Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Богуславская, Об оптимизации долгосрочных необратимых инвестиций в одной диффузионной модели, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, том 45, выпуск 4, 748–759

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp504>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 15:11:54

Поэтому

$$\frac{1}{1-e^{-u}} \int_u^\infty |f(x)| e^{-x} dx \leq \frac{1}{e(1-e^{-24})} \|f(\xi)\|_1 \leq \frac{1}{2} \|f(\xi)\|_1,$$

что эквивалентно неравенству $\mathbf{E}|f(\xi_u)| \geq \frac{1}{2} \mathbf{E}|f(\xi)|$. Наконец, в силу леммы

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|f(\xi_u)|^p &= \frac{1}{1-e^{-u}} \int_0^u |f(x)|^p e^{-x} dx \leq \frac{1}{1-e^{-24}} \int_0^\infty |f(x)|^p e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{1-e^{-24}} \mathbf{E}\|f(\xi)\|^p \leq 2(e^{12}p)^{p^d} (\mathbf{E}|f(\xi)|)^p \leq 2^{p+1}(e^{12}p)^{p^d} (\mathbf{E}|f(\xi_u)|)^p. \end{aligned}$$

Приходим к неравенству (5) с $C = 4e^{12}$. Теорема 3 доказана.

Автор хотел бы выразить искреннюю признательность Ю. В. Прохорову за стимулирующие обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alesker S. Localization technique on the sphere and the Gromov–Milman theorem on the concentration phenomenon on uniformly convex sphere. — Math. Sci. Res. Inst. Publ., 1999, v. 34, p. 17–27.
2. Bobkov S. G. Remarks on the growth of L^p -norms of polynomials. — Geometric Aspects of Functional Analysis (Israel Seminar) (to appear).
3. Бобков С. Г., Гётце Ф. О моментах полиномов. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 3, с. 638–640.
4. Bourgain J. On the distribution of polynomials on high dimensional convex sets. — Lecture Notes in Math., 1991, v. 1469, p. 127–137.
5. Gromov M., Milman V. D. Brunn theorem and a concentration of volume phenomena for symmetric convex bodies. — Geometric Aspects of Functional Analysis (Israel Seminar), v. 12, Tel Aviv University, Israel, 1983–1984.
6. Gromov M., Milman V. D. Generalization of the spherical isoperimetric inequality to uniformly convex Banach spaces. — Compositio Math., 1987, v. 62, p. 263–282.
7. Kannan R., Lovász L., Simonovits M. Isoperimetric problems for convex bodies and localization lemma. — Discrete Comput. Geom., 1995, v. 13, p. 541–559.
8. Lovász L., Simonovits M. Random walks in a convex body and an improved volume algorithm. — Random Structures Algorithms, 1993, v. 4, № 3, p. 359–412.
9. Прохоров Ю. В. О полиномах от нормально распределенных случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1992, т. 37, в. 4, с. 692–694.
10. Прохоров Ю. В. О полиномах от случайных величин, имеющих гамма-распределение. — Теория вероятн. и ее примен., 1993, т. 38, в. 1, с. 198–202.

Поступила в редакцию
24.V.2000

© 2000 г.

БОГУСЛАВСКАЯ Е. В.*

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ДОЛГОСРОЧНЫХ НЕОБРАТИМЫХ ИНВЕСТИЦИЙ В ОДНОЙ ДИФФУЗИОННОЙ МОДЕЛИ

В работе Пиндайка [4] была рассмотрена модель, где главным фактором, вносящим неопределенность, являлся неизвестный заранее требуемый объем инвестиций. В настоящей работе получено точное решение для этой задачи.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 117966 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: elenab@mi.ras.ru

Для отыскания решения используются такие эвристические соображения, как уравнение Беллмана и условия «гладкого склеивания». Оптимальность найденного решения доказывается с помощью «верификационной» техники стохастического оптимального управления.

Ключевые слова и фразы: оптимальное управление инвестициями, уравнение Беллмана, условия «гладкого склеивания», верификационные (проверочные) условия, плотность потока инвестиций, функция полезности, функция выгоды, функции Бесселя, функции Куммера, гипергеометрические функции.

1. Введение. Постановка задачи

Обычно в задачах оптимизации инвестиций неизвестна стоимость конечного продукта после вложения некоторого фиксированного капитала. Подобная задача исследовалась в работах Диксита и Пиндайка [1], [2], [5]. В нашей же задаче, наоборот, главным фактором, вносящим неопределенность, является неизвестный заранее требуемый объем инвестиций. Примером может служить разработка нового научно-технического продукта (например, нового лекарства), когда неизвестно, сколько времени и средств потребуют исследования, но известна стоимость этого продукта после разработки. Другим примером может служить постройка атомной станции, когда невозможно заранее спрогнозировать динамику цены ресурсов, но стоимость станции после завершения строительных работ известна.

Как и в работе [4], мы принимаем следующую математическую модель: пусть X_t — количество средств, необходимых на момент времени t для завершения проекта. Неопределенность относительно объема инвестиций удобно разбить на два вида: на неопределенность, которая зависит только от стратегии фирмы, так называемую *внутреннюю («техническую»)* неопределенность, и на неопределенность, которая зависит от внешних обстоятельств, так называемую *внешнюю неопределенность*.

В этой модели процесс количества средств $X = (X_t)_{t \geq 0}$ изменяется согласно следующему уравнению:

$$dX_t = -I_t dt + \beta \sqrt{X_t I_t} dW_t + \gamma X_t d\bar{W}_t, \quad (1)$$

где I_t — неупреждающая функция (плотность потока инвестиций), β, γ — неотрицательные константы, W_t и $\bar{W}_t$ — некоррелированные винеровские процессы.

Уравнение (1) отражает тот факт, что количество средств, необходимых для завершения проекта, уменьшается по мере вкладывания средств в проект, и, в то же время, стохастически изменяется согласно двум видам неопределенностей.

А. Случай $\beta \neq 0, \gamma = 0$ соответствует случаю внутренней неопределенности. Здесь X может изменяться только при наличии инвестиций, а математическое ожидание $E((dX)^2 | X) = \beta^2 I X dt$ — линейно зависит от I .

В. Случай $\beta = 0, \gamma \neq 0$ соответствует случаю внешней неопределенности. Здесь X может изменяться и при отсутствии инвестиций, а математическое ожидание $E((dX)^2 | X) = \gamma^2 X^2 dt$ не зависит от инвестиций I . Изменения в ценах на труд и материалы, государственное регулирование могут вносить изменения в X независимо от стратегии фирмы.

С. Случай $\beta \neq 0, \gamma \neq 0$ учитывает оба вида неопределенностей.

Во всех трех случаях суммарные затраты становятся известными только после завершения проекта. Коэффициенты β, γ выбираются в соответствии с условиями данной прикладной задачи (см. [5]).

Плотность потока инвестиций, или, другими словами, скорость инвестиций, I_t играет в нашей модели роль управления. Управляя инвестициями, мы стараемся выбрать оптимальную стратегию для выполнения проекта. Скорость инвестиций I_t является случайной неупреждающей функцией, которая должна быть неотрицательна и ограничена сверху — $0 \leq I_t \leq I_{\max}$, где $I_{\max}$ — некоторая константа. Управление, удовлетворяющее этим условиям, называется *допустимым управлением*. Обозначим класс допустимых управлений через U . Неотрицательность скорости инвестиций

означает, что, инвестировав средства, мы уже не можем получить никакую их часть обратно. Максимальное значение плотности потока инвестиций $I_{\max}$ определяется из двух соображений. Во-первых, возможности инвестора могут позволять ему вкладывать деньги только с ограниченной скоростью; например, компания А не может вкладывать в проект Х более чем Y долларов в день. Кроме того, существуют объективные ограничения на скорость инвестиций. Так, например, строительные работы не могут быть проведены быстрее, чем за определенные сроки, или разработка нового лекарства требует опытов, проведение которых не может быть ускорено дополнительными инвестициями. Таким образом, $I_{\max}$ есть максимальное значение плотности потока инвестиций, при котором фирма-инвестор может продуктивно вкладывать деньги.

Введем функцию полезности $F(x, I)$:

$$F(x, I) = \mathbf{E}_x \left\{ \int_0^{\tau} (-I_t) e^{-rt} dt + V e^{-r\tau} \right\}, \quad (2)$$

где $\mathbf{E}_x$ — математическое ожидание, отвечающее тому, что $X_0 = x$; $\tau = \inf\{t: X_t = 0\}$; $V = \text{const} > 0$ — стоимость проекта после его завершения, известная с достоверностью; r — коэффициент дисконтирования (процентная ставка), отражающий представление инвестора о риске.

Функция полезности есть не что иное, как способ измерить математическое ожидание «отдачи от завершения проекта минус затраты». Момент τ есть момент завершения проекта ($X_\tau = 0$). Интеграл в (2) есть дисконтированные затраты (инвестиции) за время выполнения проекта, а второе слагаемое есть дисконтированный доход от проекта.

Для формулировки оптимизационной задачи введем функцию выгоды:

$$F(x) = \sup_{I \in U} F(x, I). \quad (3)$$

Таким образом, $F(x)$ рассматривается нами в качестве критерия оптимальности инвестирования. Заметим, что если бы множество значений допустимых управлений не было бы ограничено (т.е. $I_{\max} = \infty$), то оптимальная стратегия состояла бы в мгновенном инвестировании капитала, требуемого для завершения проекта.

Далее, заметим, что $F(x, I, V) = I_{\max} F(x/I_{\max}, I/I_{\max}, V/I_{\max})$. Поэтому без ограничения общности можно считать $I_{\max} = 1$.

Цель работы состоит в том, чтобы найти оптимальную стратегию инвестирования и функцию выгоды $F = F(x)$. Обычно в подобных задачах (см. [9], [11]) поступают следующим образом: исходя из эвристических соображений выбирают стратегию, «подозрительную» на оптимальную, и строят соответствующее этой стратегии значение функционала, а затем доказывают, что найденная функция действительно является функцией выгоды и найденное управление оптимально. В качестве стратегии, «подозрительной» на оптимальную, мы будем рассматривать следующую: если для завершения проекта требуется капитал меньший, чем x^* , то следует вкладывать в проект средства с максимальной возможной скоростью; если же в какой-либо момент окажется, что для завершения проекта требуется капитал, больший чем x^* , то следует прекратить инвестиции. Число x^* будет выбираться из условий гладкого склеивания.

В работе [4] было найдено решение для случая внутренней неопределенности при нулевой процентной ставке $r = 0$. В настоящей работе предлагается решение для общей задачи. Интересно отметить, что при нулевой процентной ставке в случае внешней неопределенности и в случае двух неопределенностей оптимальной стратегией будет не инвестировать вообще, т.е. ждать, пока проект сам собой завершится, так как время в этом случае бесплатное ($r = 0$), а вероятность выхода процесса (1) с $I_t \equiv 0$ в нуль (вероятность завершения проекта) равна единице.

Автор выражает признательность А. Н. Ширяеву за научное руководство и Э. Л. Пресману за многочисленные замечания, позволившие существенно упростить формулировку результатов.

2. Нахождение решения

2.1. Постановка задачи Стефана со свободной границей. Критерием оптимальности в нашей модели является функция выгоды $F = F(x)$:

$$F(x) = \sup_{I \in U} \mathbf{E}_x \left\{ \int_0^\tau (-I_t) e^{-rt} dt + V e^{-r\tau} \right\}, \quad (4)$$

$U = \{I: 0 \leq I_t \leq 1\}$, $\tau = \inf\{t: X_t = 0\}$. Заметим, что из вида (4) следует, что $F(0) = V$, $F(x) \leq V$ для всех $x \geq 0$.

Для нахождения явного вида функции выгоды предположим, что существуют некоторая функция $\tilde{F} = \tilde{F}(x)$ и управление $\tilde{I} = \tilde{I}(x)$, для которых выполнено уравнение Беллмана.

Введем операторы L_1 и L_2 , действующие на функции $G = G(x)$, $x \geq 0$, из класса $C^2((0, \infty) \setminus \{x^*\}) \cup C^1(0, \infty)$ (где $x^* \in (0, \infty)$ — некоторое число), по формулам:

$$L_1 G = -\frac{dG}{dx} + \frac{1}{2} \beta^2 x \frac{d^2 G}{dx^2}, \quad L_2 G = \frac{1}{2} \gamma^2 x^2 \frac{d^2 G}{dx^2} - rG. \quad (5)$$

Запишем уравнение Беллмана

$$\sup_{0 \leq I \leq 1} \{I L_1 \tilde{F}(x) + L_2 \tilde{F}(x) - I\} = 0. \quad (6)$$

В силу линейности уравнения (6) по управлению I можно предположить, что оптимальное управление имеет вид:

$$\tilde{I}(x) = \begin{cases} 1, & L_1 \tilde{F}(x) - 1 \geq 0, \\ 0, & L_1 \tilde{F}(x) - 1 < 0. \end{cases} \quad (7)$$

Таким образом, с учетом (7) получаем, что для тех x , где $\tilde{I}(x) = 1$, должно быть выполнено уравнение

$$L_1 \tilde{F}(x) + L_2 \tilde{F}(x) - 1 = 0, \quad (8)$$

а там, где $\tilde{I}(x) = 0$, должно выполняться уравнение

$$L_2 \tilde{F}(x) = 0. \quad (9)$$

Из интуитивных соображений о структуре оптимального управления можно предположить, что существует такое x^* , что при $x < x^*$ управление $\tilde{I}(x) = 1$, а при $x \geq x^*$ управление $\tilde{I}(x) = 0$ (т.е. при относительно небольшой стоимости проекта надо инвестировать средства в проект с максимально возможной скоростью, а при «дорогом» проекте не надо вкладывать деньги). Другими словами, мы будем решать следующую задачу Стефана со свободной границей: найти число x^* и гладкую при $\gamma = 0$ и дважды гладкую при $\gamma > 0$ функцию $\tilde{F}(x)$ такую, что:

$$\tilde{F}(0) = V, \quad (10)$$

$$\tilde{F}(x) \leq V \quad \text{для всех } x \geq 0, \quad (11)$$

$$L_1 \tilde{F}(x) + L_2 \tilde{F}(x) - 1 = 0, \quad x \leq x^*, \quad (12)$$

$$L_2 \tilde{F}(x) = 0, \quad x \geq x^*. \quad (13)$$

2.2. Решение задачи Стефана со свободной границей. Нетрудно видеть, что для того чтобы функция $\tilde{F}(x)$ совпадала при $x \geq x^*$ с решением задачи Стефана, необходимо и достаточно, чтобы

$$\tilde{F}(x) = \frac{x}{(b-1)(\beta^2 b/2 + 1)} \left(\frac{x}{x^*} \right)^{-b} \quad \text{при } x \geq x^*, \quad (14)$$

где $b = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 8r/\gamma^2})$. Действительно, общее решение уравнения (13) имеет вид $c_1 x^{1-b} + c_2 x^b$. Из соотношения (11) вытекает, что $c_2 = 0$, а из (12) при $x = x^*$ получаем значение c_1 . Заметим, что случай $\gamma = 0$ можно рассматривать как предельный при $\gamma \rightarrow 0$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$L_1 u(x) + L_2 u(x) = 0. \quad (15)$$

Пусть теперь $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — такие линейно независимые решения уравнения (15), что $u_1(0) = 1$, $u_2(0) = 0$. Для того чтобы функция $\tilde{F}(x)$ совпадала при $0 \leq x \leq x^*$ с решением задачи Стефана, необходимо и достаточно, чтобы

$$\tilde{F}(x) = \left(V + \frac{1}{r}\right) [u_1(x) - \Theta(x^*) u_2(x)] - \frac{1}{r} \quad \text{при } 0 \leq x \leq x^*, \quad (16)$$

где $\Theta(x)$ и x^* находятся из условий

$$\tilde{F}'(x) |_{x=x^*} = -\frac{1}{\beta^2 b/2 + 1} \quad (\text{условие «гладкого склеивания»}), \quad (17)$$

$$L_2 \tilde{F}(x) |_{x=x^*} = 0. \quad (18)$$

Подставляя (16) в (17) и (18), нетрудно получить, что

$$\Theta(x) = \frac{L_2 u_1(x) - (\beta^2 b/2 + 1) u_1'}{L_2 u_2(x) - (\beta^2 b/2 + 1) u_2'}. \quad (19)$$

Заметим, что из (15) и (5) следует, что

$$\begin{aligned} L_2 u_i(x) - \left(\frac{1}{2} \beta^2 b + 1\right) u_i' &= -L_1 u_i(x) - \left(\frac{1}{2} \beta^2 b + 1\right) u_i' \\ &= -\frac{1}{2} \beta^2 (x u_i''(x) + b u_i'(x)), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Таким образом, (19) можно записать как

$$\Theta(x) = \frac{x u_1''(x) + b u_1'(x)}{x u_2''(x) + b u_2'(x)}. \quad (20)$$

Определим $\Phi(x)$ как

$$\Phi(x) = \left(V + \frac{1}{r}\right) (L_1 u_1(x) - \Theta(x) L_1 u_2(x)) - 1. \quad (21)$$

В дальнейшем, в качестве x^* мы возьмем наименьший положительный корень уравнения $\Phi(x) = 0$. Затем покажем, что это значение x^* действительно является точкой переключения уравнения, а именно, единственным положительным корнем уравнения $L_1 \tilde{F}(x) - 1 = 0$ (см. лемму 3.2).

Для получения явного решения в терминах специальных функций рассмотрим по отдельности случаи внутренней, внешней и случая двух неопределенностей. Заметим, что уравнение (15) является уравнением вида 2.1.2.166 в [10], выпишем явные выражения для его решений $u_1(x)$ и $u_2(x)$. Для отыскания явного вида $\Theta(x)$ и $\Phi(x)$ применим тождества из приложений А, В, С к (20), (21) для случаев внутренней, внешней и случая двух неопределенностей соответственно.

Случай внутренней неопределенности ($\beta \neq 0$, $\gamma = 0$). Для удобства обозначений положим $c = 1 + 2/\beta^2$ и произведем замену переменных. Пусть $z = 2rx/\beta^2$. Тогда

$$u_1(z) = \frac{2}{\Gamma(c)} z^{c/2} K_c(2\sqrt{z}), \quad u_2(z) = \frac{2}{\Gamma(c)} z^{c/2} I_c(2\sqrt{z}), \quad (22)$$

$$\Theta(z) = \frac{u_1'(z)}{u_2'(z)} \stackrel{(37)}{=} -\frac{K_{c-1}(2\sqrt{z})}{I_{c-1}(2\sqrt{z})}, \quad (23)$$

где $I_\nu(x)$, $K_\nu(x)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода соответственно (см. приложение А). Учитывая, что $L_1 u_i - \gamma u_i = 0$, $i = 1, 2$, так как $\gamma = 0$, запишем выражение для $\Phi(z)$:

$$\Phi(z) = (Vr + 1) \frac{2}{\Gamma(c)} z^{c/2} \left(K_c(2\sqrt{z}) + \frac{K_{c-1}(2\sqrt{z})}{I_{c-1}(2\sqrt{z})} I_c(2\sqrt{z}) \right) - 1. \quad (24)$$

Случай внешней неопределенности ($\beta = 0, \gamma \neq 0$). Положим $z = rx/(b(b-1))$. Тогда

$$u_1(z) = \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(2b)} z^{1-b} e^{-1/z} M(b+1, 2b, z^{-1}), \quad (25)$$

$$u_2(z) = \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(2b)} z^{1-b} e^{-1/z} U(b+1, 2b, z^{-1}), \quad (26)$$

где $M(a, b, x)$ и $U(a, b, x)$ — функции Куммера первого и второго рода соответственно (см. приложение В). С помощью формул (39) и (40) возьмем первую и вторую производные от $u_1(z)$ и $u_2(z)$ и подставим их в (20). Учитывая тождества (41) и (42), получаем:

$$\Theta(z) = -\frac{b-1}{2} \frac{M(b, 2b+1, z^{-1})}{U(b, 2b+1, z^{-1})}. \quad (27)$$

Заметим, что из условия $\beta = 0$ следует, что $L_1 u_i = -r[b(b-1)]^{-1} (du_i/dz)$, $i = 1, 2$. Взяв производные с помощью формул (39) и (40), запишем выражение для $\Phi(z)$:

$$\begin{aligned} \Phi(z) = (Vr+1) \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(2b)} z^{-b} e^{-1/z} \\ \times \left(M(b, 2b, z^{-1}) - \frac{1}{2} \frac{M(b, 2b+1, z^{-1})}{U(b, 2b+1, z^{-1})} U(b, 2b, z^{-1}) \right) - 1. \end{aligned} \quad (28)$$

Случай двух неопределенностей ($\beta \neq 0, \gamma \neq 0$). Положим $z = (c-1)rx/(b(b-1))$. Тогда

$$u_1(z) = F(b-1, -b; 1-c; -z), \quad (29)$$

$$u_2(z) = z^c F(b-1+c, -b+c; c+1; -z),$$

где $F(a, b; c; x)$ — гипергеометрические функции (см. приложение С). С помощью формул (47) и (48) возьмем первую и вторую производные от $u_1(z)$ и $u_2(z)$ и подставим их в (20). Учитывая тождества (51) и (52), получаем:

$$\Theta(z) = -\frac{(b-1)b^2}{c(c-1)(b+c-1)} z^{1-c} \frac{F(1+b, 1-b; 2-c; -z)}{F(b+c, -b+c; c; -z)}. \quad (30)$$

Воспользовавшись тождеством (53) и помня выражения для первой и второй производной $u_i(z)$, $i = 1, 2$, нетрудно получить выражения через гипергеометрические функции для $L_1 u_i(z)$, $i = 1, 2$. Подставив эти выражения в (21), получаем:

$$\begin{aligned} \Phi(z) = (Vr+1) \left[F(b, 1-b; 1-c; -z) + \frac{b(b-c)}{c(c-1)} z \frac{F(1+b, 1-b; 2-c; -z)}{F(b+c, -b+c; c; -z)} \right. \\ \left. \times F(b+c, 1-b+c; c+1; -z) \right] - 1. \end{aligned} \quad (31)$$

Объединим полученные результаты в виде следующего основного утверждения.

Теорема 2.1. В описанной выше модели оптимальное управление $\bar{I} = \bar{I}(x)$ и функция выгоды $F = F(x)$ задаются формулами

$$\begin{aligned} \bar{I}_t = \begin{cases} 1, & x < x^*, \\ 0, & x \geq x^*, \end{cases} \\ F(x) = \begin{cases} \left(V + \frac{1}{r} \right) (-\Theta(x^*) u_2(x) + u_1(x)) - \frac{1}{r}, & x < x^*, \\ \frac{x}{(b-1)(\beta^2 b/2 + 1)} \left(\frac{x}{x^*} \right)^{-b}, & x \geq x^*, \end{cases} \end{aligned}$$

где $b = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 8r/\gamma^2})$, x^* является наименьшим положительным корнем уравнения $\Phi(x) = 0$, а $u_1(x)$, $u_2(x)$, $\Theta(x)$ и $\Phi(x)$ определены равенствами (22)–(31).

3. Доказательства

В этом разделе мы докажем сформулированную ранее теорему 2.1. Для доказательства нам понадобятся две леммы.

Лемма 3.1. У уравнения $\Phi(z) = 0$ существует хотя бы один положительный корень.¹⁾

Доказательство. Заметим, что для любых $z \geq 0$, $b > 1$, $c > 1$ имеем: $I_{c-1}(2\sqrt{z}) > 0$,

$$U(b, 2b+1, z^{-1}) \stackrel{\text{инт. предст. (38)}}{=} \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^\infty e^{-t/z} t^{b-1} (1+t)^b dt > 0,$$

$$F(b+c, -b+c; c; -z) \stackrel{\text{преобр. Эйлера (56)}}{=} (1+z)^{-b-c} F\left(b+c, b; c; \frac{z}{z+1}\right) > 0.$$

Таким образом, из непрерывности функций Бесселя, Куммера и гипергеометрических функций следует, что $\Phi = \Phi(z)$ является непрерывной функцией. Но из асимптотического поведения соответствующих специальных функций мы видим, что $\Phi(0) = Vr$ и $\Phi(+\infty) = -1$. Таким образом, из теоремы о существовании корня у непрерывной функции получаем требуемое.

Лемма 3.2. Имеют место следующие неравенства:

$$L_1 \tilde{F}(x) - 1 > 0 \quad \text{при } x < x^*, \quad (32)$$

$$L_1 \tilde{F}(x) - 1 \leq 0 \quad \text{при } x \geq x^*. \quad (33)$$

Доказательство. Докажем сначала (33). Действительно, в этом случае если $\gamma = 0$, то $L_1 \tilde{F} - 1 = -1 < 0$. В других случаях

$$L_1 \tilde{F}(x) - 1 = \left(\frac{x^*}{x}\right)^b - 1 \leq 0 \quad \text{при } x \geq x^*.$$

Теперь докажем (32) отдельно для каждого из трех случаев неопределенности.

Обозначим $\Psi(z) \stackrel{\text{def}}{=} L_1 \tilde{F}(x) - 1$. Тогда в случае *внутренней неопределенности* имеем:

$$\Psi(z) = (Vr+1) \frac{2}{\Gamma(c)} \left(z^{c/2} K_c(2\sqrt{z}) - \Theta(z^*) I_c(2\sqrt{z}) \right) - 1.$$

Продифференцировав $\Psi(z)$ по z и применив следствие 4.1 из приложения D, получаем:

$$\begin{aligned} \Psi'_z(z) &= (Vr+1) \frac{2}{\Gamma(c)} \left[-z^{(c-1)/2} K_{c-1}(2\sqrt{z}) + \Theta(z^*) z^{(c-1)/2} I_{c-1}(2\sqrt{z}) \right] \\ &= (Vr+1) \frac{2}{\Gamma(c)} z^{(c-1)/2} I_{c-1}(2\sqrt{z}) [\Theta(z) - \Theta(z^*)] \stackrel{(\text{сл. 4.1})}{<} 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\Psi(z)$ является строго убывающей непрерывной функцией при $z < z^*$. Более того, в силу асимптотических свойств модифицированных функций Бесселя $\Psi(0) = Vr$, а в силу условия леммы $\Psi(z^*) = 0$. Таким образом, получаем $\Psi(z) > 0$ при $z < z^*$.

В случае *внешней неопределенности* имеем:

$$\Psi(z) = (Vr+1) \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(2b)} z^{-b} e^{-1/z} \left(M(b, 2b, z^{-1}) + \frac{\Theta(z^*)}{b-1} U(b, 2b+1, z^{-1}) \right) - 1.$$

Рассмотрим разность $\Psi(z) - \Phi(z)$. Учитывая следствие 4.2 из приложения D, получаем:

$$\Psi(z) - \Phi(z) = (Vr+1) \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(2b)} z^{-b} e^{-1/z} U(b, 2b; z^{-1}) (\Theta(z^*) - \Theta(z)) > 0$$

¹⁾ Отметим, что здесь и далее замены $z = z(x)$ различны в зависимости от вида неопределенностей.

при $z < z^*$. Но $\Phi(z) > 0$ при $z < z^*$, так как $\Phi(0) = Vr > 0$ и z^* — наименьший положительный корень уравнения $\Phi(z) = 0$. Отсюда следует, что $\Psi(z) > \Phi(z) > 0$.

В случае *двух неопределенностей* имеем:

$$\Psi(z) = (Vr + 1) \left(F(b, 1 - b; 1 - c; -z) - \frac{(b - c)(b + c + 1)}{b(b - 1)} \times \Theta(z^*) z^c F(b + c, 1 - b + c; c + 1; -z) \right) - 1.$$

Для доказательства положительности $\Psi(z)$ при $z < z^*$ рассмотрим по отдельности случаи $b - c < 0$ и $b - c > 0$.

Пусть $b - c < 0$. Заметим, что

$$F(b + c, 1 - b + c; c + 1; -z) \stackrel{(56)}{=} (1 + z)^{-b-c} F\left(b + c, b; c + 1; \frac{z}{1 + z}\right) > 0.$$

Тогда, учитывая следствие 4.3 из приложения D, получаем:

$$\Psi(z) - \Phi(z) = (Vr + 1) \frac{b(b - c + 1)}{b(b - 1)} z^c F(b + c, 1 - b + c; c + 1; -z) [\Theta(z) - \Theta(z^*)] > 0.$$

Следовательно, $\Psi(z) > \Phi(z) > 0$ при $z < z^*$.

Пусть теперь $b - c > 0$. Сначала заметим, что

$$F(b + c, -b + c; c; -z) \stackrel{(56)}{=} (1 + z)^{-b-c} F\left(b + c, b; c; \frac{z}{1 + z}\right) > 0.$$

Представим $\Psi(z)$ в виде $\Psi(z) = (Vr + 1)(1 + z)^{-b} N(z) - 1$, где

$$N(z) = (1 + z)^b F(b, 1 - b; 1 - c; -z) - (1 + z)^b \frac{(b - c)(b + c + 1)}{b(b - 1)} \times \Theta(z^*) z^c F(b + c, 1 - b + c; c + 1; -z).$$

Продифференцировав $N(z)$ по z с помощью (50), (49) и учитывая следствие 4.3 из приложения D, получаем:

$$\begin{aligned} N'_z(z) &= \frac{b(b - c)}{1 - c} (1 + z)^{b-1} F(b + 1, 1 - b; 2 - c; -z) \\ &\quad + \Theta(z^*) \frac{(b - c)(b + c - 1)c}{b(b - 1)} z^c (1 + z)^{b-1} F(b + c, -b + c; c; -z) \\ &= \frac{(b - c)(b + c - 1)c}{b(b - 1)} z^{1-c} (1 + z)^{b-1} F(b + c, -b + c; c; -z) [\Theta(z) - \Theta(z^*)] < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили, что $N(z)$ и $(1 + z)^{-b}$ являются строго убывающими функциями при $z < z^*$. Следовательно, $\Psi(z)$ также является строго убывающей непрерывной функцией при $z < z^*$. Кроме того, $\Psi(0) = Vr > 0$ и $\Psi(z^*) = 0$.

Отсюда следует, что $\Psi(z) > 0$ при $z < z^*$.

Доказательство теоремы 2.1. Для доказательства нам нужно убедиться в выполнении *проверочных свойств*.

Согласно стандартной технике стохастического оптимального управления, *проверочные свойства* заключаются в следующем:

(А) найдется такая функция $\tilde{F} = \tilde{F}(x)$, что $F(x, I) \leq \tilde{F}(x)$ для любого допустимого управления $I = I(x)$;

(В) найдется такое управление $\tilde{I} = \tilde{I}(x)$, что $F(x, \tilde{I}) = \tilde{F}(x)$.

Покажем, что выполнено свойство (А), т.е. для любого допустимого управления $I = I(x)$ имеем $F(x, I) \leq \tilde{F}(x)$, $x \geq 0$.

Для этого применим к $(e^{-rt} \tilde{F}(X_t))_{t \geq 0}$ формулу Ито:

$$\begin{aligned} e^{-r(t \wedge \tau)} \tilde{F}(X_{t \wedge \tau}) &= \tilde{F}(X_0) + \int_0^{t \wedge \tau} e^{-rs} L(I) \tilde{F}(X_s) ds + \int_0^{t \wedge \tau} e^{-rs} \gamma X_s \tilde{F}'(X_s) dW_s \\ &\quad + \int_0^{t \wedge \tau} e^{-rs} \beta \sqrt{I_s X_s} \tilde{F}'(X_s) d\tilde{W}_s. \end{aligned}$$

Заметим, что для любого допустимого управления I в силу леммы 3.2

$$IL_1\tilde{F}(x) + L_2\tilde{F}(x) - I = I(L_1\tilde{F}(x) - 1) + L_2\tilde{F}(x) \leq \bar{I}(L_1\tilde{F}(x) - 1) + L_2\tilde{F}(x) = 0. \quad (34)$$

Далее, беря математическое ожидание $\mathbf{E}_x$ от $e^{-rt}\tilde{F}(X_t)$ и учитывая (34) и то, что $X_0 = x$, находим, что

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x) &= \mathbf{E}_x e^{-r(t \wedge \tau)} \tilde{F}(X_{t \wedge \tau}) - \mathbf{E}_x \int_0^{t \wedge \tau} e^{-rs} (IL_1 + L_2) \tilde{F}(X_s) ds \\ &\quad - \mathbf{E}_x \int_0^{t \wedge \tau} e^{-rs} \gamma X_s \tilde{F}'(X_s) dW_s - \mathbf{E}_x \int_0^{t \wedge \tau} e^{-rs} \beta \sqrt{I_s X_s} \tilde{F}'(X_s) d\tilde{W}_s \\ &\geq \mathbf{E}_x e^{-r(t \wedge \tau)} \tilde{F}(X_{t \wedge \tau}) + \mathbf{E}_x \int_0^{t \wedge \tau} (-I) e^{-rs} ds - \mathbf{E}_x \int_0^{t \wedge \tau} e^{-rs} \gamma X_s \tilde{F}'(X_s) dW_s \\ &\quad - \mathbf{E}_x \int_0^{t \wedge \tau} e^{-rs} \beta \sqrt{I_s X_s} \tilde{F}'(X_s) d\tilde{W}_s. \end{aligned} \quad (35)$$

Заметим, что стохастические интегралы в (35) являются мартингалами и поэтому их математическое ожидание равно нулю. Далее, полагая в (35) $t \rightarrow +\infty$, получаем, что $\tilde{F}(x) \geq F(x, I)$, так как $e^{-r(t \wedge \tau)} \tilde{F}(X_{t \wedge \tau}) \rightarrow V e^{-r\tau}$. Действительно, если $\tau < \infty$, то $\tilde{F}(X_\tau) = V$, если же $\tau = \infty$, то $\tilde{F}(X_t)$ ограничено, $e^{-r(t \wedge \tau)} \rightarrow 0$ и $V e^{-r(t \wedge \tau)} \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$. Таким образом, из (35) получаем, что $\tilde{F}(x) \geq F(x, I)$, т.е. выполнено свойство (A).

Аналогично проверим выполнение свойства (B), т.е., что $\tilde{F}(x) = F(x, \bar{I})$ для любых $x > 0$.

Записав опять формулу Ито для $e^{-rt}\tilde{F}(X_t)$ и взяв математическое ожидание, получим:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x) &= \mathbf{E}_x e^{-r(t \wedge \tau)} \tilde{F}(X_{t \wedge \tau}) - \mathbf{E}_x \int_0^{t \wedge \tau} e^{-rs} (\bar{I}L_1 + L_2) \tilde{F}(X_s) ds \\ &\quad - \mathbf{E}_x \int_0^{t \wedge \tau} e^{-rs} \gamma X_s \tilde{F}'(X_s) dW_s - \mathbf{E}_x \int_0^{t \wedge \tau} e^{-rs} \beta \sqrt{I_s X_s} \tilde{F}'(X_s) d\tilde{W}_s \\ &= \mathbf{E}_x e^{-r(t \wedge \tau)} \tilde{F}(X_{t \wedge \tau}) + \mathbf{E}_x \int_0^{t \wedge \tau} (-\bar{I}) e^{-rs} ds - \mathbf{E}_x \int_0^{t \wedge \tau} e^{-rs} \gamma X_s \tilde{F}'(X_s) dW_s \\ &\quad - \mathbf{E}_x \int_0^{t \wedge \tau} e^{-rs} \beta \sqrt{I_s X_s} \tilde{F}'(X_s) d\tilde{W}_s. \end{aligned} \quad (36)$$

Поскольку математическое ожидание двух последних членов в (36) равно нулю, то, переходя к пределу по $t \rightarrow +\infty$, находим, что

$$\tilde{F}(x) = \mathbf{E}_x \left(\int_0^\tau (-\bar{I}) e^{-rs} ds + V e^{-r\tau} \right) = F(x, \bar{I}).$$

4. Приложения

В работе использовался ряд специальных функций. В приложениях А, В, С для удобства читателя мы приводим ряд определений и фактов.

А. Функциями Бесселя первого и второго рода называются соответственно функции $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ (см. [3], [7]), где

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}/4^n}{n! \Gamma(\nu + n + 1)}, \quad K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \nu \pi}.$$

Мы используем некоторые свойства модифицированных функций Бесселя:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(z^{\nu/2} I_\nu(2\sqrt{z}) \right) &= z^{(\nu-1)/2} I_{\nu-1}(2\sqrt{z}), \\ \frac{d}{dz} \left(z^{\nu/2} K_\nu(2\sqrt{z}) \right) &= -z^{(\nu-1)/2} K_{\nu-1}(2\sqrt{z}); \end{aligned} \quad (37)$$

асимптотическое поведение: при $z \rightarrow 0$

$$I_\nu(2\sqrt{z}) \sim \frac{z^{\nu/2}}{\Gamma(\nu+1)} \quad (\nu \neq -1, -2, \dots),$$

$$K_\nu(2\sqrt{z}) \sim \frac{1}{2} \Gamma(\nu) z^{-\nu/2} \quad (\nu > 0);$$

при $z \rightarrow \infty$

$$I_\nu(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}, \quad K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}.$$

В. Функцией Куммера первого рода называется функция $M(a, b, z)$ (см. [3], [7]),

$$M(a, b, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad \text{где } (a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)},$$

а функцией Куммера второго рода — функция $U(a, b, z)$.

$$U(a, b, z) = \frac{\pi}{\sin \pi b} \left(\frac{M(a, b, z)}{\Gamma(1+a-b)\Gamma(b)} - z^{1-b} \frac{M(1+a-b, 2-b, z)}{\Gamma(a)\Gamma(2-b)} \right).$$

Мы используем некоторые свойства функций Куммера: *интегральное представление*

$$\Gamma(a)U(a, b, z) = \int_0^\infty e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{b-a-1} dt, \quad a > 0, z > 0; \quad (38)$$

дифференциальные соотношения

$$\frac{d}{dz} [e^{-z} z^{b-a} M(a, b, z)] = (b-a) e^{-z} z^{b-a-1} M(a-1, b, z), \quad (39)$$

$$\frac{d}{dz} [e^{-z} z^{b-a} U(a, b, z)] = -e^{-z} z^{b-a-1} U(a-1, b, z); \quad (40)$$

некоторые тождества:

$$M(a, b, z) - M(a-1, b, z) = \frac{z}{b} M(a, b+1, z), \quad (41)$$

$$(b-a)U(a, b, z) + U(a-1, b, z) = zU(a, b+1, z); \quad (42)$$

асимптотическое поведение: при $z \rightarrow 0$

$$M(a, b, z) \rightarrow 1 (b \neq n), \quad (43)$$

$$U(a, b, z) = \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} z^{1-b} + O(|z|^{b-2}) \quad (b > 2), \quad (44)$$

при $|z| \rightarrow \infty$

$$M(a, b, z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-b} [1 + O(|z|^{-1})] \quad (z > 0), \quad (45)$$

$$U(a, b, z) = z^{-a} [1 + O(|z|^{-1})]. \quad (46)$$

С. Гипергеометрической функцией называется ряд Гаусса:

$$F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!},$$

где $(a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1)$.

Мы используем некоторые свойства гипергеометрических функций (см. [3], [7]):

дифференциальные соотношения

$$\frac{d}{dz} F(a, b; c; z) = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1; c+1; z), \quad (47)$$

$$\frac{d}{dz} [z^{c-1} F(a, b; c; z)] = (c-1) z^{c-2} F(a, b; c-1; z), \quad (48)$$

$$\frac{d}{dz} [(1-z)^{a-c+1} z^{c-1} F(a, b; c; z)] = (c-1) z^{c-2} (1-z)^{a-c} F(a, b-1; c-1; z), \quad (49)$$

$$\frac{d}{dz} [(1-z)^a F(a, b; c; z)] = -\frac{a(c-b)}{c} (1-z)^{a-1} F(a+1, b; c+1; z); \quad (50)$$

некоторые тождества:

$$zF'_z(a, b; c; z) + aF(a, b; c; z) - aF(a+1, b; c; z) = 0, \quad (51)$$

$$(c-a-1)F(a, b; c; z) + aF(a+1, b; c; z) - (c-1)F(a, b; c-1; z) = 0, \quad (52)$$

$$zF'_z(a, b; c; z) + (c-1)F(a, b; c; z) - (c-1)F(a, b; c-1; z) = 0; \quad (53)$$

интегральное представление:

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt \quad (c > b > 0); \quad (54)$$

асимптотическое поведение: при $z \rightarrow 0$ $F(a, b; c; z) \rightarrow 1$; при $z \rightarrow \infty$

$$F(a, b; c; z) \sim \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} (-z)^{-b}, \quad a > 0 \quad (55)$$

преобразование Эйлера

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{-a} F\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right). \quad (56)$$

Д. Лемма 4.1. Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — два линейно независимых решения следующего дифференциального уравнения второго порядка:

$$f(x)u''_{xx} + g(x)u'_x + h(x)u = 0. \quad (57)$$

Тогда $\Theta(x) = u(x)/v(x)$ — строго монотонная функция и ее производная имеет вид

$$\Theta'_x(x) = \frac{\text{const}}{v^2(x)} \exp \left\{ - \int^x \frac{g(y)}{f(y)} dy \right\}. \quad (58)$$

Доказательство. Так как u и v — два линейно независимых решения уравнения (57), то выполнены следующие равенства:

$$f(x)u''_{xx} + g(x)u'_x + h(x)u = 0, \quad (59)$$

$$f(x)v''_{xx} + g(x)v'_x + h(x)v = 0. \quad (60)$$

Умножим (59) на v , (60) на u и вычтем (60) из (59). Получим:

$$f(x)(u''v - v''u) + g(x)(u'v - v'u) = 0. \quad (61)$$

Положим по определению $w(x) = u'v - v'u$. Тогда $w'(x) = u''v - v''u$ и мы можем переписать (61) в виде дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Его решением является функция $w(x) = \text{const} \exp(-\int^x (g(y)/f(y)) dy)$. Таким образом, получаем

$$\Theta'_x(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{\text{const}}{v^2} \exp \left\{ - \int^x \frac{g(y)}{f(y)} dy \right\}.$$

Следствие 4.1. Функция $\Theta(z) = -K_{c-1}(2\sqrt{z})/I_{c-1}(2\sqrt{z})$ является строго возрастающей, и $\Theta'_z(z) = (2z)^{-1}[I_{c-1}(2\sqrt{z})]^{-2}$.

Следствие 4.2. Функция $\Theta(z) = -(b-1)M(b, 2b+1, z^{-1})/2U(b, 2b+1, z^{-1})$ является строго возрастающей при $b > 1$, и $\Theta'_z(z) = \frac{1}{2}e^{1/z}z^b[U(b, 2b+1, z^{-1})]^{-2}$.

Следствие 4.3. Функция

$$\Theta(z) = -\frac{(b-1)b^2}{c(c-1)(b+c-1)} \frac{z^{1-c}F(b+1, 1-b; 2-c; -z)}{F(b+c, -b+c; c; -z)}$$

является строго возрастающей при $c > 1$, $b > 1$, и

$$\Theta'_z(z) = \frac{(b-1)b^2}{c(b+c-1)} z^{-c}(1+z)^{-c-1} [F(b+c, -b+c; c; -z)]^{-2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dixit A. Investment and hysteresis. — J. Econom. Perspectives, 1992, v. 6, p. 107–132.
2. Dixit A., Pindyck R. S. Investment under Uncertainty. Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.
3. Abramowitz M., Stegun I. A. (Eds). Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. New York: Wiley-Interscience, 1972, 1046 p.
4. Pindyck R. S. Investments of uncertain cost. — J. Financial Econom., 1993, v. 34, p. 53–76.
5. Pindyck R. S. Irreversibility, uncertainty, and investment, J. Econom. Literature, 1991, v. 29, p. 1110–1152.
6. Бозуслаская Е. В. Точное решение одной задачи оптимального управления инвестициями в диффузионной модели. — Успехи матем. наук, 1997, т. 52, № 2, с. 157–158.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973.
8. Дубинс Л. Е., Шенн Л. А., Ширяев А. Н. Оптимальные правила остановки и максимальные неравенства для процессов Бесселя. — Теория вероятн. и ее примен., 1993, т. 38, в. 2, с. 288–330.
9. Жанблан-Пике М., Ширяев А. Н. Оптимизация потока дивидендов. — Успехи матем. наук, 1995, т. 50, № 2, с. 25–46.
10. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Точные решения. М.: Наука, 1995.
11. Крамков Д. О., Мордецки Э. Интегральный опцион. — Теория вероятн. и ее примен., 1994, т. 39, в. 1, с. 201–211.

Поступила в редакцию
1.X.1998

© 2000 г.

МАСЛОВ В. П.*

КВАНТОВАННАЯ ЭНТРОПИЯ И ЕЕ СВЯЗЬ С ЧИСЛАМИ ЗАПОЛНЕНИЯ

В теории вероятностных пространств, факторизованных по группе эквивалентных событий, соответствующей классическому пределу Бозе-статистики, существенную роль играют случайные события, отвечающие числам заполнения.

При наличии кластеров энтропия в этих задачах может быть выражена через числа заполнения, а оператор энтропии через операторы рождения и уничтожения кластеров.

Ключевые слова и фразы: Бозе-статистика, энтропия, числа заполнения, кластеры.

Рассмотрим систему N классических частиц, гамильтониан которой имеет вид:

$$H_N(x_1, p_1, \dots, x_N, p_N) = \sum_{k=1}^N \frac{p_k^2}{2m} + \sum_{1 \leq k < l \leq N} V(x_k - x_l), \quad (1)$$

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой статистики, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия; e-mail: victor@maslov.msk.su