Рассмотрим на $(0, r_0)$ функцию вида

$$\delta(u) := \sup_{\{h: |h| \leq u\}} \frac{1}{|h|^2} (v(x+h) - v(x) - Q_{p,A}(h))^+ \leq \sup_{\{y: 0 \leq y \leq u\}} \varphi^+(y).$$

Очевидно, δ — непрерывная возрастающая функция, и $\delta(u) \rightarrow 0$ при $u \downarrow 0$. Продолжим δ непрерывным образом на $\mathbf{R}_+$, так, что $\delta(u) = 0$ для $u \geq 1$.

Функция

$$\Delta(u) := \frac{2}{3} \int_u^{2u} \int_\eta^{2\eta} \delta(\xi) d\xi d\eta$$

стремится к нулю вместе с первой и второй производными справа при $u \downarrow 0$; $u^2 \delta(u) \leq \Delta(u) \leq u^2 \delta(4u)$. Следовательно, функция $R: h \mapsto \Delta(|h|)$ имеет компактный носитель, дважды непрерывно дифференцируема при $u < r_0$, ее гессиан стремится к нулю при $u \downarrow 0$ и

$$v(x+h) - v(x) - Q_{p,A}(h) \leq |h|^2 \delta(|h|) \leq \Delta(|h|) = R(h), \quad |h| < r_0.$$

Таким образом, функция $y \mapsto v(x) + Q_{p,A}(y-x) + R(y-x)$ мажорирует v при $|y-x| < r_0$. Без ограничения общности, уменьшая r_0 , если это необходимо, мы можем считать, что она мажорируется функцией $v + \gamma$. Тогда утверждение леммы очевидно.

Соответствующее утверждение для $J^-v(x)$ также справедливо при очевидных заменах.

Пусть $0 < r < r'$. Будем говорить, что непрерывное отображение $\xi_{r,r'}: \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$ является (r, r') -урезающей функцией, если $\xi_{r,r'}(x) = 1$ при $|x| \leq r$ и $\xi_{r,r'}(x) = 0$ при $|x| \geq r'$.

Используя урезающие функции, мы можем «улучшать» тестовые функции, делая их равными тестируемым функциям вне как угодно малой окрестности точки x . Действительно, в обозначениях предыдущей леммы для любых достаточно малых r, r' функция $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, заданная формулой

$$f(x+h) := \left(v(x) + Q_{p,A}(h) + R(h) \right) \xi_{r,r'}(h) + v(x+h) \left(1 - \xi_{r,r'}(h) \right), \quad (4.3)$$

будет удовлетворять всем свойствам, требуемым для f_0 .

Основным средством доказательства единственности служит лемма Ишии, см. [7], [9], которую мы сформулируем в ее скалярной версии.

Лемма 4.2. Пусть Φ и $\tilde{\Phi}$ — две непрерывных функции на открытом подмножестве $\mathcal{O} \subseteq \mathbf{R}$. Рассмотрим функцию

$$\Delta_n(x, y) := \Phi(x) - \tilde{\Phi}(y) - \frac{1}{2} n|x - y|, \quad n > 0.$$

Предположим, что Δ_n достигает локального максимума в $(\hat{x}, \hat{y})$. Тогда существуют A и $\tilde{A}$, такие, что

$$(n(\hat{x} - \hat{y}), A) \in \bar{J}^+ \Phi(\hat{x}), \quad (n(\hat{x} - \hat{y}), \tilde{A}) \in \bar{J}^- \tilde{\Phi}(\hat{y})$$

и для всех x и y

$$Ax^2 - \tilde{A}y^2 \leq 3n|x - y|^2. \quad (4.4)$$

Здесь $\bar{J}^+ \Phi$ и $\bar{J}^- \tilde{\Phi}$ — значения многозначных отображений, графики которых являются замыканиями графиков многозначных отображений $J^+ \Phi$ and $J^- \tilde{\Phi}$ соответственно.

Заметим, что для гладких функций требуемое следует непосредственно из необходимых условий локального максимума (при $A = \Phi''(\hat{x})$, $\tilde{A} = \tilde{\Phi}''(\hat{y})$ и с константой 1 вместо 3 в неравенстве, приведенном выше).

5. Теорема единственности.

Теорема 5.1. Предположим, что топологическим носителем меры $F(dz)$ является $\mathbf{R}_+ \setminus \{0\}$. Пусть Φ и $\tilde{\Phi}$ — два непрерывных ограниченных вязкостных решения уравнения (3.1) с граничными условиями $\Phi(+0) = \tilde{\Phi}(+0)$ и $\Phi(\infty) = \tilde{\Phi}(\infty)$. Тогда $\Phi = \tilde{\Phi}$.

Доказательство. Предположим, что $\Phi(u) = \tilde{\Phi}(u) + \varepsilon_0$ для некоторого $u \in (0, \infty)$ и $\varepsilon_0 > 0$. Введем семейство непрерывных функций $\Delta_n: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$, полагая

$$\Delta_n(x, y) := \Phi(x) - \tilde{\Phi}(y) - \frac{1}{2} n|x - y|^2, \quad n \geq 0.$$

Заметим, что $\Delta_n(x, x) = \Delta_0(x, x)$ для всех $x \geq 0$ и $\Delta_0(0, 0) = 0$. Так как Φ и $\tilde{\Phi}$ ограничены и имеют общий предел на бесконечности, функции Δ_n достигают своих максимумов на компактном подмножестве $\{(x, y): \Delta_1(x, y) \geq \varepsilon_0\}$ множества $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$, которые не зависят от n . То есть существуют $(x_n, y_n) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$, такие, что

$$\Delta_n(x_n, y_n) = \bar{\Delta}_n := \sup_{(x, y) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+} \Delta_n(x, y) \geq \bar{\Delta} := \sup_{x \in \mathbf{R}_+} \Delta_0(x, x) > 0.$$

Все (x_n, y_n) принадлежат компактному множеству $\{(x, y): \Delta_1(x, y) \geq \varepsilon_0\}$. Следовательно, последовательность $n|x_n - y_n|^2$ ограничена. Не вводя новые обозначения, продолжим оперировать с подпоследовательностью индексов, для которых (x_n, y_n) сходится к некоторому пределу $(\hat{x}, \hat{x})$. С необходимостью $n|x_n - y_n|^2 \rightarrow 0$ (в противном случае получим, что $\Delta_0(\hat{x}, \hat{x}) > \bar{\Delta}$). Кроме того, как легко видеть, $\bar{\Delta}_n \rightarrow \Delta_0(\hat{x}, \hat{x}) = \bar{\Delta}$. Следовательно, $\hat{x}$ является внутренней точкой $\mathbf{R}_+$, и такими же будут x_n и y_n для достаточно больших n .

В силу леммы Ишии (ее скалярной версии) в применении к функциям Φ и $\tilde{\Phi}$ в точке (x_n, y_n) существуют $A_n, \tilde{A}_n \in \mathbf{R}_+$, удовлетворяющие (4.4), такие, что

$$\begin{aligned} (n(x_n - y_n), A_n) &\in \bar{J}^+ \Phi(x_n), \\ (n(x_n - y_n), \tilde{A}_n) &\in \bar{J}^- \tilde{\Phi}(y_n). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Для большей наглядности предположим сначала, что

$$\begin{aligned} (n(x_n - y_n), A_n) &\in J^+ \Phi(x_n), \\ (n(x_n - y_n), \tilde{A}_n) &\in J^- \tilde{\Phi}(y_n). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Так как Φ является вязкостным субрешением, в силу леммы 4.1 существует функция $f_n \in C_b^2(x_n)$, такая, что $f'_n(x_n) = n(x_n - y_n)$, $f''_n(x_n) = A_n$, $f_n(x_n) = \Phi(x_n)$, $\Phi \leq f_n \leq \Phi + 1/n$ и $f_n(x_n) = \Phi(x_n)$. Так как $\tilde{\Phi}$ является вязкостным суперрешением, получим аналогично, что существует функция $\tilde{f}_n \in C_b^2(y_n)$, такая, что $\tilde{f}'_n(y_n) = n(x_n - y_n)$, $\tilde{f}''_n(y_n) = \tilde{A}_n$, $\tilde{\Phi} - 1/n \leq \tilde{f}_n \leq \tilde{\Phi}$ и $\tilde{f}_n(y_n) = \tilde{\Phi}(y_n)$.

Точнее, мы выберем тестовые функции в соответствии с представлением, приведенном в лемме 4.1, при $\gamma = 1/n$:

$$\begin{aligned} f_n(x_n + h) &:= f_n^0(x_n + h) \xi_{r_n, r'_n}(h) + \Phi(x_n + h) \left(1 - \xi_{r_n, r'_n}(h)\right), & x_n + h \geq 0, \\ \tilde{f}_n(y_n + h) &:= \tilde{f}_n^0(y_n + h) \tilde{\xi}_{\tilde{r}_n, \tilde{r}'_n}(h) + \tilde{\Phi}(y_n + h) \left(1 - \tilde{\xi}_{\tilde{r}_n, \tilde{r}'_n}(h)\right), & y_n + h \geq 0, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} f_n^0(x_n + h) &:= \left[\left(\Phi(x_n) + Q_{p_n, A_n}(h) + R_n(h) \right) \vee \Phi_n(x_n + h) \right] \wedge \left[\Phi(x_n + h) + \frac{1}{n} \right], \\ \tilde{f}_n^0(y_n + h) &:= \left[\left(\tilde{\Phi}(y_n) + Q_{q_n, \tilde{A}_n}(h) - \tilde{R}_n(h) \right) \wedge \tilde{\Phi}_n(y_n + h) \right] \vee \left[\tilde{\Phi}(y_n + h) - \frac{1}{n} \right]. \end{aligned}$$

Возьмем здесь в качестве ξ_{r_n, r'_n} произвольную урезающую функцию, а в качестве $\tilde{\xi}_{\tilde{r}_n, \tilde{r}'_n}(h)$ — урезающую функцию $h \mapsto \xi_{\tilde{r}_n, \tilde{r}'_n}(hx_n/y_n)$, равную единице при $|h| \leq \tilde{r}_n := r_n y_n / x_n$ и нулю при $|h| \geq \tilde{r}'_n := r'_n y_n / x_n$. Заметим, что для всех $z \in \mathbf{R}$

$$\tilde{\xi}_{\tilde{r}_n, \tilde{r}'_n}(y_n z) = \xi_{r_n, r'_n}(x_n z).$$

Выбор параметров r_n и r'_n будет сделан позже.

По определению суб- и суперрешений получаем, что

$$\mathcal{L} f_n(x_n) \geq 0 \geq \mathcal{L} \tilde{f}_n(y_n).$$

Следовательно,

$$b_n := \mathcal{L} f_n(x_n) - \mathcal{L} \tilde{f}_n(y_n) \geq 0. \quad (5.3)$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2} \sigma^2 (A_n x_n^2 - \tilde{A}_n y_n^2) + a n (x_n - y_n)^2 \\ &+ \alpha \int [\Delta_n(x_n - z, y_n - z) - \Delta_n(x_n, y_n)] F(dz) \\ &+ \alpha \int [f_n(x_n - z) - \Phi(x_n - z) - \tilde{f}_n(y_n - z) + \tilde{\Phi}(y_n - z)] F(dz) \\ &+ \mathcal{I}_\Pi(f_n, x_n) - \mathcal{I}_\Pi(\tilde{f}_n, y_n), \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{I}_\Pi(f, x) := \int [f(x + xz) - f(x) - f'(x)xz] \Pi(dz).$$

Третий член в правой части сходится к

$$\alpha \int [\Delta_0(\hat{x} - z, \hat{x} - z) - \Delta_0(\hat{x}, \hat{x})] F(dz) < 0.$$

Мы имеем здесь строгое неравенство, так как подынтегральная функция непрерывна по z и прообраз интервала $(-\Delta, 0)$, определяемый этой функцией, является открытым подмножеством $\mathbf{R}_+$. По предположению, носитель меры $F(dz)$ включает каждое открытое подмножество $\mathbf{R}_+$.

Чтобы получить противоречие с (5.3), осталось проверить, что $\limsup$ других слагаемых меньше или равен нулю. В силу леммы Ишии первое слагаемое в правой части мажорируется константой, умноженной на $n|x_n - y_n|^2$, при этом известно, что

$n|x_n - y_n|^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow 0$. Второе слагаемое сходится к нулю: в соответствии с нашим выбором тестовых функций подынтегральные функции ограничены и сходятся к нулю в каждой точке z . Осталось проверить, что

$$\limsup_n (\mathcal{J}_\Pi(f_n, x_n) - \mathcal{J}_\Pi(\tilde{f}_n, y_n)) \leq 0. \quad (5.4)$$

Зафиксируем $\delta \in]0, 1]$. Положим

$$H_n(z) := [f_n(x_n + x_n z) - f_n(x_n) - f'_n(x_n)x_n z] - [\tilde{f}_n(y_n + y_n z) - \tilde{f}_n(y_n) - \tilde{f}'_n(y_n)y_n z].$$

Возьмем $r_n \in (0, \delta)$ настолько малым, чтобы гарантировать, что при $|h| < r_n$ будут верны следующие представления:

$$\begin{aligned} f_n(x_n + h) &= \Phi(x_n) + n(x_n - y_n)h + \frac{1}{2} A_n h^2 + R_n(h), \\ \tilde{f}_n(y_n + h) &= \tilde{\Phi}(y_n) + n(x_n - y_n)h + \frac{1}{2} \tilde{A}_n h^2 - \tilde{R}_n(h). \end{aligned}$$

Из леммы Ишии следует, что на множестве $\{z: |x_n z| \leq r_n\} \cap \{z: |z| \leq \delta\}$

$$\begin{aligned} H_n(z) &= n(x_n - y_n)^2 z^2 + \frac{1}{2} (A_n x_n^2 - \tilde{A}_n y_n^2) z^2 + R_n(x_n z) + \tilde{R}_n(y_n z) \\ &\leq \frac{5}{2} n(x_n - y_n)^2 z^2 + R_n(x_n z) + \tilde{R}_n(y_n z). \end{aligned}$$

Отношения $R_n(x_n z)/z^2$ и $\tilde{R}_n(y_n z)/z^2$ ограничены и стремятся к нулю при $z \rightarrow 0$. Следовательно, существует $r_n > 0$, такое, что

$$\int_{\{|x_n z| \leq r_n\}} (R_n(x_n z) + \tilde{R}_n(y_n z)) \Pi(dz) \leq \frac{1}{n}.$$

Кроме того, можно выбрать $r'_n > r_n$, такое, что

$$\int_{\{r_n < |x_n z| \leq r'_n\}} H_n(z) \Pi(dz) \leq \frac{1}{n}.$$

На множестве $\{|x_n z| > r'_n\}$

$$f_n(x_n + h) = \Phi(x_n + h), \quad \tilde{f}_n(y_n + h) = \tilde{\Phi}(y_n + h),$$

откуда следует, что на этом множестве

$$H_n(z) = \Delta_n(x_n + x_n z, y_n + y_n z) - \Delta_n(x_n, y_n) + \frac{1}{2} n(x_n - y_n)^2 z^2 \leq \frac{1}{2} n(x_n - y_n)^2 z^2$$

и, значит,

$$\int_{\{r'_n < |x_n z| \leq \delta\}} H_n(z) \Pi(dz) \leq \frac{1}{2} n(x_n - y_n)^2 \int_{\{r'_n < |x_n z| \leq \delta\}} z^2 \Pi(dz).$$

Аналогично, получаем оценку

$$\int_{\{\delta < |x_n z| \leq N\}} H_n(z) \Pi(dz) \leq \frac{1}{2} n(x_n - y_n)^2 \int_{\{\delta < |x_n z| \leq N\}} z^2 \Pi(dz).$$

Так как функции f_n и $\tilde{f}_n$ равномерно ограничены, для любого $\varepsilon > 0$ существует $N = N_\varepsilon > 1$, такое, что для всех n

$$\int_{\{|x_n z| > N\}} [f_n(x_n + x_n z) - f_n(x_n) - \tilde{f}_n(y_n + y_n z) - f_n(y_n)] \Pi(dz) \leq \varepsilon.$$

Кроме того,

$$\int_{\{|x_n z| > N\}} |f'_n(x_n)x_n z + \tilde{f}_n(y_n)y_n z| \Pi(dz) \leq n(x_n - y_n)^2 \int_{\{|x_n z| > N\}} |z| \Pi(dz) \rightarrow 0.$$

С учетом полученных соотношений приходим к неравенству

$$\overline{\lim}_n (\mathcal{J}_\Pi(f_n, x_n) - \mathcal{J}_\Pi(\tilde{f}_n, y_n)) \leq \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, выполнено (5.4).

Модификацию приведенных выше рассуждений для случая, когда

$$(n(x_n - y_n), A_n) \in \overline{J}^+ \Phi(x_n), \quad (n(x_n - y_n), \tilde{A}_n) \in \overline{J}^- \tilde{\Phi}(y_n),$$

мы оставляем читателю. Теорема доказана.

Аналогичное утверждение о единственности верно и для модели, в которой $c < 0$ и топологическим носителем меры $F(dz)$ является $\mathbf{R}_- \setminus \{0\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Asmussen S., Albrecher H.* Ruin Probabilities. Singapore: World Scientific, 2010, 602 p.
2. *Belkina T.* Risky investments for insurers and sufficiency theorems for the survival probability. — Markov Processes Relat. Fields, 2014, v. 20, № 3, p. 505–525.
3. *Белкина Т. А., Конюхова Н. Б., Курочкин С. В.* Сингулярная краевая задача для интегродифференциального уравнения в модели страхования со случайными премиями: анализ и численное решение. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2012, т. 5, № 10, с. 1812–1846.
4. *Belkina T., Konyukhova N., Kurochkin S.* Singular problems for integro-differential equations in dynamic insurance models. Springer Proceedings in Mathematics. Proc. Intern. Conf. on Differential and Difference Equations and Applications (in honour of Prof. Ravi P. Agarwal). New York: Springer, 2013, p. 27–44.
5. *Barles G., Chasseigne E., Imbert C.* The Dirichlet problem for second-order elliptic integro-differential equations. — Indiana Univ. Math. J., 2008, v. 57, № 1, p. 213–246.
6. *Barles G., Imbert C.* Second-order elliptic integro-differential equations: viscosity solutions' theory revisited. — Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non Linéaire, 2008, v. 25, № 3, p. 567–585.
7. *Crandall M., Ishii H., Lions P.-L.* User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. — Bull. Amer. Math. Soc., 1983, v. 277, p. 1–42.
8. *De Vallière D., Kabanov Yu., Lépinette E.* Consumption-investment problem with transaction costs for Lévy-driven price processes. — Finance Stoch., to appear.
9. *Fleming W., Soner H. M.* Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions. Berlin: Springer, 1993, 406 p.
10. *Frolova A., Kabanov Yu., Pergamenshchikov S.* In the insurance business risky investments are dangerous. — Finance Stoch., 2002, v. 6, № 2, p. 227–235.
11. *Gaier J., Grandits P.* Ruin probabilities and investment under interest force in the presence of regularly varying tails. — Scand. Actuar. J., 2004, v. 4, p. 256–278.
12. *Grandits P.* A Karamata-type theorem and ruin probabilities for an insurer investing proportionally in the stock market. — Insurance Math. Econ., 2004, v. 34, № 2, p. 297–305.
13. *Kabanov Yu., Pergamenshchikov S.* In the insurance business risky investments are dangerous: the case of negative risk sums. — Finance Stoch., to appear.
14. *Paulsen J., Gjessing H. K.* Ruin theory with stochastic return on investments. — Adv. Appl. Probab., 1997, v. 29, № 4, p. 965–985.
15. *Soner H. M.* Optimal control of jump-Markov processes and viscosity solutions. — IMA Vols. Math. Appl., 1986, v. 10, p. 501–511.
16. *Wang G., Wu R.* Distributions for the risk process with a stochastic return on investments. — Stoch. Process. Appl., 2001, v. 95, p. 329–341.

Поступила в редакцию
31.III.2015