Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. О. Крамков, Существование и единственности равновесия Эрроу–Дебрё с потреблением в $\mathbf{L}_+^0$, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2015, том 60, выпуск 4, 819–827

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp5038>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 16:45:35

2. *Boguslavsky M., Boguslavskaya E.* Arbitrage under power. — RISK, 2003, June, p. 69–77.
3. *Brigo D., Mercurio F.* Interest Rate Models — Theory and Practice: with Smile, Inflation and Credit. Berlin: Springer, 2006, 981 p.
4. *Chacko G., Viceira L.* Dynamic consumption and portfolio choice with stochastic volatility in incomplete markets. — Rev. Financ. Stud., 2005, v. 18, № 4, p. 1369–1402.
5. *Cox J. C., Ingersoll J. E., Ross S. A.* A theory of the term structure of interest rates. — Econometrica, 1985, v. 53, № 2, p. 385–407.
6. *Fouque J.-P., Sircar R., Zariphopoulou T.* Portfolio optimization and stochastic volatility asymptotics. — Math. Finance (to appear), DOI:10.1111/mafi.12109.
7. *Heston S. L.* A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. — Rev. Finan. Stud., 1993, v. 6, № 2, p. 327–343.
8. *Gatheral J., Taleb N.* Volatility Surface: A Practioner’s Guide. Wiley Finance, 2006, 208 p.
9. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971, 1108 с.
10. *Kabanov Yu., Safarian M.* Market with Transaction Costs. Mathematical Theory. Berlin: Springer-Verlag, 2009.
11. *Kraft H.* Optimal portfolios and Heston’s stochastic volatility model: an explicit solution for power utility. — Quantitative Finance, 2005, v. 5, № 3, p. 303–313.
12. *Merton R. C.* Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. — J. Econ. Theory, 1971, v. 3, № 4, p. 373–413.
13. *Merton R. C.* Continuous-Time Finance. Cambridge: Blackwell, 1990, 732 p.
14. *Obizhaeva A., Wang J.* Optimal trading strategy and supply/demand dynamics. — J. Financial Markets, 2013, v. 16, № 1, p. 1–32.
15. *Zariphopoulou T.* A solution approach to valuation with unhedgeable risks. — Finance Stoch., 2001, v. 5, № 1, p. 61–82.

Поступила в редакцию
10.X.2015

© 2015 г.

КРАМКОВ Д. О.*

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РАВНОВЕСИЯ ЭРРОУ–ДЕБРЁ С ПОТРЕБЛЕНИЕМ В L^0_+

Мы рассматриваем экономику, где потребительские наборы участников представлены конусом L^0_+ неотрицательных измеримых функций, а предпочтения определены аддитивными функциями полезности, удовлетворяющими условиям Инады. Мы распространяем на этот случай результаты работ [2], [1] о существовании и единственности равновесия Эрроу–Дебрё. Для существования наши условия являются необходимыми и достаточными.

Ключевые слова и фразы: равновесие Эрроу–Дебрё, распределение Парето.

* Carnegie Mellon University, Pittsburgh, USA; University of Oxford, United Kingdom; e-mail: kramkov@andrew.cmu.edu

1. Основные результаты. В этой статье получены необходимые и достаточные условия существования (статического) равновесия Эрроу–Дебрё для экономики, в которой потребительские наборы участников задаются конусом $\mathbf{L}_+^0$ неотрицательных измеримых функций, а предпочтения определяются аддитивными функциями полезности, удовлетворяющими условиям Инады. Для полноты изложения мы также приводим версию известного критерия единственности. Наши результаты обобщают результаты работ [2], [1]; детальное сравнение с этими работами приводится в замечаниях 1.2 и 1.3. Результаты данной работы были использованы в [6] для получения теорем существования (динамического) равновесия Раднера в экономике с фиксированным набором торгуемых активов.

Рассмотрим экономику с M участниками и пространством состояний $(\mathbf{S}, \mathcal{S}, \mu)$, являющимся измеримым пространством с σ -конечной мерой μ . Через $\mathbf{L}^0$ мы обозначим пространство (классов эквивалентности) измеримых функций со значениями из $[-\infty, \infty]$; $\mathbf{L}_+^0$ — конус неотрицательных измеримых функций. Для $\alpha \in \mathbf{L}^0$ мы используем следующее соглашение:

$$\mathbf{E}[\alpha] \triangleq \int_{\mathbf{S}} \alpha(s) \mu(ds) \triangleq -\infty, \quad \text{если} \quad \mathbf{E}[\min(\alpha, 0)] = -\infty.$$

Набор потреблений m -го участника описывается множеством $\mathbf{L}_+^0$, а его предпочтения определяются аддитивной функцией полезности

$$u_m(\alpha^m) \triangleq \mathbf{E}[U_m(\alpha^m)], \quad \alpha^m \in \mathbf{L}_+^0.$$

Мы предполагаем, что измеримое поле функций полезности $U_m: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{L}^0$ имеет следующие свойства.

Предположение 1. Для каждого $s \in \mathbf{S}$ функция $U_m(\cdot)(s)$ на $(0, \infty)$ является строго возрастающей, строго вогнутой, непрерывно дифференцируемой и удовлетворяющей условиям Инады

$$\lim_{c \rightarrow \infty} U'_m(c)(s) = 0, \quad \lim_{c \downarrow 0} U'_m(c)(s) = \infty.$$

При $c = 0$ мы полагаем $U_m(0)(s) = \lim_{c \downarrow 0} U_m(c)(s)$; этот предел может принимать значение $-\infty$.

Замечание 1.1. Данная постановка охватывает типичные модели потребления в финансовой математике. В частности, она включает модель с непрерывным временем, определенную на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$, где потребление участников описывается неотрицательным процессом $\alpha = (\alpha_t)$ нормы потребления; $C_t = \int_0^t \alpha_v dv$ обозначает накопленное потребление до момента t . В этом случае пространство состояний $\mathbf{S}$ есть $\Omega \times [0, \infty)$, $\mathcal{S}$ является опциональной σ -алгеброй и $\mu(ds) = \mu(d\omega, dt) = \mathbf{P}[d\omega] \times dt$.

Символом $\Lambda \in \mathbf{L}_+^0$ мы обозначаем суммарный капитал участников рынка. Семейство $(\alpha^m)_{m=1, \dots, M}$ элементов из $\mathbf{L}_+^0$ таких, что $\sum_{m=1}^M \alpha^m = \Lambda$, называется *распределением капитала* Λ . Через $(\alpha_0^m) \subset \mathbf{L}_+^0$ мы обозначим исходное распределение Λ между участниками рынка.

Определение 1.1. Пара $(\zeta, (\alpha_1^m)_{m=1, \dots, M})$, состоящая из измеримой функции $\zeta > 0$ (*стохастический дефлятор*) и распределения (α_1^m) капитала Λ , называется *равновесием Эрроу–Дебрё*, если

$$\mathbf{E}[\zeta \Lambda] < \infty$$

и для $m = 1, \dots, M$

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}[|U_m(\alpha_1^m)|] < \infty, \\ & \alpha_1^m = \arg \max \{ \mathbf{E}[U_m(\alpha)]: \alpha \in \mathbf{L}_+^0, \mathbf{E}[\zeta(\alpha - \alpha_0^m)] = 0 \}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 1.1. Пусть выполнено предположение 1, суммарный капитал Λ положителен и исходное распределение таково, что $\alpha_0^m \neq 0$, $m = 1, \dots, M$. Равновесие Эрроу–Дебрё существует тогда и только тогда, когда найдется распределение (α^m) капитала Λ такое, что

$$\mathbf{E}[|U_m(\alpha^m)| + U'_m(\alpha^m)\Lambda] < \infty, \quad m = 1, \dots, M. \quad (1.2)$$

Следствие 1.1. Пусть выполнено предположение 1, суммарный капитал Λ положителен, начальное распределение таково, что $\alpha_0^m \neq 0$, $m = 1, \dots, M$, и

$$\mathbf{E}[|U_m(s\Lambda)|] < \infty, \quad s \in (0, 1], \quad m = 1, \dots, M.$$

Тогда равновесие Эрроу–Дебрё существует.

Доказательство. В силу вогнутости U_m мы имеем

$$cU'_m(c) \leq 2\left(U_m(c) - U_m\left(\frac{c}{2}\right)\right), \quad c > 0.$$

Результат теперь следует из теоремы 1.1, в которой можно взять $\alpha^m = \Lambda/M$.

В общем случае равновесие Эрроу–Дебрё не является единственным; см. пример 15.B.2 в [7], который может быть легко адаптирован к нашей постановке. Следующий результат уточняет известный критерий единственности.

Теорема 1.2. Пусть выполнены условия следствия 1.1 и существует индекс m_0 такой, что для $t \neq m_0$

$$\text{функция } c \mapsto cU'_m(c) \text{ из } (0, \infty) \text{ в } \mathbf{L}_+^0 \text{ является неубывающей.} \quad (1.3)$$

Тогда равновесие Эрроу–Дебрё существует и единственно.

Доказательства теорем 1.1 и 1.2 даны в п. 3. Они опираются на конечномерную характеризацию равновесия Эрроу–Дебрё, приведенную в теореме 2.2. Заметим, что все компоненты доказательства являются довольно стандартными и в той или иной форме уже использовались ранее.

З а м е ч а н и е 1.2. Будучи необходимым и достаточным, условие (1.2) обобщает на случай потреблений в $\mathbf{L}_+^0$ критерии, полученные в [2], [1]. В этих статьях требовалось существование сопряженных показателей $p, q \in [1, \infty]$, $1/p + 1/q = 1$, и измеримых функций $\zeta \in \mathbf{L}_+^q$ и $\eta \in \mathbf{L}_+^1$ таких, что $\Lambda \in \mathbf{L}_+^p$ и измеримые поля (U_m) дважды непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условиям

$$U_m(c) \leq \zeta c + \eta, \quad c > 0, \quad m = 1, \dots, M,$$

и

$$\sup_{w \in \Sigma^M} U_c(w, \Lambda) \Lambda \in \mathbf{L}_+^q.$$

Здесь $U(w, c)$ — измеримое поле аккумулированной полезности (см. (2.2) ниже), а Σ^M — симплекс в $\mathbf{R}^M$. Набор потреблений участников принимает значения в $\mathbf{L}_+^p$. Заметим, что стандартные версии существующих результатов из учебников обычно требуют, чтобы суммарный капитал был равномерно ограничен снизу:

$$\Lambda \geq \text{const} > 0$$

(см. [5, условие 4.2.1], [3, теорема 7.2.8] и [4, раздел 10.G]).

З а м е ч а н и е 1.3. Если измеримые поля функций полезности (U_m) являются дважды дифференцируемыми, то ключевое условие (1.3) эквивалентно ограниченности единицей их коэффициентов $-cU''_m(c)/U'_m(c)$ относительного неприятия риска. В этом виде условие (1.3) хорошо известно (см. [7, пример 17.F.2 и предложение 17.F.3], [5, теорема 4.6.1], [2], [1]). Отметим, что, в отличие от этих работ, мы допускаем нарушение данного условия для одного из участников.

2. Распределения, оптимальные по Парето. В этом пункте мы соберем свойства оптимальных по Парето распределений, которые будут необходимы для доказательства теорем 1.1 и 1.2.

О п р е д е л е н и е 2.1. Распределение (α^m) капитала Λ называется *оптимальным по Парето*, если

$$\mathbf{E}[U_m(\alpha^m)] < \infty, \quad m = 1, \dots, M, \quad (2.1)$$

и не существует другого распределения (β^m) капитала Λ , которое бы доминировало (α^m) в том смысле, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[U_m(\beta^m)] &\geq \mathbf{E}[U_m(\alpha^m)], \quad m = 1, \dots, M, \\ \mathbf{E}[U_l(\beta^l)] &> \mathbf{E}[U_l(\alpha^l)] \quad \text{для некоторого } l \in \{1, \dots, M\}. \end{aligned}$$

По поводу обоснования условия интегрируемости (2.1) см. замечание 2.1.

Как обычно при исследовании задачи полного равновесия, важную роль в дальнейшем играет измеримое поле *агрегированной функции полезности* $U = U(w, c): \mathbf{R}_+^M \setminus \{0\} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbf{L}^0$:

$$U(w, c) \triangleq \sup \left\{ \sum_{m=1}^M w^m U_m(c^m) : c^m \geq 0, \quad c^1 + \dots + c^M = c \right\}, \quad (2.2)$$

где

$$\mathbf{R}_+^M \setminus \{0\} \triangleq \left\{ w \in [0, \infty)^M : \sum_{m=1}^M w^m > 0 \right\}.$$

В силу однородности функции $U = U(w, c)$ по аргументу w ($U(yw, c) = yU(w, c)$, $y > 0$) часто удобно ограничивать ее область определения по w симплексом

$$\Sigma^M \triangleq \left\{ w \in [0, \infty)^M : \sum_{m=1}^M w^m = 1 \right\}.$$

Элементарные рассуждения показывают, что для каждого $w \in \mathbf{R}_+^M \setminus \{0\}$ измеримое поле $U(w, \cdot)$ на $[0, \infty)$ удовлетворяет предположению 1 и верхняя граница (2.2) достигается на измеримых функциях $\pi^m(w, c)$ таких, что

$$w^m U'_m(\pi^m(w, c)) = U_c(w, c) \triangleq \frac{\partial}{\partial c} U(w, c), \quad \text{если } w^m > 0, \quad c > 0, \quad (2.3)$$

$$\pi^m(w, c) = 0, \quad \text{если } w^m = 0 \text{ или } c = 0. \quad (2.4)$$

Из этих тождеств следует, что измеримые поля $\pi^m: \mathbf{R}_+^M \setminus \{0\} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbf{L}_+^0$ являются непрерывными и обладают следующими свойствами:

- (A1) они 0-однородны по w : $\pi^m(yw, c) = \pi^m(w, c)$, $y > 0$;
- (A2) для $c > 0$ измеримое поле $\pi^m(\cdot, c) = \pi^m(w^1, \dots, w^M, c)$ строго возрастает по w^m и строго убывает по w^l , $l \neq m$;
- (A3) если $c > 0$ и w_1, w_2 — не равные друг другу векторы в Σ^M , то для каждого $s \in \mathbf{S}$ векторы $(\pi^m(w_1, c)(s))$ и $(\pi^m(w_2, c)(s))$ в $c\Sigma^M$ различны.

Следующий результат является известной параметризацией оптимальных по Парето распределений элементами из Σ^M .

Теорема 2.1. Пусть верно предположение 1. Пусть $\Lambda > 0$ и (α^m) является распределением Λ , удовлетворяющим (2.1). Распределение (α^m) оптимально по Парето тогда и только тогда, когда существует вектор $w \in \Sigma^M$ такой, что

$$\alpha^m = \pi^m(w, \Lambda), \quad m = 1, \dots, M. \quad (2.5)$$

Доказательство. Предположим сначала, что (α^m) оптимально по Парето. Ввиду вогнутости измеримых полей (U_m) множество

$$C \triangleq \left\{ z \in \mathbf{R}^M : z^m \leq \mathbf{E}[U_m(\beta^m)] \text{ для некоторого } (\beta^m) \text{ — распределения } \Lambda \right\}$$

выпукло, а в силу (2.1) оно имеет внутренние точки. Из оптимальности по Парето распределения (α^m) следует, что

$$\hat{z}^m \triangleq \mathbf{E}[U_m(\alpha^m)], \quad m = 1, \dots, M,$$

лежит на границе C . Следовательно, существует ненулевой вектор $w \in \mathbf{R}^M$ такой, что

$$\sum_{m=1}^M w^m \hat{z}^m \geq \sum_{m=1}^M w^m z^m, \quad z \in C. \quad (2.6)$$

Так как $C - [0, \infty)^M = C$, мы получаем, что $w^m \geq 0$. Мы можем нормализовать w так, что $w \in \Sigma^M$. Заметим, что (2.6) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[\sum_{m=1}^M w^m U_m(\alpha^m) \right] &= \sup \left\{ \mathbf{E} \left[\sum_{m=1}^M w^m U_m(\beta^m) \right] : (\beta^m) \text{ — распределение } \Lambda \right\} \\ &= \mathbf{E}[U(w, \Lambda)], \end{aligned}$$

откуда легко вывести (2.5).

С другой стороны, если (α^m) задается формулами (2.5), то для любого распределения (β^m) капитала Λ

$$\sum_{m=1}^M w^m U_m(\beta^m) \leq U(w, \Lambda) = \sum_{m=1}^M w^m U_m(\alpha^m),$$

что влечет за собой оптимальность по Парето распределения (α^m) , если мы учтем условие интегрируемости (2.1) и тот факт, что $\alpha^m \triangleq \pi^m(w, \Lambda) = 0$ при условии $w^m = 0$. Теорема 2.1 доказана.

З а м е ч а н и е 2.1. Без условия интегрируемости (2.1) в определении 2.1 утверждение теоремы 2.1 неверно. В качестве контрпримера возьмем $M = 2$ и выберем суммарный капитал $\Lambda > 0$ и функции полезности такие, что $U_1 = U_2$ и

$$\mathbf{E}[|U_i(\Lambda)|] < \infty \quad \text{и} \quad \mathbf{E} \left[U_i \left(\frac{\Lambda}{2} \right) \right] = -\infty.$$

Тогда распределение $(\pi_1(1/2, \Lambda), \pi_2(1/2, \Lambda)) = (\Lambda/2, \Lambda/2)$ доминируется и $(0, \Lambda)$, и $(\Lambda, 0)$.

Мы теперь готовы сформулировать главный результат этого пункта.

Теорема 2.2. Пусть выполнено предположение 1, суммарный капитал Λ положителен и начальное распределение таково, что $\alpha_0^m \neq 0$, $m = 1, \dots, M$. В этом случае пара $(\zeta, (\alpha_1^m))$ является равновесием Эрроу–Дебрё тогда и только тогда, когда существуют $w \in \text{int } \Sigma^M$ и константа $z > 0$ такие, что

$$\zeta = z U_c(w, \Lambda), \quad (2.7)$$

$$\alpha_1^m = \pi^m(w, \Lambda) \quad (2.8)$$

и

$$\mathbf{E} \left[\sum_{m=1}^M |U_m(\pi^m(w, \Lambda))| + U_c(w, \Lambda) \Lambda \right] < \infty, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{E}[U_c(w, \Lambda)(\pi^m(w, \Lambda) - \alpha_0^m)] = 0. \quad (2.10)$$

Кроме того, равновесное распределение (α_1^m) является оптимальным по Парето.

З а м е ч а н и е 2.2. Как будет показано в лемме 3.1, условие интегрируемости (2.9) имеет место для *некоторого* $w \in \text{int } \Sigma^M$ тогда и только тогда, когда оно имеет место для *каждого* $w \in \text{int } \Sigma^M$. Кроме того, это эквивалентно существованию распределения (α^m) капитала Λ , удовлетворяющего (1.2).

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.1. Пусть $U: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{L}^0$ является измеримым полем, удовлетворяющим предположению 1, и измеримые функции $\alpha > 0$, $\zeta > 0$ таковы, что $\mathbf{E}[\zeta\alpha] < \infty$ и

$$-\infty < \mathbf{E}[U(\alpha)] = \sup \{ \mathbf{E}[U(\beta)]: \beta \in \mathbf{L}_+^0, \mathbf{E}[\zeta(\beta - \alpha)] = 0 \} < \infty.$$

Тогда

$$\zeta = \frac{\mathbf{E}[\zeta\alpha]}{\mathbf{E}[U'(\alpha)\alpha]} U'(\alpha). \quad (2.11)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть β является измеримой функцией, для которой

$$0 < \beta < \alpha \quad \text{и} \quad \mathbf{E}[U(\alpha - \beta)] > -\infty.$$

Например, мы можем выбрать β так, чтобы было выполнено равенство

$$U(\alpha) - U(\alpha - \beta) = \min(\eta, U(2\alpha) - U(\alpha)),$$

где измеримая функция η положительна и $\mathbf{E}[\eta] < \infty$. Заметим, что

$$\mathbf{E}[\zeta\beta] < \infty \quad \text{и} \quad \mathbf{E}[U'(\alpha)\beta] < \infty, \quad (2.12)$$

где второе неравенство имеет место, поскольку $U'(\alpha)\beta \leq U(\alpha) - U(\alpha - \beta)$.

Возьмем измеримую функцию γ такую, что $|\gamma| \leq \beta$ и $\mathbf{E}[\zeta\gamma] = 0$. Из предположения 1 следует, что для $|y| < 1$

$$\begin{aligned} U'\left(\alpha + y \frac{\gamma}{2}\right) \frac{|\gamma|}{2} &\leq U'\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) \frac{\beta}{2} \\ &\leq U\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) - U(\alpha - \beta) \leq U(\alpha) - U(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Учитывая интегрируемость $U(\alpha)$ и $U(\alpha - \beta)$, мы получаем, что функция

$$f(y) \triangleq \mathbf{E}\left[U\left(\alpha + y \frac{\gamma}{2}\right)\right], \quad y \in (-1, 1),$$

непрерывно дифференцируема и

$$f'(y) = \mathbf{E}\left[U'\left(\alpha + y \frac{\gamma}{2}\right) \frac{\gamma}{2}\right], \quad y \in (-1, 1).$$

Так как α является оптимальным, f достигает своего максимума при $y = 0$. Поэтому

$$f'(0) = \mathbf{E}[U'(\alpha)\gamma] = 0.$$

Таким образом, мы нашли измеримую функцию $\beta > 0$ такую, что неравенства (2.12) имеют место и

$$\forall \gamma \in \mathbf{L}^0: \quad |\gamma| \leq \beta \quad \text{и} \quad \mathbf{E}[\zeta\gamma] = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}[U'(\alpha)\gamma] = 0. \quad (2.13)$$

Это влечет (2.11). Действительно, если мы определим вероятностные меры $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ с плотностями

$$\frac{d\mathbf{P}}{d\mu} \triangleq \frac{\zeta\beta}{\mathbf{E}[\zeta\beta]} \quad \text{и} \quad \frac{d\mathbf{Q}}{d\mu} \triangleq \frac{U'(\alpha)\beta}{\mathbf{E}[U'(\alpha)\beta]},$$

то для множества $A \in \mathcal{S}$ из свойства (2.13) с $\gamma = \beta(1_A - \mathbf{P}[A])$ вытекает, что $\mathbf{P}[A] = \mathbf{Q}[A]$. Следовательно, $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$, что и дает нужный нам результат. Лемма 2.1 доказана.

Доказательство теоремы 2.2. Предположим сначала, что $(\zeta, (\alpha_1^m))$ является равновесием Эрроу–Дебрё. Мы утверждаем, что (α_1^m) — оптимальное по Парето распределение Λ . Действительно, если существует распределение (β^m) , которое доминирует (α_1^m) в смысле определения 2.1, то для некоторого $l \in \{1, \dots, M\}$ либо

$$\mathbf{E}[U_l(\beta^l)] \geq \mathbf{E}[U_l(\alpha_1^l)] \quad \text{и} \quad \mathbf{E}[\zeta\beta^l] < \mathbf{E}[\zeta\alpha_1^l],$$

либо

$$\mathbf{E}[U_l(\beta^l)] > \mathbf{E}[U_l(\alpha_1^l)] \quad \text{и} \quad \mathbf{E}[\zeta\beta^l] \leq \mathbf{E}[\zeta\alpha_1^l],$$

что противоречит оптимальности α_1^l в (1.1).

Из теоремы 2.1 мы получаем представление (2.8) для (α_1^m) с $w \in \Sigma^M$. Так как $\alpha_0^m \neq 0$, то $\alpha_1^m \neq 0$. Следовательно, $w \in \text{int } \Sigma^M$ и $\alpha_1^m = \pi^m(w, \Lambda) > 0$. Лемма 2.1 и тождества (2.3) влекут теперь (2.7). Наконец, свойства (2.9) и (2.10) являются частью определения 1.1.

Обратно, пусть точка $w \in \text{int } \Sigma^M$ такова, что условия (2.9) и (2.10) выполнены. Определим $(\zeta, (\alpha_1^m))$ согласно (2.7) и (2.8). Все условия определения 1.1, кроме (1.1), выполняются тривиально. Свойство (1.1) следует из соотношений

$$\begin{aligned} U_m(\beta^m) - \frac{1}{w^m} U_c(w, \Lambda) \beta^m &\leq \sup_{c \geq 0} \left\{ U_m(c) - \frac{1}{w^m} U_c(w, \Lambda) c \right\} \\ &= U_m(\pi^m(w, \Lambda)) - \frac{1}{w^m} U_c(w, \Lambda) \pi^m(w, \Lambda), \end{aligned}$$

где $\beta^m \in \mathbf{L}_+^0$ и на последнем шаге мы использовали определение π^m , данное в (2.3).

3. Доказательства теорем 1.1 и 1.2. Начнем с некоторых лемм.

Лемма 3.1. Пусть выполняется предположение 1, $\Lambda > 0$ и существует распределение (α^m) капитала Λ , удовлетворяющее (1.2). Тогда

$$\mathbf{E}[|U_m(\pi^m(w, \Lambda))|] < \infty, \quad w \in \text{int } \Sigma^M, \quad m = 1, \dots, M, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{E} \left[\sup_{w \in \Sigma^M} U_c(w, \Lambda) \Lambda \right] < \infty. \quad (3.2)$$

Доказательство. Возьмем $w \in \text{int } \Sigma^M$. Из монотонности и вогнутости U_m получаем неравенства $U_m(\pi^m(w, \Lambda)) \leq U_m(\Lambda) \leq U_m(\alpha^m) + U'_m(\alpha^m)\Lambda$. Из определения π^m следует, что

$$\sum_{m=1}^M w^m U_m(\alpha^m) \leq U(w, \Lambda) = \sum_{m=1}^M w^m U_m(\pi^m(w, \Lambda)).$$

Эти неравенства дают (3.1).

Пусть $w \in \Sigma^M$. Так как

$$0 < \Lambda = \sum_{m=1}^M \pi^m(w, \Lambda) = \sum_{m=1}^M \alpha^m,$$

для каждого $s \in \mathbf{S}$ существует индекс $m(s)$ такой, что

$$0 < \pi^{m(s)}(w, \Lambda)(s) \quad \text{и} \quad \alpha^{m(s)}(s) \leq \pi^{m(s)}(w, \Lambda)(s).$$

Учитывая (2.3) и (2.4) получаем, что

$$U_c(w, \Lambda) \leq \max \{ w^m U'_m(\alpha^m) : w^m > 0 \} \leq \sum_{m=1}^M U'_m(\alpha^m),$$

что дает (3.2).

Следующее утверждение, вытекающее из теоремы Брауэра о неподвижной точке играет ключевую роль. Оно широко известно (см. теорему 6.3.6 в [3]).

Лемма 3.2. Пусть $f_m: \Sigma^M \rightarrow \mathbf{R}$, $m = 1, \dots, M$, — непрерывные функции такие, что

$$f_m(w) < 0, \quad \text{если } w^m = 0, \quad (3.3)$$

$$\sum_{m=1}^M f_m(w) = 0, \quad w \in \Sigma^M. \quad (3.4)$$

Тогда существует точка $\hat{w} \in \text{int } \Sigma^M$ такая, что

$$f_m(\hat{w}) = 0, \quad m = 1, \dots, M. \quad (3.5)$$

Доказательство. Так как

$$g_m(w) \triangleq \frac{w^m + \max(0, -f_m(w))}{1 + \sum_{n=1}^M \max(0, -f_n(w))}, \quad m = 1, \dots, M,$$

являются непрерывными отображениями из Σ^M в Σ^M , теорема о неподвижной точке влечет существование точки $\hat{w} \in \Sigma^M$ такой, что

$$\hat{w}^m = g_m(\hat{w}) = \frac{\hat{w}^m + \max(0, -f_m(\hat{w}))}{1 + \sum_{n=1}^M \max(0, -f_n(\hat{w}))}, \quad m = 1, \dots, M.$$

Согласно (3.3), $\hat{w} \in \text{int } \Sigma^M$. Пользуясь (3.4), мы делаем вывод о существовании индекса l такого, что $f_l(\hat{w}) \geq 0$. Тогда

$$0 < \hat{w}^l = \frac{\hat{w}^l}{1 + \sum_{m=1}^M \max(0, -f_m(\hat{w}))},$$

и, значит, $f_m(\hat{w}) \geq 0$, $m = 1, \dots, M$. Пользуясь еще раз равенством (3.4), получаем требуемое утверждение.

Доказательство теоремы 1.1. Необходимое условие следует непосредственно из теоремы 2.2, которая, в частности, влечет, что неравенство (1.2) выполняется для любого равновесного распределения (α_1^m) .

Обратно, предположим, что неравенство (1.2) имеет место для некоторого распределения (α^m) капитала Λ . Из леммы 3.1 мы получаем (3.2). Теорема о мажорируемой сходимости и непрерывность измеримых полей $\pi^m(\cdot, \Lambda)$ и $U_c(\cdot, \Lambda)$ на Σ^M влекут непрерывность функций

$$f_m(w) \triangleq \mathbf{E}[U_c(w, \Lambda)(\pi^m(w, \Lambda) - \alpha_0^m)], \quad w \in \Sigma^M.$$

Поскольку выполняется соотношение (2.4) и $\alpha_0^m \neq 0$, функции (f_m) удовлетворяют (3.3), а так как

$$\sum_{m=1}^M \alpha_0^m = \sum_{m=1}^M \pi^m(w, \Lambda) = \Lambda,$$

то они удовлетворяют и (3.4).

Лемма 3.2 влечет существование точки $\hat{w} \in \text{int } \Sigma^M$, для которой выполняется (3.5). Теорема 1.1 следует теперь из теоремы 2.2, где условие интегрируемости (2.9) для $w = \hat{w}$ имеет место ввиду леммы 3.1. Теорема 1.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.2. Существование вытекает из следствия 1.1. Для доказательства единственности мы определим *избыточные функции полезности*:

$$\begin{aligned} h_m(w) &\triangleq \mathbf{E}[U'_m(\pi^m(w, \Lambda))(\pi^m(w, \Lambda) - \alpha_0^m)] \\ &= \frac{1}{w^m} \mathbf{E}[U_c(w, \Lambda)(\pi^m(w, \Lambda) - \alpha_0^m)], \quad w \in (0, \infty)^M. \end{aligned}$$

Согласно лемме 3.1, эти функции корректно определены и ограничены. Условие (1.3), свойства (A1) и (A2) для $\pi^m = \pi^m(w, c)$ и тот факт, что случайное поле $U'_m = U'_m(c)$ является строго убывающим, влекут за собой, что

(B1) для каждого $m = 1, \dots, M$ функция h_m является 0-однородной: $h_m(yw) = h_m(w)$, $w \in (0, \infty)^M$, $y > 0$;

(B2) для $m \neq m_0$, где m_0 — тот индекс, для которого свойство (1.3) может не выполняться, функция h_m обладает свойством *полной замещенности*: $h_m = h_m(w^1, \dots, w^M)$ строго убывает по w^l , если $l \neq m$.

Единственность равновесия будет следовать из теоремы 2.2 и свойства (A3) для $\pi^m = \pi^m(w, c)$, если мы покажем, что уравнение

$$h_m(w) = 0, \quad m = 1, \dots, M,$$

не имеет кратных корней на $\text{int } \Sigma^M$. Пусть w_1 и w_2 — два различных решения этого уравнения. Без ограничения общности можно предположить, что $w_1^{m_0} \leq w_2^{m_0}$. Тогда

$$y \triangleq \max_{m=1, \dots, M} \frac{w_1^m}{w_2^m} > 1$$

и существует индекс $l_0 \neq m_0$ такой, что $yw_2^{l_0} = w_1^{l_0}$. Из (B1) получаем, что

$$h_m(yw_2) = h_m(w_2) = 0, \quad m = 1, \dots, M,$$

а из свойства полной замещенности в (B2) выводим, что

$$h_{l_0}(yw_2) < h_{l_0}(w_1) = 0.$$

Это противоречие завершает доказательство теоремы 1.2.

Автор выражает благодарность Ким Вестон (Kim Weston) за комментарии и исправления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dana R.-A. Existence and uniqueness of equilibria when preferences are additively separable. — *Econometrica*, 1993, v. 61, № 4, p. 953–957.
2. Dana R.-A. Existence, uniqueness and determinacy of Arrow–Debreu equilibria in finance models. — *J. Math. Econom.*, 1993, v. 22, № 6, p. 563–579.
3. Dana R.-A., Jeanblanc M. *Financial Markets in Continuous Time*. Berlin: Springer-Verlag, 2003, 324 p.
4. Duffie D. *Dynamic Asset Pricing Theory*. Princeton: Princeton Univ. Press, 2001, 465 p.
5. Karatzas I., Shreve S. E. *Methods of Mathematical Finance*. New York: Springer-Verlag, 1998, 407 p.
6. Kramkov D. Existence of endogenously complete equilibrium driven by a diffusion. — *Finance Stoch.*, 2015, v. 19, № 1, p. 1–22.
7. Mas-Colell A., Whinston M. D., Green J. R. *Microeconomic Theory*. New York: Oxford Univ. Press, 1995, 981 p.

Поступила в редакцию
15.I.15