Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Богуславская, Д. Муравей, Точное решение задачи оптимального инвестирования в модели Хестона, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2015, том 60, выпуск 4, 811–819

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp5037>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:42:18

© 2015 г.

БОГУСЛАВСКАЯ Е. В.^{*}, МУРАВЕЙ Д. Л.^{**}**ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ИНВЕСТИРОВАНИЯ
В МОДЕЛИ ХЕСТОНА¹⁾**

В данной статье рассматривается вариант задачи Мертона со стохастической волатильностью для случая конечного временного горизонта. Известно, что такая задача оптимального управления при некоторых предположениях относительно случайного процесса и функции полезности может быть сведена к линейной параболической краевой задаче. Соответствующее уравнение в частных производных очень редко можно решить аналитически, даже в линейном случае. Полученное нами аналитическое решение пополняет список задач оптимального управления стохастическими процессами, для которых существует точное решение. В настоящей работе мы находим точное решение для задачи оптимального инвестирования в модели Хестона.

Ключевые слова и фразы: оптимальное управление случайными процессами, модель Хестона, функции Уиттекера.

1. Введение. Теория стохастического оптимального управления и ее приложения играют важную роль в финансовой математике, поскольку представляют собой довольно удобный аппарат для анализа таких задач, как оптимальное управление портфелем, оптимальные торговые стратегии и другие. Начиная с основополагающей работы Мертона [12], эта область стремительно развивалась как в направлении усложнения моделей актива [15], [6], так и в направлении более реалистичного моделирования функционирования рынка [10]. Методология данной теории находит применение также в алгоритмической торговле [2] и в микроструктуре рынка [14].

В настоящей заметке рассматривается задача оптимального управления при конечном горизонте случайным процессом, который задан системой стохастических дифференциальных уравнений. В статье [15] показано, что при некоторых предположениях на процесс и функцию полезности решение задачи оптимального управления можно свести к решению краевой задачи для линейного параболического уравнения. В общем же случае необходимо решать нелинейное уравнение в смысле вязкости, так как его решение, как правило, не обладает достаточной гладкостью. Однако даже такое существенное упрощение, как линеаризация задачи, не всегда позволяет проводить качественный и количественный анализ решения, в силу того, что решение параболического уравнения не всегда допускает явный вид. Тем не менее для некоторых используемых в финансовой математике моделей такие формулы можно получить — они представлены в работах [11] и [4]. Данная статья дополняет результаты [11] и [4] — основной полученный результат заключается в точном решении задачи управления в случае, когда исходный процесс отвечает широко используемой в финансовой инженерии модели стохастической волатильности Хестона [7]. Для данной модели аффинные представления, использованные в [11], уже не применимы, поэтому решение ищется методами интегральных преобразований и теории специальных функций.

^{*} Brunel University London, UK; e-mail: elena@boguslavsky.net

^{**} Международная лаборатория количественных финансов, Высшая школа экономики, Москва, Россия; e-mail: dmuravey@hse.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке гранта № 14.A12.31.0007 Правительства РФ. Первый автор поддержан также грантом Daphne Jackson Fellowship, финансируемым EPSRC.

Отметим, что квазианалитические представления решений задач оптимального управления для более общих процессов получены в [6] методами асимптотической теории и теории возмущений.

Изложение работы подчинено следующей логике. Раздел 2 посвящен постановке задачи. В разделе 3 приводится результат Т. Зарифополу о представлении функции Беллмана через решение линейного параболического уравнения и приводится обобщение на случай экспоненциальной полезности. В разделе 4 формулируется и доказывается основной результат работы. Последний раздел посвящен анализу полученного решения.

2. Постановка задачи. Пусть пара $(X, V) = (X_s, V_s)_{s \geq t}$ есть векторный процесс, задаваемый системой стохастических дифференциальных уравнений «треугольной формы»

$$\begin{aligned} \frac{dX}{X} &= \mu ds + \sqrt{V} dB^1, & X_t &= x, \\ dV &= k(\Theta - V) ds + \sigma \sqrt{V} dB^2, & V_t &= v, \end{aligned} \quad (1)$$

где $B^1 = (B_s^1)_{s \geq t}$ и $B^2 = (B_s^2)_{s \geq t}$ — коррелированные броуновские движения с коэффициентом корреляции ρ , т.е. $\langle B^1, B^2 \rangle_s = \rho s$. Таким образом, сначала решается второе уравнение системы для V , а затем определяется процесс X . Модель процесса цены финансового актива (1) называется моделью Хестона [7], а процесс $V = (V_s)_{s \geq t}$ является процессом Феллера, который в финансовой литературе называется процессом Кокса–Ингерсолла–Росса [5]. Для процесса V мы будем предполагать справедливость условия Феллера $2k\Theta > \sigma^2$, при котором процесс V всегда положительный. Рассмотрим управляемый процесс $W = (W_s)_{s \geq t}$, который задается стохастическим дифференциальным уравнением

$$dW = \alpha dX, \quad W_t = w. \quad (2)$$

Управление $\alpha = (\alpha_s)_{s \geq t}$ является предсказуемым процессом относительно фильтрации $\mathcal{F}_{\geq t} = \sigma\{B_s - B_t, s \geq t\}$ и удовлетворяет условию $\int_t^T \alpha_s^2 ds < \infty$. Рассматриваемая в данной работе задача оптимального управления состоит в поиске такого управления на конечном временном горизонте $[t, T]$, на котором достигается максимум функционала $\mathbf{E}U(W_T)$:

$$J(w, x, v, t) = \sup_{\alpha} \mathbf{E}U(W_T). \quad (3)$$

Функция $J(w, x, v, t)$ называется функцией Беллмана, а функция $U(w)$ является степенной или экспоненциальной функцией полезности (для удобства мы будем опускать индексы):

$$U_P(w) = \frac{w^\gamma}{\gamma}, \quad \gamma < 0, \quad U_E(w) = 1 - \frac{e^{-cw}}{c}, \quad c > 0. \quad (4)$$

Указанным процессам и функциям можно дать следующую финансовую интерпретацию: процесс W моделирует динамику суммарного капитала инвестора в каждый момент времени, управление α — позицию в активе X , а функция полезности $U(w)$ — предпочтения инвестора на множестве альтернатив. Соответственно, задача оптимального инвестирования заключается в поиске в момент времени t такой инвестиционной стратегии, чтобы в терминальный момент времени T достигался максимум ожидаемой полезности (3).

Функция $J(w, x, v, t)$ является решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана (в русскоязычной литературе оно чаще называется уравнением Беллмана). В общем случае данное уравнение является нелинейным уравнением в частных производных. Однако при некоторых функциях полезности удается свести это уравнение к линейному. В работе Т. Зарифополу [15] был предложен метод, основанный на технике вязкостных решений, сводящий задачу (3) к линейному параболическому уравнению

и охватывающий модели, где снос и диффузия зависят от процесса V произвольным образом. Однако решение параболического уравнения не всегда допускает явное представление, позволяющее проводить качественный и количественный анализ решения. В некоторых частных случаях такие решения известны [11] для модели типа Хестона и [4] для модели Чако и Викеяры. Оба эти результата основаны на аффинных представлениях решения. Однако подобного рода представления не применимы в исходной модели (1).

В данной заметке предложена техника решения, основанная на преобразовании Лапласа, которая позволяет получить ответ в явном виде через вырожденные гипергеометрические функции.

3. Результат Т. Зарифополу: обзор и обобщения. В работе [15] рассматривалась более общая задача оптимального инвестирования (3) со степенной функцией полезности U_P для процесса цены X , который зависит от случайного процесса V :

$$\begin{aligned}\frac{dX}{X} &= \mu(V, t) dt + \sigma(V, t) dB^1, \\ dV &= b(V, t) dt + a(V, t) dB^2.\end{aligned}\quad (5)$$

Коэффициенты в системе уравнений предполагаются такими, чтобы существовало сильное решение (X, V) .

Теорема 1 (Зарифополу). *Для процесса (5) и степенной функции полезности (4) функция Беллмана (3) допускает представление*

$$J_P(w, x, v, t) = \frac{w^\gamma}{\gamma} f^{1/\delta}(v, t), \quad \delta = 1 + \rho^2 \frac{\gamma}{1 - \gamma}. \quad (6)$$

Функция $f(v, t)$ является решением следующей краевой задачи для уравнения параболического типа:

$$\begin{aligned}f_t + \frac{1}{2} a^2(v, t) f_{vv} + \left[b(v, t) + \rho \frac{\gamma \mu(v, t) a(v, t)}{(1 - \gamma) \sigma(v, t)} \right] f_v + \frac{\gamma}{1 - \gamma} \frac{\delta \mu^2(v, t)}{2 \sigma^2(v, t)} f &= 0, \\ f(v, T) &= 1.\end{aligned}\quad (7)$$

Оптимальный синтез задается формулой

$$\alpha_P^*(w, x, v, t) = \frac{w}{x(1 - \gamma)} \left(\frac{\mu(v, t)}{\sigma^2(v, t)} + \frac{\rho}{\delta} \frac{a(v, t) f_v(v, t)}{\sigma(v, t) f(v, t)} \right). \quad (8)$$

Чтобы получить оптимальное управление в момент времени t , необходимо подставить значения процессов W и (X, V) в (8). Заметим, что структура представления (6) может быть объяснена следующими соображениями. Во-первых, хорошо известно, что при степенной функции полезности функция Беллмана допускает разделение переменных, т.е. $J(w, x, v, t) = u(w)R(x, v, t)$. Во-вторых, из вида коэффициентов и граничного условия следует, что решение не зависит от переменной x . В-третьих, оставшееся после указанных выше операций нелинейное уравнение сводится к линейному заменой $R^\delta(v, t) = f(v, t)$. Наш первый результат — обобщение формул Т. Зарифополу на случай экспоненциальной функции полезности.

Предложение 1. *Для экспоненциальной функции полезности U_E функция Беллмана (3) имеет аналогичный (6) вид*

$$J_E(x, w, v, t) = 1 - \frac{e^{-cw}}{c} f^{1/\delta}(v, t), \quad \delta = 1 - \rho^2. \quad (9)$$

Функция $f(v, t)$ является решением следующей краевой задачи для уравнения параболического типа:

$$\begin{aligned}f_t + \frac{1}{2} a^2(v, t) f_{vv} + \left[b(v, t) - \rho \frac{\mu(v, t) a(v, t)}{\sigma(v, t)} \right] f_v - \frac{\delta \mu^2(v, t)}{2 \sigma^2(v, t)} f &= 0, \\ f(v, T) &= 1.\end{aligned}\quad (10)$$

Оптимальный синтез задается формулой

$$\alpha_E^*(w, x, v, t) = \frac{1}{cx} \left(\frac{\mu(v, t)}{\sigma^2(v, t)} + \frac{\rho}{\delta} \frac{a(v, t)f_v(v, t)}{\sigma(v, t)f(v, t)} \right). \quad (11)$$

Заметим, что константа δ и функция f также могут быть получены предельным переходом $\gamma \rightarrow -\infty$ в формулах (6) и (7) для случая степенной полезности.

4. Основной результат. Вернемся к нашей исходной задаче. Рассмотрим модель Хестона (1). Теорема 1 и предложение 1 позволяют свести краевую задачу для уравнения Беллмана к решению следующей краевой задачи для $f(v, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2 v}{2} f_{vv} + \left(k\Theta - \frac{1-\delta}{\rho} \mu\sigma - kv \right) f_v - \frac{C}{v} f + f_t &= 0, \\ f(v, T) &= 1. \end{aligned} \quad (12)$$

Для случаев степенной и экспоненциальной полезности краевая задача имеет вид (12), где для каждого случая константы δ и C свои:

$$\delta = 1 + \rho^2 \frac{\gamma}{1-\gamma}, \quad C = -\frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{\mu^2}{2} \delta$$

(в случае степенной полезности) и

$$\delta = 1 - \rho^2, \quad C = \frac{\mu^2}{2} \delta$$

(в случае экспоненциальной функции полезности).

Теорема 2. Решением задачи (12) является функция

$$f(v, t) = \frac{\Gamma(\eta - \lambda + 1/2)}{\Gamma(2\eta + 1)} e^{-\Psi(v, t)/2} \Psi^\lambda(v, t) M_{\lambda, \eta}(\Psi(v, t)), \quad (13)$$

где

$$\Psi(v, t) = \frac{2kv}{\sigma^2(e^{k(T-t)} - 1)}, \quad \lambda = -\frac{k\Theta}{\sigma^2} + \frac{(1-\delta)\mu}{\rho\sigma}, \quad \eta = \sqrt{\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2C}{\sigma^2}},$$

$M_{\lambda, \eta}(z)$ — функция Уиттекера, $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера. При этом

$$\frac{f_v}{f} = \frac{\eta + \lambda + 1/2}{v} \frac{M_{1+\lambda, \eta}(\Psi(v, t))}{M_{\lambda, \eta}(\Psi(v, t))}. \quad (14)$$

Доказательство. Сделаем следующие замены переменных в функции f :

$$\tilde{v} = \frac{2kv}{\sigma^2}, \quad k(T-t) = \tilde{\tau}. \quad (15)$$

Тогда f принимает вид

$$f(v, t) = e^{-\lambda\tilde{\tau}} \tilde{v}^{-\lambda} e^{\tilde{v}/2} h(\tilde{v}, \tilde{\tau}),$$

где h является решением следующей краевой задачи:

$$h_{\tilde{v}\tilde{v}} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1/4 - \eta^2}{\tilde{v}^2} \right) h = \frac{1}{\tilde{v}} h_{\tilde{\tau}}, \quad h(\tilde{v}, 0) = \tilde{v}^{-\lambda} e^{-\tilde{v}/2}.$$

Пусть $G(\tilde{v}; \zeta)$ — преобразование Лапласа от функции $h(\tilde{v}, \tilde{\tau})$ по переменной $\tilde{\tau}$:

$$G(\tilde{v}; \zeta) = \int_0^\infty e^{\zeta\tilde{\tau}} h(\tilde{v}, \tilde{\tau}) d\tilde{\tau}.$$

Обозначая $\chi(\tilde{v}) = \tilde{v}^{-1-\lambda} e^{-\tilde{v}/2}$, легко убедиться, что

$$G'' + \left(-\frac{1}{4} - \frac{\zeta}{\tilde{v}} + \frac{1/4 - \eta^2}{\tilde{v}^2} \right) G = -\chi(\tilde{v}). \quad (16)$$

Уравнение (16) с нулевой правой частью является уравнением Уиттекера, линейно независимыми решениями которого являются функции Уиттекера $M_{-\zeta, \eta}(\tilde{v})$ и $W_{-\zeta, \eta}(\tilde{v})$. Непосредственной подстановкой проверяется, что решение уравнения (16) можно представить в виде

$$G(\tilde{v}; \zeta) = \frac{\Gamma(1/2 + \zeta + \eta)}{\Gamma(1 + 2\eta)} \left(M_{-\zeta, \eta}(\tilde{v}) \int_0^{\tilde{v}} \chi(\varphi) W_{-\zeta, \eta}(\varphi) d\varphi + W_{-\zeta, \eta}(\tilde{v}) \int_{\tilde{v}}^{\infty} \chi(\varphi) M_{-\zeta, \eta}(\varphi) d\varphi \right).$$

Соотношение (см. [9, п. 6.669.4])

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(a_1 + a_2)t \cosh x} \coth^{2\nu} \left(\frac{1}{2} x \right) I_{2\mu}(t\sqrt{a_1 a_2} \sinh x) dx \\ &= \frac{\Gamma(1/2 + \mu - \nu)}{t\sqrt{a_1 a_2} \Gamma(1 + 2\mu)} W_{\nu, \mu}(a_1 t) M_{\nu, \mu}(a_2 t), \\ & \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} + \mu - \nu \right) > 0, \quad \operatorname{Re} \mu > 0, \quad a_1 > a_2, \end{aligned}$$

между функциями Уиттекера и модифицированной функцией Бесселя $I_{\nu}(z)$ позволяет нам преобразовать предыдущую формулу к виду

$$\begin{aligned} G(\tilde{v}; \zeta) &= \sqrt{\tilde{v}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi^{-1/2-\lambda} \exp \left\{ -\frac{\varphi}{2} - \frac{\tilde{v} + \varphi}{2} \cosh \psi \right\} \\ &\quad \times \tanh^{2\zeta} \left(\frac{\psi}{2} \right) I_{2\eta} \left(\sqrt{\tilde{v}\varphi} \sinh \psi \right) d\varphi d\psi. \end{aligned}$$

Используя формулу (см. [9, п. 6.643.2])

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{\mu-1/2} e^{-\alpha x} I_{2\nu}(2\beta\sqrt{x}) dx &= \frac{\Gamma(\mu + \nu + 1/2)}{\Gamma(2\nu + 1)} \beta^{-1} e^{\beta^2/(2\alpha)} \alpha^{-\mu} M_{-\mu, \nu} \left(\frac{\beta^2}{\alpha} \right), \\ \operatorname{Re} \left(\mu + \nu + \frac{1}{2} \right) &> 0, \end{aligned}$$

для внутреннего интеграла, получаем

$$\begin{aligned} G(\tilde{v}; \zeta) &= e^{-\tilde{v}/2} \frac{\Gamma(\eta - \lambda + 1/2)}{\Gamma(1 + 2\eta)} \int_0^{\infty} \exp \left\{ \frac{(1 - \cosh \psi)\tilde{v}}{4} \right\} \\ &\quad \times \tanh^{2\zeta} \left(\frac{\psi}{2} \right) \left(\frac{\cosh \psi + 1}{2} \right)^{\lambda} M_{\lambda, \eta} \left(\frac{\cosh \psi - 1}{2} \tilde{v} \right) \frac{2 d\psi}{\sinh \psi}. \end{aligned}$$

Сделаем следующую замену переменных интегрирования ψ :

$$2 \ln \tanh \frac{\psi}{2} = \nu, \quad \frac{2 d\psi}{\sinh \psi} = d\nu, \quad \cosh \psi - 1 = \frac{2e^{\nu}}{1 - e^{\nu}},$$

тогда

$$\begin{aligned} G(\tilde{v}; \zeta) &= e^{-\tilde{v}/2} \frac{\Gamma(\eta - \lambda + 1/2)}{\Gamma(1 + 2\eta)} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^0 \exp \left\{ -\frac{\tilde{v}}{2} \frac{e^{\nu}}{e^{\nu} - 1} + \zeta \nu \right\} \left(\frac{1}{e^{\nu} - 1} \right)^{\lambda} M_{\lambda, \eta} \left(\tilde{v} \frac{e^{\nu}}{e^{\nu} - 1} \right) d\nu. \end{aligned}$$

Используя формулу обращения преобразования Лапласа и замены (15), получаем

$$\begin{aligned} f(v, t) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(\eta - \lambda + 1/2)}{\Gamma(1 + 2\eta)} \int_{N-i\infty}^{N+i\infty} \int_{-\infty}^0 \exp \left\{ -\frac{\tilde{v}}{2} \frac{e^{\nu}}{e^{\nu} - 1} \right\} e^{\zeta(\nu + \tilde{\tau})} \\ &\quad \times \left(\tilde{v} \frac{e^{-\tilde{\tau}}}{e^{\nu} - 1} \right)^{\lambda} M_{\lambda, \eta} \left(\tilde{v} \frac{e^{\nu}}{e^{\nu} - 1} \right) d\zeta d\nu, \end{aligned}$$

где точка N выбирается так, чтобы все вычеты подынтегральной функции находились правее нее. Меняя порядок интегрирования и используя хорошо известное интегральное представление для дельта-функции Дирака

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{N-i\infty}^{N+i\infty} e^{z\zeta} d\zeta = \delta(z),$$

приходим к формуле

$$f(v, t) = \frac{\Gamma(\eta - \lambda + 1/2)}{\Gamma(1 + 2\eta)} \int_{-\infty}^0 \delta(\nu + \tilde{\tau}) \exp \left\{ -\frac{\tilde{v}}{2} \frac{e^\nu}{e^\nu - 1} \right\} \times \left(\tilde{v} \frac{e^{-\tilde{\tau}}}{e^\nu - 1} \right)^\lambda M_{\lambda, \eta} \left(\tilde{v} \frac{e^\nu}{e^\nu - 1} \right) d\nu.$$

Так как $\tilde{\tau} \geq 0$, мы можем дополнить область интегрирования до всей прямой и воспользоваться определением дельта-функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\zeta - z) d\zeta = z.$$

Далее, проводя замены (15) в обратном порядке, получаем основную формулу (13). Формулу (14) для f_v/f выводим, применяя правила дифференцирования для функций Уиттекера (см. [1]):

$$\left(z \frac{d}{dz} z \right)^n \left(e^{-z/2} z^{k-1} M_{k, \mu}(z) \right) = \frac{\Gamma(\mu + k + n + 1/2)}{\Gamma(\mu + k + 1/2)} e^{-z/2} z^{k+n-1} M_{k+n, \mu}(z).$$

Приведенные ниже теоремы являются аналогами теоремы 1 для модели Хестона. В этих теоремах даны точные решения для оптимального управления и функции Беллмана.

Теорема 3. Для степенной функции полезности (4) и процесса (1) функция Беллмана (3) задана следующей формулой:

$$J_P(w, x, v, t) = \frac{w^\gamma}{\gamma} f^{1/\delta}(v, t), \quad (17)$$

а оптимальный синтез (оптимальное управление) имеет вид

$$\alpha_P^*(w, x, v, t) = \frac{w}{x(1-\gamma)} \left(\frac{\mu}{v} + \frac{\rho\sigma}{\delta} \frac{\eta + \lambda + 1/2}{v} \frac{M_{1+\lambda, \eta}(\Psi(v, t))}{M_{\lambda, \eta}(\Psi(v, t))} \right), \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} f(v, t) &= \frac{\Gamma(\eta - \lambda + 1/2)}{\Gamma(2\eta + 1)} e^{-\Psi(v, t)/2} \Psi^\lambda(v, t) M_{\lambda, \eta}(\Psi(v, t)), \\ \delta &= 1 + \rho^2 \frac{\gamma}{1-\gamma}, \quad \lambda = -\frac{k\Theta}{\sigma^2} + \frac{(1-\delta)\mu}{\rho\sigma}, \quad C = -\frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{\mu^2}{2} \delta, \\ \eta &= \sqrt{\left(\lambda + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2C}{\sigma^2}}, \\ \Psi(v, t) &= \frac{2kv}{\sigma^2(e^{k(T-t)} - 1)}, \end{aligned}$$

$M_{\lambda, \eta}(z)$ — функция Уиттекера, а $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

Теорема 4. Для случая экспоненциальной функции полезности (4) и процесса (1) функция Беллмана задается следующей формулой:

$$J_E(x, w, v, t) = 1 - \frac{e^{-cw}}{c} f^{1/\delta}(v, t), \quad (19)$$

а оптимальный синтез (оптимальное управление) имеет вид

$$\alpha_E^*(w, x, v, t) = \frac{1}{cx} \left(\frac{\mu}{v} + \frac{\rho\sigma}{\delta} \frac{\eta + \lambda + 1/2}{v} \frac{M_{1+\lambda, \eta}(\Psi(v, t))}{M_{\lambda, \eta}(\Psi(v, t))} \right), \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} f(v, t) &= \frac{\Gamma(\eta - \lambda + 1/2)}{\Gamma(2\eta + 1)} e^{-\Psi(v, t)/2} \Psi^\lambda(v, t) M_{\lambda, \eta}(\Psi(v, t)), \\ \delta &= 1 - \rho^2, \quad \lambda = -\frac{k\Theta}{\sigma^2} + \frac{(1 - \delta)\mu}{\rho\sigma}, \quad C = \frac{\mu^2}{2} \delta, \\ \eta &= \sqrt{\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2C}{\sigma^2}}, \quad \Psi(v, t) = \frac{2kv}{\sigma^2(e^{k(T-t)} - 1)}, \end{aligned}$$

$M_{\lambda, \eta}(z)$ — функция Уиттекера, а $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

З а м е ч а н и е. В работе [11] рассматривается модель (5) со сносом $\mu(V, t) = V$. Как следствие, коэффициент при f в уравнении (7) становится пропорциональным v , что и объясняет возможность аффинного представления. Заметим также, что при начальном условии, отличном от константы, решение не представимо в аффинном виде. Метод же, предложенный в настоящей работе, позволяет построить явный вид решения при любом начальном условии как для рассмотренной модели Хестона, так и для модели из [11].

5. Анализ решения.

5.1. Анализ оптимального управления. Оптимальное управление в (18) и (20) пропорционально сумме двух слагаемых, первое из которых, μ/v , соответствует статическому портфелю в нашей оптимизационной задаче и является отношением мгновенного сноса к мгновенной вариации. Заметим, что это слагаемое не зависит ни от времени, ни от параметров волатильности процесса. Второе слагаемое

$$\frac{\rho\sigma}{\delta} \frac{\eta + \lambda + 1/2}{v} \frac{M_{1+\lambda, \eta}(\Psi(v, t))}{M_{\lambda, \eta}(\Psi(v, t))} \quad (21)$$

соответствует хеджированию возможных ожиданий (hedging of the future opportunity set) (см. [13]). Это слагаемое обращается в нуль в ряде важных случаев:

(а) $\rho = 0$: отсутствует корреляция между броуновскими движениями, задающими модель Хестона,

(б) $\gamma = 0$: случай логарифмической функции полезности.

Если волатильность волатильности в модели Хестона равна нулю ($\sigma = 0$ в (1)), то процесс, цены превращается в процесс похожий на геометрическое броуновское движение, но имеющий волатильность детерминистически зависящей от времени волатильностью. Если же мы дополнительно предположим, что $V_0 = \Theta$ в (1), то получим в точности геометрическое броуновское движение.

Используя асимптотики для случая $\sigma \sim 0$ из раздела 6, получаем

$$f(v, t) \sim 1, \quad \frac{f_v(v, t)}{f(v, t)} \sim \frac{C}{kv^2} e^{k(T-t)}. \quad (22)$$

Таким образом, для $\sigma \sim 0$ функция Беллмана приближенно равняется функции полезности, а именно, $J_P \sim U_P$, $J_E \sim U_E$, и оптимальные управления равны соответственно

$$\alpha_P^*(w, x, v, t) = \frac{w}{x(1-\gamma)} \left(\frac{\mu}{v} + \frac{\rho\sigma}{\delta_P} \frac{C_P}{kv^2} e^{k(T-t)} \right), \quad (23)$$

$$\alpha_E^*(w, x, v, t) = \frac{1}{cx} \left(\frac{\mu}{v} + \frac{\rho\sigma}{\delta_E} \frac{C_E}{kv^2} e^{k(T-t)} \right), \quad (24)$$

где константы $C_{P,E}$ и $\delta_{P,E}$ зависят от выбора функции полезности.

5.2. Хеджирование с помощью облигации. Замена переменной $C/v = r$, $f(v, t) = g(r, t)$ сводит задачу (12) к следующей:

$$\frac{b^2 r^3}{2} g_{rr} + hr(m-r)g_r - rg + g_t = 0, \quad g(r, T) = 1,$$

где

$$b = \frac{\sigma}{\sqrt{C}}, \quad h = -\frac{\sigma^2}{C}(1+\lambda), \quad m = -\frac{kC}{\sigma^2(1+\lambda)}.$$

Используя формулу Фейнмана–Каца, получаем следующее представление для $g(r, t)$:

$$g(r, t) = \mathbf{E} \exp \left\{ - \int_t^T r_s ds \right\}. \quad (25)$$

Процесс $r = (r_s)_{s \geq t}$ является решением стохастического дифференциального уравнения

$$dr = h r(m-r) dt + br^{3/2} dB^2, \quad r_t = \frac{C}{v_t}. \quad (26)$$

Заметим, что в финансовой математике модель (26) называется моделью 3/2 (см. [8]), а величина (25) отвечает динамике стоимости бескупонной облигации при стохастической процентной ставке r (см. [3]). Следовательно, отношение f_v/f может быть представлено в виде

$$\frac{f_v(v, t)}{f(v, t)} = \frac{d}{dv} \ln \mathbf{E} \left[\exp \left\{ - \int_t^T r_s ds \right\} \middle| r_t = \frac{C}{v} \right]. \quad (27)$$

6. Приложение. Легко убедиться, что уравнение (12) зависит только от переменной $\Psi(v, t)$. Тогда, используя асимптотики функции Уиттекера $M_{\lambda, \mu}(z)$ (см., например, [1]), мы можем получить асимптотики для функции Беллмана и оптимального синтеза как по пространственной и временной переменным v и t , так и по параметрам процесса V . С помощью асимптотик

$$M_{\lambda, \eta}(z) \sim z^{\eta+1/2}(1+O(z)), \quad z \rightarrow 0, \\ M_{\lambda, \eta}(z) \sim \frac{\Gamma(1+2\eta)}{\Gamma(1/2-\lambda+\eta)} e^{z/2} z^{-\lambda}, \quad z \rightarrow \infty,$$

находим, что

$$f(v, t) = \frac{\Gamma(1/2-\lambda+\eta)}{\Gamma(1+2\eta)} \Psi^{\eta+1/2}(v, t) \left[\Psi^\lambda(v, t) + O(\Psi(v, t)) \right], \quad \Psi(v, t) \rightarrow 0,$$

и

$$f(v, t) \sim 1, \quad \Psi(v, t) \rightarrow \infty.$$

Для $f_v(v, t)/f(v, t)$ получаем следующие соотношения:

$$\frac{f_v(v, t)}{f(v, t)} \sim \frac{\eta + \lambda + 1/2}{v}, \quad \Psi(v, t) \rightarrow 0, \\ \frac{f_v(v, t)}{f(v, t)} \sim \frac{2C}{\sigma^2} \frac{1}{v\Psi(v, t)}, \quad \Psi(v, t) \rightarrow \infty.$$

Авторы выражают благодарность Ю. М. Кабанову за полезные обсуждения и комментарии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамовиц М., Стиган И. (ред.). Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979, 830 с.

2. *Boguslavsky M., Boguslavskaya E.* Arbitrage under power. — RISK, 2003, June, p. 69–77.
3. *Brigo D., Mercurio F.* Interest Rate Models — Theory and Practice: with Smile, Inflation and Credit. Berlin: Springer, 2006, 981 p.
4. *Chacko G., Viceira L.* Dynamic consumption and portfolio choice with stochastic volatility in incomplete markets. — Rev. Financ. Stud., 2005, v. 18, № 4, p. 1369–1402.
5. *Cox J. C., Ingersoll J. E., Ross S. A.* A theory of the term structure of interest rates. — Econometrica, 1985, v. 53, № 2, p. 385–407.
6. *Fouque J.-P., Sircar R., Zariphopoulou T.* Portfolio optimization and stochastic volatility asymptotics. — Math. Finance (to appear), DOI:10.1111/mafi.12109.
7. *Heston S. L.* A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. — Rev. Finan. Stud., 1993, v. 6, № 2, p. 327–343.
8. *Gatheral J., Taleb N.* Volatility Surface: A Practioner's Guide. Wiley Finance, 2006, 208 p.
9. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971, 1108 с.
10. *Kabanov Yu., Safarian M.* Market with Transaction Costs. Mathematical Theory. Berlin: Springer-Verlag, 2009.
11. *Kraft H.* Optimal portfolios and Heston's stochastic volatility model: an explicit solution for power utility. — Quantitative Finance, 2005, v. 5, № 3, p. 303–313.
12. *Merton R. C.* Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. — J. Econ. Theory, 1971, v. 3, № 4, p. 373–413.
13. *Merton R. C.* Continuous-Time Finance. Cambridge: Blackwell, 1990, 732 p.
14. *Obizhaeva A., Wang J.* Optimal trading strategy and supply/demand dynamics. — J. Financial Markets, 2013, v. 16, № 1, p. 1–32.
15. *Zariphopoulou T.* A solution approach to valuation with unhedgeable risks. — Finance Stoch., 2001, v. 5, № 1, p. 61–82.

Поступила в редакцию
10.X.2015

© 2015 г.

КРАМКОВ Д. О.*

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РАВНОВЕСИЯ ЭРРОУ–ДЕБРЁ С ПОТРЕБЛЕНИЕМ В L^0_+

Мы рассматриваем экономику, где потребительские наборы участников представлены конусом L^0_+ неотрицательных измеримых функций, а предпочтения определены аддитивными функциями полезности, удовлетворяющими условиям Инады. Мы распространяем на этот случай результаты работ [2], [1] о существовании и единственности равновесия Эрроу–Дебрё. Для существования наши условия являются необходимыми и достаточными.

Ключевые слова и фразы: равновесие Эрроу–Дебрё, распределение Парето.

* Carnegie Mellon University, Pittsburgh, USA; University of Oxford, United Kingdom; e-mail: kramkov@andrew.cmu.edu