Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Ю. Вострикова, Максимизация ожидаемой полезности для экспоненциальных моделей Леви с опционом и информационные процессы, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2016, том 61, выпуск 1, 26–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp5042>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 04:44:16

© 2016 г.

ВОСТРИКОВА Л.*

**МАКСИМИЗАЦИЯ ОЖИДАЕМОЙ ПОЛЕЗНОСТИ ДЛЯ
ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ЛЕВИ С ОПЦИОНОМ И
ИНФОРМАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ¹⁾**

Рассматривается задача максимизации ожидаемой полезности для экспоненциальных моделей Леви и полезностей типа HARA для случая, когда в портфеле ценных бумаг находится неликвидный актив. Этот неликвидный актив представлен опционом Европейского типа на второй актив, зависящий от первого ликвидного актива. При некоторых предположениях на процессы Леви, входящие в модель, даются выражения для информационных процессов, фигурирующих в формуле для максимальной ожидаемой полезности. В качестве примеров, рассматриваются модели Блэка и Шоулса с коррелированными броуновскими движениями, а также модели Блэка и Шоулса со скачками, представленными пуассоновским процессом.

Ключевые слова и фразы: максимизация ожидаемой полезности, экспоненциальная модель Леви, мартингальная мера, минимальная по f -дивергенции мера, дуальный метод, энтропия, информация Кульбака–Лейблера, информационные процессы.

1. Введение. Процессы Леви используются в финансовой математике в течение длительного времени. Эти модели включают в себя ряд популярных моделей со скачками, таких как обобщенные гиперболические модели и модели Variance–Gamma. Использование таких процессов для моделирования приводит к отличному соответствию как с данными о логарифме цены, отвечающими частым наблюдениям по одному фиксированному дню, так и с данными, отвечающими каждодневным наблюдениям. Класс процессов Леви достаточно широк и позволяет моделировать процессы с конечной и бесконечной вариациями, а также и процессы с конечной и бесконечной активностями. Процессы Леви не только хорошо описывают реальные данные, но и относительно просты для математических исследований (см. [8], [9] и указанные в этих работах ссылки).

*LAREMA, Département de Mathématiques, Université d'angers, 2 Bd. Lavoisier-49045, Angers Cedex 01; e-mail: lioudmila.vostrikova@univ-angers.fr

¹⁾ Настоящая работа частично финансировалась грантом ANR-09-BLAN-0084-01 кафедры математики Университета г. Анжэ, Франция.

Обозначим $X = (X_t)_{t \geq 0}$ процесс Леви размерности d , $d \geq 1$, с триплетом характеристик (b, c, K) , где $b \in \mathbf{R}^d$ — параметр сноса, c является $(d \times d)$ -матрицей, характеризующей вариацию непрерывной мартингальной компоненты процесса X , а K является мерой Леви этого процесса и удовлетворяет условию

$$\int_{\mathbf{R}^d} (\|x\|^2 \wedge 1) K(dx) < \infty. \quad (1.1)$$

Как известно, закон распределения такого процесса полностью определяется его одномерным распределением, а характеристическая функция $X_t = {}^\top (X_t^1, X_t^2, \dots, X_t^d)$, отвечающая параметру $\lambda \in \mathbf{R}^d$, равна

$$\phi_{X_t}(\lambda) = \exp\{t\psi(\lambda)\},$$

и, в свою очередь, характеристическая экспонента процесса X задается формулой

$$\psi(\lambda) = \exp \left\{ i^\top \lambda b - \frac{1}{2} {}^\top \lambda c \lambda + \int_{\mathbf{R}^d} (e^{i^\top \lambda x} - 1 - i^\top \lambda l(x)) K(dx) \right\}$$

с урезающей функцией l . Как правило, урезающая функция $l: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$ является ограниченной функцией с компактным носителем такой, что $l(x) = x$ в окрестности нуля. При стандартном выборе l , $l(x) = x \mathbf{1}_{\{\|x\| \leq 1\}}$, где $\mathbf{1}_{\{\cdot\}}$ обозначает индикатор, а $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbf{R}^d$ (более подробно о процессах Леви см. [2], [19]).

Как обычно, мы будем моделировать цену акций с помощью стохастической экспоненты от уже выбранного процесса Леви X , а именно возьмем $S = (S_t)_{t \geq 0}$ с

$$S_t = {}^\top (\mathcal{E}(X^1)_t, \mathcal{E}(X^2)_t, \dots, \mathcal{E}(X^d)_t),$$

где $\mathcal{E}(\cdot)$ обозначает экспоненту Долеан–Ладэ, а X^i , $1 \leq i \leq d$, являются компонентами процесса X . Напомним, что для каждого одномерного семимартингала X^i

$$\mathcal{E}(X^i)_t = \exp \left\{ X_t^i - \frac{1}{2} \langle X^{i,c} \rangle_t \right\} \prod_{0 \leq s \leq t} \exp\{-\Delta X_s^i\} (1 + \Delta X_s^i).$$

В предшествующем равенстве $\langle X^{i,c} \rangle$ обозначает квадратическую вариацию непрерывной мартингальной части процесса X^i , а ΔX^i обозначает скачки процесса X^i (см. подробнее [16]).

Задача максимизации ожидаемой полезности для экспоненциальных моделей Леви в одномерном случае рассматривалась во многих работах (см., например, [6], [7] и указанные в этих работах ссылки). Однако же случай максимизации полезности, когда в портфеле ценных бумаг находится неликвидный актив в виде опциона, не был полностью изучен.

Некоторые результаты в этом направлении можно найти в [3], [4], [5], [13], [17], [18]. Формулы для максимальной ожидаемой полезности были получены в случае, когда в модели фигурируют только броуновские движения, а неполнота рынка порождается активом, управление которым невозможно (см. [13], [17], [18]). Формулы для максимальной ожидаемой полезности в случае полных рынков были получены в [1]. Однако же случай, когда модели Леви ликвидного и неликвидного активов являются, с одной стороны, зависимыми, а с другой стороны, содержат скачкообразную компоненту, до сих пор не рассматривался.

Чтобы моделировать зависимые активы с помощью процессов Леви, введем два независимых процесса Леви размерности d , обозначенные $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ и характеризуемые триплетами (b_1, c_1, K_1) и (b_2, c_2, K_2) соответственно, где K_1 и K_2 удовлетворяют условию типа (1.1). Для двух обратимых матриц ρ_1 и ρ_2 с действительными компонентами, введем процесс $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$, являющийся линейной комбинацией процессов $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$, а именно

$$X_t = \rho_1 X_t^{(1)} + \rho_2 X_t^{(2)}.$$

Будем предполагать, что цены акций моделируются процессами $S^{(1)} = (S_t^{(1)})_{0 \leq t \leq T}$ и $S^{(2)} = (S_t^{(2)})_{0 \leq t \leq T'}$ с $T' > T$ и

$$S_t^{(1)} = {}^\top (\mathcal{E}(X^1)_t, \mathcal{E}(X^2)_t, \dots, \mathcal{E}(X^d)_t)$$

и

$$S_t^{(2)} = {}^\top (\mathcal{E}(X^{(2),1})_t, \mathcal{E}(X^{(2),2})_t, \dots, \mathcal{E}(X^{(2),d})_t).$$

Чтобы обеспечить положительность каждой компоненты процессов $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ предположим, что для $1 \leq i \leq d$, скачки процессов X^i and $X^{(2),i}$ удовлетворяют условию: $\Delta X_t^i > -1$, $\Delta X_t^{(2),i} > -1$. Не теряя общности, будем считать, что процентная ставка банковского счета r равна нулю.

В описанной выше ситуации, инвестор, имеющий два актива, $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$, может управлять первым активом $S^{(1)}$ с временем жизни T , а второй актив, $S^{(2)}$, с временем жизни $T' > T$, для управления ему недоступен из-за отсутствия ликвидности или из-за административных ограничений. В то же самое время, у инвестора имеется опцион европейского типа $g(X_{T'}^{(2)})$ на второй актив, где g является неотрицательной действительной борелевской функцией в $\mathbf{R}^d$, который он может продать. В такой ситуации, чтобы принять решение о продаже, для инвестора важно оценить максимальную ожидаемую полезность портфеля, содержащего опцион.

Обозначим $\Pi(\mathbb{F})$ множество самофинансируемых допустимых стратегий по отношению к фильтрации $\mathbb{F}$, порожденной процессом X . Тогда, для функции полезности u и начального капитала x_0 , максимальная ожидаемая полезность $U_T(x_0, 0)$, связанная только лишь с первым активом

$S^{(1)}$, определяется выражением

$$U_T(x_0, 0) = \sup_{\phi \in \Pi(\mathbb{F})} \mathbf{E} \left[u \left(x_0 + \int_0^T \phi_s \cdot dS_s^{(1)} \right) \right],$$

а если добавлен опцион, то максимальная ожидаемая полезность становится равной

$$U_T(x_0, g) = \sup_{\phi \in \Pi(\mathbb{G})} \mathbf{E} \left[u \left(x_0 + \int_0^T \phi_s \cdot dS_s^{(1)} + g(X_{T'}^{(2)}) \right) \right],$$

где $\Pi(\mathbb{G})$ — множество самофинансируемых допустимых стратегий по отношению к расширенной фильтрации $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{0 \leq t \leq T}$ такой, что для $t \in 0 \leq t < T$

$$\mathcal{G}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s \otimes \sigma(X_{T'}^{(2)}) \quad \text{и} \quad \mathcal{G}_T = \mathcal{F}_T \otimes \sigma(X_{T'}^{(2)}).$$

Указанный выше подход совпадает с так называемой максимизацией ожидаемой полезности при наличии искажения. В случае экспоненциальных моделей Леви, роль искажения играет $\delta = X_{T'}^{(2)} - X_T^{(2)}$, при этом информация, содержащаяся в $\mathcal{G}_T$, совпадает с информацией, содержащейся в σ -алгебре $\mathcal{F}_T^{(1)} \otimes \mathcal{F}_T^{(2)} \vee \sigma(X_{T'}^{(2)} - X_T^{(2)})$, т.е. с прогрессивной фильтрацией в момент времени T , расширенной σ -алгеброй, порожденной искажением.

В данной работе рассматривается задача нахождения максимальной ожидаемой полезности для неполных рынков и моделей, представленных экспоненциальными моделями Леви, являющимися зависимыми. Как правило, в задаче нахождения максимальной ожидаемой полезности, используются так называемые HARA-полезности. Как известно, HARA-полезности можно определить через коэффициент absolute risk aversion:

$$R(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}.$$

В этом случае,

$$R(x) = \frac{1}{A + Bx},$$

где A и B — положительные константы. Решения указанного дифференциального уравнения для u известны и представляют собой логарифмическую, степенную и экспоненциальную полезности

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln x, \quad \text{где } x \in \mathbf{R}^{+,*}, \\ u(x) &= \frac{x^p}{p}, \quad \text{где } x \in \mathbf{R}^{+,*} \text{ и } p \in (-\infty, 0) \cup (0, 1), \\ u(x) &= 1 - e^{-\gamma x}, \quad \text{где } x \in \mathbf{R} \text{ и } \gamma > 0. \end{aligned}$$

Задача максимизации ожидаемой полезности портфеля ценных бумаг с опционом в случае, когда X и $X^{(2)}$ являются семимартингалами, рассматривалась в работе [10]. Используемый метод был основан на расширении фильтрации, последующем рассмотрении соответствующей условной задачи, при условии $X_{T'}^{(2)}$ и, наконец, использовании дуального метода. В упомянутом дуальном методе, нахождение максимальной ожидаемой полезности сводится к поиску локально эквивалентной минимальной мартингальной меры, отвечающей f -дивергенции. Напомним, что f -дивергенция связана с полезностью u преобразованием Лежандра–Фенхеля по формуле

$$f(x) = \sup_{y \in \mathbf{R}} (u(y) - xy). \quad (1.2)$$

Как известно, если u — логарифмическая функция, то

$$f(x) = -\ln x - 1,$$

если u — степенная, то

$$f(x) = \frac{1-p}{p} x^{p/(p-1)},$$

и если u — экспоненциальная, то

$$f(x) = 1 - \frac{x}{\gamma} (1 + \ln \gamma) + \frac{1}{\gamma} x \ln x.$$

В разд. 2 мы приводим, для удобства читателей, некоторые результаты о максимизации ожидаемой полезности с опционом, отвечающие семимартингальным моделям. Основными результатами этого раздела являются формулы для максимальной ожидаемой полезности. Приведенные формулы содержат соответствующие информационные количества, такие как энтропия, информация Кульбака–Лейблера и интегралы типа интегралов Хеллингера. В свою очередь, эти информационные количества могут быть легко выражены через соответствующие информационные процессы.

В разд. 3 рассматриваются экспоненциальные модели Леви. А именно, проверяются условия, необходимые для применения результатов разд. 2, и даются выражения для параметров Гирсанова условной, мартингальной, минимальной по рассматриваемой f -дивергенции меры. Полученные параметры позволяют написать выражения для соответствующих информационных процессов, и затем, применить результаты разд. 2.

В разд. 4 даются выражения для информационных количеств, отвечающих моделям Блэка и Шоулса с коррелированными броуновскими движениями.

В разд. 5 рассматриваются модели Блэка и Шоулса с коррелированными броуновскими движениями и скачками, представленными пуассоновским процессом.

2. Некоторые известные результаты о максимизации ожидаемой полезности для экспоненциальных семимартингалов моделей.

2.1. Вероятностная модель и предположения. Пусть наблюдается процесс $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$, заданный на каноническом вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с фильтрацией $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$, удовлетворяющей стандартным условиям. Введенный процесс представляет собой вектор стохастических логарифмов d -мерного ликвидного актива $S^{(1)} = (S_t^{(1)})_{0 \leq t \leq T}$ такого, что

$$S_t^{(1)} = {}^\top (\mathcal{E}(X^1)_t, \mathcal{E}(X^2)_t, \dots, \mathcal{E}(X^d)_t).$$

Кроме того, имеется d -мерный семимартингал $X^{(2)}$, представляющий собой стохастические логарифмы второго неликвидного актива. Этот неликвидный актив включен в портфель в виде опциона Европейского типа, а именно $g(X_{T'}^{(2)})$, где g — положительная измеримая функция в пространстве $\mathbf{R}^d$ и $T' > T$. Для получения результатов по максимизации ожидаемой полезности, давайте введем пространство $(\Omega \times \mathbf{R}^d, \mathcal{F} \otimes \sigma(X_{T'}^{(2)}), P \times \alpha)$, где P — так называемый наблюдаемый закон распределения процесса X , а α — наблюдаемый закон распределения $X_{T'}^{(2)}$. Рассматриваемая нами на этом пространстве фильтрация будет расширенной, а именно $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{0 \leq t \leq T}$, где

$$\mathcal{G}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s \otimes \sigma(X_{T'}^{(2)}) \quad \text{и} \quad \mathcal{G}_T = \mathcal{F}_T \otimes \sigma(X_{T'}^{(2)}). \quad (2.1)$$

Заметим, что X будет семимартингалом на введенном пространстве с расширенной фильтрацией $\mathbb{G}$, поскольку процессы X и $X^{(2)}$ являются независимыми по мере $P \times \alpha$.

Теперь давайте обозначим $\mathbb{P}$ закон распределения пары $(X, X_{T'}^{(2)})$ и рассмотрим условные регулярные законы распределения P^v процесса X при условии $\{X_{T'}^{(2)} = v\}$, более точно для $A \in \mathcal{F}$ и $v \in \mathbf{R}^d$

$$P^v(A) = \mathbb{P}(A \mid X_{T'}^{(2)} = v).$$

Введем условие, нужное для того, чтобы X остался семимартингалом по мере P^v .

Предположение 1. Для каждого $v \in \mathbf{R}^d$ вероятностная мера P^v локально абсолютно непрерывна по отношению к мере P , т.е.

$$P^v \ll^{\text{loc}} P.$$

Если предположение 1 выполнено, то согласно [15] и [16], процесс X будет семимартингалом не только по мере P , но также и по мере P^v ,

$v \in \mathbf{R}^d$. Конечно, семимартингальные характеристики этого процесса изменятся в соответствии с теоремой 3.24 [16, с. 159].

Для $0 \leq t \leq T$ обозначим P_t^v и P_t сужения мер P^v и P на σ -алгебру $\mathcal{F}_t$. Чтобы избежать осложнений, связанных с измеримостью в стохастическом исчислении с процессами, зависящими от параметра v (см. [20]), давайте рассмотрим опциональные версии процессов правдоподобия $(dP_t^v/dP_t)_{0 \leq t \leq T}$ по отношению к фильтрации $\mathbb{G}$. Для этого рассмотрим условное распределение случайной величины $X_{T'}^{(2)}$ при условии $\mathcal{F}_t$, т.е.

$$\alpha^t(\omega, dv) = \mathbb{P}(X_{T'}^{(2)} \in dv \mid \mathcal{F}_t)(\omega).$$

Предположение 2. Условное распределение случайной величины $X_{T'}^{(2)}$ при условии $\mathcal{F}_t$ абсолютно непрерывно по отношению к ее закону распределения, т.е.

$$\alpha^t \ll \alpha \quad \forall t \in]0, T].$$

Согласно лемме Жакода (см. [14]) предположение 2 обеспечивает существование опциональной версии процесса $(d\alpha^t/d\alpha)_{0 \leq t \leq T}$.

З а м е ч а н и е 1. Следует также заметить, что предположение 2 можно заменить предположением, что случайная величина dP_T^v/dP_T , рассматриваемая как функция (ω, v) , является $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$ -измеримой. Действительно, в указанном случае, можно построить опциональную версию процесса, фигурирующего в предположении 2, используя результаты [20].

Как уже было сказано, следующим этапом, позволяющим получить формулы для максимальной ожидаемой полезности, является решение так называемой условной проблемы максимизации полезности, используя дуальный метод (см., например, [11]). Для этого обозначим с помощью f дуальную, по отношению к u , функцию. Пусть $\mathcal{M}_T^v$ обозначает множество эквивалентных мартингальных мер, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}_T, P_T^v)$ для семимартингальной модели $S^{(1)}$, и пусть

$$\mathcal{K}_T^v = \left\{ Q_T^v \in \mathcal{M}_T^v : \mathbf{E}_{P^v} \left| f \left(\frac{dQ_T^v}{dP_T^v} \right) \right| < \infty \right\}.$$

Напомним, что $Q_T^{v,*}$ является эквивалентной мартингальной мерой, минимизирующей f -дивергенцию, если

$$\mathbf{E}_{P^v} \left[f \left(\frac{dQ_T^{v,*}}{dP_T^v} \right) \right] = \min_{Q_T^v \in \mathcal{K}_T^v} \mathbf{E}_{P^v} \left[f \left(\frac{dQ_T^v}{dP_T^v} \right) \right].$$

Чтобы воспользоваться дуальным методом, сделаем следующее предположение.

Предположение 3. Для каждого $v \in \mathbf{R}^d$, существует эквивалентная мартингальная мера $Q_T^{v,*}$, минимизирующая f -дивергенцию, принадлежащая классу $\mathcal{K}_T^v$ и такая, что случайная величина $z_T^*(v) = dQ_T^{v,*}/dP_T^v$, рассматриваемая как функция от (ω, v) , является $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$ -измеримой, а случайная величина $\mathbf{E}_{P^v} f(z_T^*(v))$ — интегрируемой (по v) по мере α .

2.2. Существование мартингальной меры, минимизирующей f -дивергенцию. Напомним общие результаты о существовании мартингальной меры, минимизирующей f -дивергенцию. Для этого мы обозначим $\mathbb{P}_T$ сужения меры $\mathbb{P}$ на σ -алгебру $\mathcal{G}_T$, и пусть $\mathcal{M}_T$ обозначает семейство эквивалентных мартингальных мер для семимартингала $(S_t^{(1)})_{0 \leq t \leq T}$, рассматриваемого как отображение, заданное на вероятностном пространстве $(\Omega_T^{(1)} \times \mathbf{R}^d, \mathcal{F}^{(1)} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^d), \mathbb{P}_T)$ с фильтрацией $\mathbb{G}$. Обозначим

$$\mathcal{K}_T = \left\{ Q_T \in \mathcal{M}_T \mid \mathbf{E}_{\mathbb{P}} \left| f \left(\frac{dQ_T}{d\mathbb{P}_T} \right) \right| < \infty \right\}.$$

Заметим, что $\mathcal{K}_T \neq \emptyset$. На самом деле, в качестве производной Радона–Никодима меры Q_T по отношению к мере $\mathbb{P}_T$, можно взять $z_T^*(v)$ из предположения 3 с заменой v на $X_{T'}^{(2)}$. Напомним, также, что мера Q_T^* является мартингальной мерой, минимизирующей f -дивергенцию, если

$$\inf_{Q_T \in \mathcal{K}_T} \mathbf{E}_{\mathbb{P}} f \left(\frac{dQ_T}{d\mathbb{P}_T} \right) = \mathbf{E}_{\mathbb{P}} f \left(\frac{dQ_T^*}{d\mathbb{P}_T} \right).$$

Теорема 1 (см. [10]). Если предположения 1, 2 и 3 выполнены, то существует вероятностная мера $Q_T^* \in \mathcal{K}_T$, являющаяся мартингальной мерой, минимизирующей f -дивергенцию. Более того,

$$U_T(x_0, g) = \int_{\mathbf{R}^d} \mathbf{E}_{P^v} \left[u(-f'(\lambda_g(v) z_T^*(v))) \right] d\alpha(v), \quad (2.2)$$

где $\lambda_g(v)$ является решением уравнения

$$-\mathbf{E}_{P^v} \left[f'(\lambda_g(v) z_T^*(v)) \right] = x_0 + g(v). \quad (2.3)$$

2.3. Условные информационные количества и максимальная ожидаемая полезность. Предположим, что эквивалентная мартингальная мера, минимизирующая f -дивергенцию, существует и равна $Q_T^{v,*} \in \mathcal{K}_T^v$. Обозначим

$$z_T^*(v) = \frac{Q_T^{v,*}}{P_T^v}, \quad p_T^v = \frac{dP_T^v}{dP_T}.$$

Введем информационные количества, отвечающие мерам P_T^v и $Q_T^{v,*}$, а именно энтропию меры P_T^v по отношению к мере $Q_T^{v,*}$

$$\mathbf{I}(P_T^v | Q_T^{v,*}) = -\mathbf{E}_{P^v} [\ln z_T^*(v)] = -\mathbf{E}_P [p_T^v \ln z_T^*(v)],$$

затем, энтропию меры $Q_T^{v,*}$ по отношению к мере P_T^v , называемую также информацией Кульбака–Лейблера

$$\mathbf{I}(Q_T^{v,*} | P_T^v) = \mathbf{E}_{P^v} [z_T^*(v) \ln z_T^*(v)] = \mathbf{E}_P [p_T^v z_T^*(v) \ln z_T^*(v)],$$

и, наконец, интегралы типа интегралов Хеллингера

$$\mathbf{H}_T^{(q),*}(v) = \mathbf{E}_{P^v} [(z_T^*(v))^q] = \mathbf{E}_P [p_T^v (z_T^*(v))^q],$$

где $q = p/(p-1)$ и $p < 1$.

Теперь дадим выражения для максимальной ожидаемой полезности, включающие в себя введенные выше энтропии и интегралы типа Хеллингера.

Теорема 2 (см. [10]). *При выполнении предположений 1, 2 и 3, существует $\mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$ -измеримая версия введенных информационных количеств. Более того, максимальная ожидаемая полезность $U_T(x_0, g)$ равна*

(i) в случае $u(x) = \ln x$,

$$U_T(x_0, g) = \int_{\mathbf{R}^d} [\ln x_0 + g(v) + \mathbf{I}(P_T^v | Q_T^{v,*})] d\alpha(v). \quad (2.4)$$

(ii) в случае $u(x) = x^p/p$, где $p < 1$, $p \neq 0$,

$$U_T(x_0, g) = \frac{1}{p} \int_{\mathbf{R}^d} (x_0 + g(v))^p (\mathbf{H}_T^{(q),*}(v))^{1-p} d\alpha(v). \quad (2.5)$$

(iii) в случае $u(x) = 1 - e^{-\gamma x}$, где $\gamma > 0$,

$$U_T(x_0, g) = 1 - \int_{\mathbf{R}^d} \exp \{ - [\gamma (x_0 + g(v)) + \mathbf{I}(Q_T^{v,*} | P_T^v)] \} d\alpha(v). \quad (2.6)$$

2.4. Условные информационные процессы и условные информационные количества. В этом разделе мы напомним, каким образом информационные количества связаны с информационными процессами. Чтобы упростить выражения, задающие информационные процессы, в этом разделе мы будем предполагать, что процесс X является квазинепрерывным слева. Напомним, что $(P, \mathbb{F})$ -семимартингал X является квазинепрерывным слева, если для любого предсказуемого момента остановки τ , скачок процесса $\Delta X_\tau = 0$ (P -a.s.) на множестве $\{\tau < \infty\}$. Заметим, что поскольку $P^v \stackrel{\text{loc}}{\ll} P$, $(P^v, \mathbb{F})$ -семимартингал X будет также квазинепрерывным слева.

Обозначим $\beta^{v,*}$ и $Y^{v,*}$ два $(P^v, \mathbb{F})$ -предсказуемых процесса, известных как параметры Гирсанова при замене меры P^v на $Q^{v,*}$ таких, что для любого $t \geq 0$ и P^v -п.н.

$$\int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \|l(x)\| |(Y_s^{v,*}(x) - 1)| \nu^v(ds, dx) < \infty$$

и

$$\int_0^t \|c_s \beta_s^{v,*}\| ds < \infty, \quad \int_0^t {}^\top \beta_s^{v,*} c_s \beta_s^{v,*} ds < \infty.$$

В предыдущем выражении ν^v обозначает компенсатор меры скачков процесса X , l является урезающей функцией, а c служит для обозначения плотности вариации непрерывной мартингальной части процесса X по мере Лебега.

В случае логарифмической полезности, соответствующим информационным количеством является энтропия $\mathbf{I}(P_T^v | Q_T^{v,*})$, а соответствующий информационный процесс $\mathcal{I}^*(v) = (\mathcal{I}_t^*(v))_{t \in [0, T]}$ задается формулой

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_t^*(v) &= \frac{1}{2} \int_0^t {}^\top \beta_s^{v,*} c_s \beta_s^{v,*} ds \\ &\quad - \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} [\ln(Y_s^{v,*}(x)) - Y_s^{v,*}(x) + 1] \nu^v(ds, dx). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Предложение 1. *Предположим, что $Q_T^{v,*} \in \mathcal{K}_T^v$. Тогда соответствующая энтропия конечна и*

$$\mathbf{I}(P_T^v | Q_T^{v,*}) = \mathbf{E}_{P^v} \mathcal{I}_T^*(v). \quad (2.8)$$

В случае экспоненциальной полезности, рассмотрим информацию Кульбака–Лейблера $\mathbf{I}(Q_T^{v,*} | P_T^v)$ и соответствующий информационный процесс Кульбака–Лейблера $I^*(v) = (I_t^*(v))_{t \in [0, T]}$ такой, что

$$\begin{aligned} I_t^*(v) &= \frac{1}{2} \int_0^t {}^\top \beta_s^{v,*} c_s \beta_s^{v,*} ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} [Y_s^{v,*}(x) \ln(Y_s^{v,*}(x)) - Y_s^{v,*}(x) + 1] \nu^v(ds, dx). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Предложение 2. *Предположим, что $Q_T^{v,*} \in \mathcal{K}_T^v$. Тогда соответствующая информация Кульбака–Лейблера конечна и*

$$\mathbf{I}(Q_T^{v,*} | P_T^v) = \mathbf{E}_{P^v} \left[\int_0^T z_{s-}^*(v) dI_s^*(v) \right] = \mathbf{E}_{Q^{v,*}}(I_T^*(v)). \quad (2.10)$$

В случае степенной полезности рассмотрим интегралы типа Хеллингера

$$\mathbf{H}_T^{(q),*}(v) = \mathbf{E}_{P^v} [(z_T^*(v))^q],$$

где $q = p/(p-1) < 1$.

Отвечающие этим интегралам предсказуемые процессы, $h^{(q),*}(v) = (h_t^{(q),*}(v))_{t \in [0, T]}$, называемые процессами Хеллингера, определяются выражением

$$\begin{aligned} h_t^{(q),*}(v) &= \frac{1}{2} q(1-q) \int_0^t {}^\top \beta_s^{v,*} c_s \beta_s^{v,*} ds \\ &\quad - \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} [(Y_s^{v,*}(x))^q - q(Y_s^{v,*}(x) - 1) - 1] \nu^v(ds, dx). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Предложение 3. Предположим, что $Q_T^{v,*} \in \mathcal{K}_T^v$. Тогда соответствующие интегралы Хеллингера $\mathbf{H}_T^{(q),*}(v)$ конечны и

$$\mathbf{H}_T^{(q),*}(v) = 1 - \mathbf{E}_{P^v} \left[\int_0^T (z_{s-}^*(v))^q dh_s^{(q),*}(v) \right] \quad (2.12)$$

или же, в терминах стохастической экспоненты,

$$\mathbf{H}_T^{(q),*}(v) = \mathbf{E}_{R^v} \left[\mathcal{E} \left(-h^{(q),*}(v) \right)_T \right], \quad (2.13)$$

где R^v — некоторая локально абсолютно непрерывная по отношению к P^v мера.

3. Максимизация ожидаемой полезности для экспоненциальных моделей Леви с опционом. Напомним основные обозначения, необходимые для формулировки результатов о максимизации ожидаемой полезности в случае экспоненциальных моделей Леви.

3.1. Описание модели. Предположим, что имеются два независимых d -мерных процесса Леви $X^{(1)} = (X_t^{(1)})_{0 \leq t \leq T}$ и $X^{(2)} = (X_t^{(2)})_{0 \leq t \leq T'}$, выходящих из нуля, и имеющих, определяющие эти процессы триплеты характеристик (b_1, c_1, K_1) и (b_2, c_2, K_2) соответственно. Каждый такой процесс предполагается заданным на отвечающем ему каноническом вероятностном пространстве $(\Omega^{(1)}, \mathcal{F}^{(1)}, \mathbb{F}^{(1)}, P^{(1)})$ и $(\Omega^{(2)}, \mathcal{F}^{(2)}, \mathbb{F}^{(2)}, P^{(2)})$ соответственно, где $\mathbb{F}^{(1)} = (\mathcal{F}_t^{(1)})_{0 \leq t \leq T}$ и $\mathbb{F}^{(2)} = (\mathcal{F}_t^{(2)})_{0 \leq t \leq T'}$ суть натуральные фильтрации процессов, удовлетворяющие стандартным условиям. Обозначим $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ линейную комбинацию процессов $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$, более точно, для $t \in [0, T]$

$$X_t = \rho_1 X_t^{(1)} + \rho_2 X_t^{(2)}, \quad (3.1)$$

где ρ_1 и ρ_2 — обратимые матрицы с действительными числовыми компонентами. Как уже было сказано, процесс X будет рассматриваться на каноническом пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ с фильтрацией $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$, удовлетворяющей стандартным условиям.

Рассмотрим также расширенное пространство $(\Omega \times \mathbf{R}^d, \mathcal{F} \otimes \sigma(X_{T'}^{(2)}), \mathbb{G})$, отвечающее паре $(X, X_{T'}^{(2)})$ с расширенной фильтрацией $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{0 \leq t \leq T}$, где для $0 \leq t < T$

$$\mathcal{G}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s \otimes \sigma(X_{T'}^{(2)}) \quad \text{и} \quad \mathcal{G}_T = \mathcal{F}_T \otimes \sigma(X_{T'}^{(2)}).$$

Заметим, что в пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ процесс X , является, очевидно, процессом Леви. Если теперь мы введем на измеримом пространстве $(\Omega \times \mathbf{R}^d, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^d), \mathbb{G})$ вероятностную меру $P \times \alpha$, где α есть закон распределения случайной величины $X_{T'}^{(2)}$, то процесс X останется процессом Леви с теми же характеристиками. Напомним, что как и ранее, совместное распределение пары $(X, X_{T'}^{(2)})$ обозначается $\mathbb{P}$, а условное распределения процесса X при условии $X_{T'}^{(2)} = v$ обозначается P^v .

3.2. Предположения 1 и 2. В этой части нашей статьи мы покажем, что предположения 1 и 2, введенные в разд. 2, будут выполнены при следующих условиях на упомянутые выше процессы Леви.

У с л о в и е Н1. Процессы X и $X^{(2)}$ являются интегрируемыми на $[0, T]$ и $[0, T']$ соответственно.

У с л о в и е Н2. Процесс $(X, X^{(2)})$ имеет переходную плотность распределения по отношению к мере $\eta_1 \times \eta_2$, являющейся прямым произведением σ -конечных мер η_1 и η_2 в пространстве $(\mathbf{R}^d, \mathcal{B}(\mathbf{R}^d))$, а маргинальные переходные плотности распределения f и $f^{(2)}$ процессов X и $X^{(2)}$ по мерам η_1 и η_2 соответственно являются строго положительными.

З а м е ч а н и е 2. Следует отметить, что в случае, когда η_1 и η_2 являются мерами Лебега, условие Н2 эквивалентно существованию маргинальных строго положительных переходных плотностей f_1 и f_2 распределений процессов $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$. Этот факт вытекает из независимости процессов $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ и соответствующей формулы для вычисления плотности.

Предложение 4. При выполнении условий (Н1) и (Н2) имеют место предположения 1 и 2 разд. 2.1, а также существует функция $F_v: [T' - T, T'] \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^+$, зависящая от параметра $v \in \mathbf{R}^d$, такая, что

$$\frac{d\alpha^t}{d\alpha}(v) = \frac{F_v(T' - t, X_t)}{F_v(T', 0)}. \quad (3.2)$$

Более того,

$$\frac{d\alpha^t}{d\alpha} = \mathcal{E}(M)_t,$$

где $M = (M_t)_{0 \leq t \leq T}$ есть не что иное как $(P, \mathbb{F})$ мартингал, такой, что

$$M_t = \int_0^t {}^\top \beta_s^{v,P} X_s^c + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} l(x)(Y_s^{v,P}(x) - 1) dK(x) ds,$$

а $(\beta^{v,P}, Y^{v,P})$ являются параметрами Гирсанова, отвечающими замене меры P на меру P^v , и K — не что иное как мера Леви процесса X .

Если $F_v \in C_b^{1,2}([T' - T, T'] \times \mathbf{R}^d)$, а c — обратимая матрица, то упомянутые параметры Гирсанова могут быть вычислены по формулам:

$${}^\top \beta_s^{v,P} = \left(\frac{\partial \ln F_v}{\partial x_1}(T' - s, X_{s-}), \dots, \frac{\partial \ln F_v}{\partial x_d}(T' - s, X_{s-}) \right)$$

и для $x \in \mathbf{R}^d \setminus \{0\}$

$$Y_s^{v,P}(x) = \frac{F_v(T - s, X_{s-} + x)}{F_v(T' - s, X_{s-})}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Условное распределение процесса X при условии $X_{T'}^{(2)} = v$ совпадает с распределением процесса $\rho_1 X^{(1)} + \rho_2 V^{(2)}$, где $V^{(2)}$ — мост Леви процесса Леви $X^{(2)}$ с начальной точкой $(0, 0)$ и конечной точкой (v, T') . При выполнении условия (H2) и согласно [12] закон распределения $(V_t^{(2)})_{0 \leq t \leq T}$ абсолютно непрерывен по отношению к закону распределения $(X_t^{(2)})_{0 \leq t \leq T}$ и

$$\frac{dP_{V^{(2)}}}{dP_{X^{(2)}}}(T, v) = \frac{f^{(2)}(T' - T, v - X_T^{(2)})}{f^{(2)}(T', v)}. \quad (3.3)$$

Поскольку процесс $X^{(1)}$ независим от $X^{(2)}$ и $V^{(2)}$, условное распределение процесса X при условии $X^{(2)}$ и условное распределение X при условии $V^{(2)}$ совпадают как отображения по вероятностной мере P . Обозначим это отображение $q(A, x)$, где $A \in \mathcal{F}_T, x \in \mathbf{R}^d$. Тогда

$$\begin{aligned} P(A) &= \int_{\mathbf{R}^d} P(\rho_1 X^{(1)} + \rho_2 X^{(2)} \in A \mid X^{(2)} = x) dP_{X^{(2)}}(x) \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} q(A, x) dP_{X^{(2)}}(x) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} P^v(A) &= P(\rho_1 X^{(1)} + \rho_2 V^{(2)} \in A) \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} P(\rho_1 X^{(1)} + \rho_2 V^{(2)} \in A \mid V^{(2)} = x) dP_{V^{(2)}}(x) \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} q(A, x) \frac{dP_{V^{(2)}}}{dP_{X^{(2)}}}(T, v) dP_{X^{(2)}}(x). \end{aligned}$$

Наконец, если $P(A) = 0$, то $q(A, x) = 0$ ($P_{X^{(2)}}$ -п.н.) и, значит, $P^v(A) = 0$. А это означает, что предположение 1 выполняется.

Из предположения 1 и формулы Байеса в свою очередь следует, что

$$\begin{aligned} P(X_{T'}^{(2)} \in dv \mid X_t = y) &= \frac{P(X_{T'}^{(2)} \in dv, X_t \in dy)}{P(X_t \in dy)} \\ &= \frac{P(X_t \in dy \mid X_{T'}^{(2)} = v) P(X_{T'}^{(2)} \in dv)}{P(X_t \in dy)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что и предположение 2 выполняется. Используя марковское свойство процесса $X^{(2)}$, получаем

$$\begin{aligned} \alpha^t(dv) &= P(X_{T'}^{(2)} \in dv \mid \mathcal{F}_t) = P(X_{T'}^{(2)} \in dv \mid X_t) \\ &= P(X_{T'}^{(2)} - X_t^{(2)} + X_t^{(2)} \in dv \mid X_t) \\ &= P(\tilde{X}_{T'-t}^{(2)} + X_t^{(2)} \in dv), \end{aligned}$$

где $\tilde{X}^{(2)}$ является процессом, независимым от $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$, распределение которого совпадает с распределением процесса $X^{(2)}$. Проведенные рассуждения показывают, что $\alpha^t(dv)$ есть функция $T' - t$, X_t и параметра v . Обозначим эту функцию $F_v(T' - t, X_t)$. Заметим, что $\alpha^0(dv) = \alpha(dv) = F_v(T', 0)$, поскольку $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Отсюда следует (3.2).

Теперь, используя формулу Ито, получаем

$$\begin{aligned} F_v(T' - t, X_t) &= F_v(T', 0) - \int_0^t \frac{\partial F_v}{\partial s}(T' - s, X_{s-}) ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial F_v}{\partial x_i}(T' - s, X_{s-}) dX_s^i \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 F_v}{\partial x_i \partial x_j}(T' - s, X_{s-}) d\langle X^{i,c}, X^{j,c} \rangle_s \\ &\quad + \sum_{0 < s \leq t} F_v(T' - s, X_s) - F_v(T' - s, X_{s-}) \\ &\quad - \sum_{i=1}^d \frac{\partial F_v}{\partial x_i}(T' - s, X_{s-}) \Delta X_s^i. \end{aligned}$$

При выполнении условия $P_t^v \ll P_t$ и $\alpha^t \ll \alpha$ для $t \in]0, T]$ из леммы Жакода (см. [14]) вытекает, что $(d\alpha^t/d\alpha)_{0 \leq t \leq T}$ является $(P, \mathbb{F})$ -мартингалом. Для упрощения обозначений положим $p_t^v = (d\alpha^t/d\alpha)(v)$ для $t \in [0, T]$. Теперь давайте разделим предыдущее выражение для $F_v(T' - t, X_t)$ на $F_v(T', 0)$ и идентифицируем его непрерывную мартингальную часть. Таким образом, получаем, что

$$p_t^{v,c} = \frac{1}{F_v(T', 0)} \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial F_v}{\partial x_i}(T' - s, X_{s-}) dX_s^{i,c},$$

и, следовательно,

$$\langle p^{v,c}, X^{j,c} \rangle_t = \frac{1}{F_v(T', 0)} \sum_{i=1}^d \int_0^t c_{i,j} \frac{\partial F_v}{\partial x_i}(T' - s, X_{s-}) ds.$$

Наконец, согласно теореме Гирсанова,

$$\langle p^{v,c}, X^{j,c} \rangle_t = \sum_{i=1}^d \int_0^t c_{i,j} (\beta_s^{v,P})^i p_{s-}^v ds.$$

Поскольку матрица с обратима, отсюда получаем формулу для $\beta_t^{v,P}$.

Теперь вычислим скачки p^v :

$$\Delta p_t^v = \frac{F_v(T' - t, X_t) - F_v(T' - t, X_{t-})}{F_v(T', 0)}$$

и

$$\frac{\Delta p_t^v}{p_{t-}^v} = \frac{F_v(T' - t, X_{t-} + \Delta X_t)}{F_v(T' - t, X_{t-})} - 1.$$

Тогда согласно теореме 3.24 [16, с. 159]

$$Y_t^{v,P} = \frac{F_v(T' - t, X_{t-} + x)}{F_v(T' - t, X_{t-})}$$

и, значит, наше утверждение доказано.

3.3. Условные локально эквивалентные мартингалные меры. Основная трудность, связанная с применением результатов разд. 2 состоит в проверке предположения 3. Чтобы осуществить такую проверку, сначала опишем множества условных локально эквивалентных маргинальных мер. Этот этап может быть осуществлен с помощью семимартингальной техники.

Напомним, что процесс X определяется формулой (3.1). Как и ранее, обозначим $(\beta^{v,P}, Y^{v,P})$ параметры Гирсанова, отвечающие замене меры P на P^v ; $\mathcal{M}(P^v)$ — семейство локально эквивалентных по отношению к P^v мартингалных мер Q^v . Обозначим (β^v, Y^v) параметры Гирсанова, отвечающие замене меры P^v на Q^v . Заметим, что X является $(P^v, \mathbb{F})$ -семимартингалом, и, следовательно, также $(Q^v, \mathbb{F})$ -семимартингалом. В приведенном ниже предложении, дается триплет предсказуемых характеристик семимартингала X по мере Q^v .

Предложение 5. *Триплет (B^v, C^v, ν^v) предсказуемых характеристик $(Q^v, \mathbb{F})$ -семимартингала X , определяется по следующим формулам:*

$$\begin{aligned} B_t^v &= (\rho_1 b_1 + \rho_2 b_2)t + \rho_2 c_2 \int_0^t \beta_s^{v,P} ds \\ &+ \rho_2 \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \vec{l}_2(x) (Y_s^{v,P}(\rho_2^{-1}x) - 1) (K_2 \circ \rho_2^{-1})(dx) ds \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \vec{l}(x) (Y_s^v(x) - 1) K_s^{v,P}(dx) ds \\ &+ (\rho_1 c_1^\top \rho_1 + \rho_2 c_2^\top \rho_2) \int_0^t \beta_s^v ds, \\ C_t^v &= (\rho_1 c_1^\top \rho_1 + \rho_2 c_2^\top \rho_2)t, \\ d\nu^v(x, s) &= Y_s^v K_s^{v,P}(dx) ds, \end{aligned}$$

где $K_s^{v,P}(dx) = (K_1 \circ \rho_1^{-1})(dx) + Y_s^{v,P}(\rho_2^{-1}x) (K_2 \circ \rho_2^{-1})(dx)$.

Более того, эквивалентная по отношению к P_T^v маргинальная мера Q_T^v определяется из следующего условия: для $s \in [0, T]$

$$\begin{aligned} &\rho_1 b_1 + \rho_2 b_2 + \rho_2 c_2 \beta_s^{v,P} + \rho_2 \int_{\mathbf{R}^d} \vec{l}_2(x) (Y_s^{v,P}(\rho_2^{-1}x) - 1) (K_2 \circ \rho_2^{-1})(dx) \\ &+ \int_{\mathbf{R}^d} \vec{l}(x) (Y_s^v(x) - 1) K_s^{v,P}(dx) + (\rho_1 c_1^\top \rho_1 + \rho_2 c_2^\top \rho_2) \beta_s^v = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Доказательство. Применим теорему Гирсанова для последовательной замены мер $P \rightarrow P^v \rightarrow Q^v$. Для этого напишем семимартингальное разложение процесса X по исходной мере P :

$$X_t = B_t + X_t^c + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \overrightarrow{l(x)} (\mu_X(dx, ds) - \nu_X(dx, ds)) + \sum_{s \leq t} (\Delta X_s - l(\Delta X_s)).$$

В этом разложении B обозначает снос, X^c является непрерывной маргинальной частью, а μ_X и ν_X обозначают меру скачков и отвечающий ей компенсатор, кроме того l есть урезающая функция, $l(x) = x \mathbf{1}_{\{\|x\| \leq 1\}}$, $x \in \mathbf{R}^d$. Следует также заметить, что интеграл на $\mathbf{R}^d$ в предшествующем выражении берется покомпонентно, а именно, для каждого $x \in \mathbf{R}^d$ и $l(x) = {}^\top(l^1(x), \dots, l^d(x))$ интеграл

$$\int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \overrightarrow{l(x)} (\mu_X(dx, ds) - \nu_X(dx, ds))$$

есть вектор с компонентами

$$\int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} l^i(x) (\mu_X(dx, ds) - \nu_X(dx, ds)),$$

где $1 \leq i \leq d$. Мы используем обозначения $\overrightarrow{l(x)}$, чтобы подчеркнуть упомянутую особенность интегрирования.

Напишем также семимартингальные разложения процессов $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$:

$$\begin{aligned} X_t^{(1)} &= b_1 t + X_t^{(1),c} + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \overrightarrow{l_1(x)} (\mu_{X^{(1)}}(dx, ds) - K_1(dx)ds) \\ &\quad + \sum_{s \leq t} (\Delta X_s^{(1)} - l_1(\Delta X_s^{(1)})), \\ X_t^{(2)} &= b_2 t + X_t^{(2),c} + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \overrightarrow{l_2(x)} (\mu_{X^{(2)}}(dx, ds) - K_2(dx)ds) \\ &\quad + \sum_{s \leq t} (\Delta X_s^{(2)} - l_2(\Delta X_s^{(2)})) \end{aligned}$$

с урезающими функциями $l_1(x) = x \mathbf{1}_{\{\|\rho_1 x\| \leq 1\}}$ и $l_2(x) = x \mathbf{1}_{\{\|\rho_2 x\| \leq 1\}}$ соответственно.

Теперь сравним линейную комбинацию семимартингальных разложений процессов $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$, приведенных выше, с семимартингальным разложением самого процесса X . Мы можем легко идентифицировать снос процесса X , равный $(\rho_1 b_1 + \rho_2 b_2)t$, $t \geq 0$, а также непрерывную мартингальную компоненту процесса X , которая равна $\rho_1 X^{(1),c} + \rho_2 X^{(2),c}$. Поскольку $X_t^{(1),c}$ и $X_t^{(2),c}$ являются независимыми процессами с квадратическими вариациями $c_1 t$, $t \geq 0$, и $c_2 t$, $t \geq 0$, то квадратическая вариация непрерывной мартингальной части процесса X равна $(\rho_1 c_1 {}^\top \rho_1 + \rho_2 c_2 {}^\top \rho_2)t$, $t \geq 0$.

Для информации о скачкообразной компоненте процесса X , напомним меру скачков этого процесса:

$$\mu_X(\omega, dt, dx) = \sum_s \mathbf{1}_{\{\Delta X_s(\omega) \neq 0\}} \delta_{\{(s, \Delta X_s(\omega))\}}(dt, dx),$$

где $\delta_{\{(s, \Delta X_s(\omega))\}}$ — мера Дирака в точке $(s, \Delta X_s(\omega))$. Кроме того,

$$\Delta X = \rho_1 \Delta X^{(1)} + \rho_2 \Delta X^{(2)}, \quad l(\Delta X) = \rho_1 l_1(\Delta X^{(1)}) + \rho_2 l_2(\Delta X^{(2)}).$$

Известно, что скачки двух независимых процессов Леви не могут происходить одновременно. На самом деле, скачки процесса Леви являются тотально недостижимыми моментами остановки. Если предположить, что два независимых процесса Леви $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ имеют скачки в моменты τ_1 и τ_2 с $\tau_1 = \tau_2$ (P -п.н.), тогда для всех $A \in \mathbf{R}^d$

$$P(\{\tau_1 \in A\} \cap \{\tau_2 \in A\}) = P(\{\tau_1 \in A\}) = P^2(\{\tau_1 \in A\}).$$

Отсюда вытекает, что $P(\{\tau_1 \in A\}) = 0$ или 1, и закон распределения τ_1 может быть только мерой Дирака. Но тогда существует $t_0 \in \mathbf{R}^+$ такое, что $P(\tau_1 = t_0) = 1$, а это противоречит тому, что τ_1 тотально недостижим. Значит, P -п.н.

$$\begin{aligned} \{\Delta X_s(\omega) \neq 0\} &= \{\rho_1 \Delta X_s^{(1)}(\omega) \neq 0\} \cup \{\rho_2 \Delta X_s^{(2)}(\omega) \neq 0\} \\ &= \{\rho_1 \Delta X_s^{(1)}(\omega) \neq 0\} \cap \{\Delta X_s^{(2)}(\omega) = 0\} \\ &\quad \cup \{\Delta X_s^{(1)}(\omega) = 0\} \cap \{\rho_2 \Delta X_s^{(2)}(\omega) \neq 0\}. \end{aligned}$$

Как следствие, получаем, что

$$\begin{aligned} \mu_X(\omega, dt, dx) &= \sum_s \mathbf{1}_{\{\Delta X_s^{(1)}(\omega) \neq 0\}} \delta_{\{(s, \rho_1 \Delta X_s^{(1)}(\omega))\}}(dt, dx) \\ &\quad + \sum_s \mathbf{1}_{\{\Delta X_s^{(2)}(\omega) \neq 0\}} \delta_{\{(s, \rho_2 \Delta X_s^{(2)}(\omega))\}}(dt, dx) \\ &= \mu_{\rho_1 X^{(1)}}(\omega, dt, dx) + \mu_{\rho_2 X^{(2)}}(\omega, dt, dx). \end{aligned}$$

Далее, процессы $\rho_1 X^{(1)}$ и $\rho_2 X^{(2)}$ являются процессами Леви с отвечающими им мерами Леви $K_1(\rho_1^{-1}A)$ и $K_2(\rho_2^{-1}A)$ соответственно, где $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$. В связи с указанными фактами, триплет предсказуемых характеристик (B, C, ν) процесса X определяется по следующим формулам:

$$\begin{aligned} B_t &= (\rho_1 b_1 + \rho_2 b_2)t, \\ C_t &= (\rho_1 c_1^\top \rho_1 + \rho_2 c_2^\top \rho_2)t, \\ d\nu(x, t) &= ((K_1 \circ \rho_1^{-1})(dx) + (K_2 \circ \rho_2^{-1})(dx)) dt. \end{aligned}$$

Давайте теперь напишем формулы для семимартингаловых характеристик (B^V, C^V, ν^V) моста Леви $V^{(2)}$:

$$\begin{aligned} B_t^V &= b_2 t + c_2 \int_0^t \beta_s^{v,P} ds + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \overrightarrow{l_2}(x) (Y_s^{v,P}(x) - 1) K_2(dx) ds, \\ C_t^V &= c_2 t, \\ d\nu^V(x, t) &= Y_t^{v,P}(x) K_2(dx) dt. \end{aligned}$$

Наконец, чтобы написать семимартингаловые характеристики линейной комбинации процессов $X^{(1)}$ и $V^{(2)}$, заметим, что процессы $X^{(1)}$ и $V^{(2)}$ являются независимыми по мере P^v . Поэтому, чтобы получить формулы для характеристик из предыдущих формул, достаточно добавить в формулу для сноса, дополнительный снос, возникающий от замены меры P^v на меру Q^v , а также в формуле для компенсатора, умножить соответствующую меру Леви на Y_s^v . Таким образом, получаем указанные формулы для характеристик.

Процесс X является, как известно, $(Q^v, \mathbb{F})$ -мартингалом тогда и только тогда, когда снос процесса по мере Q^v равен нулю при всех значениях t . Таким образом, получаем указанную формулу (3.4).

3.4. Условные информационные процессы. Для упрощения обозначений положим

$$b = \rho_1 b_1 + \rho_2 b_2, \quad c = \rho_1 c_1^\top \rho_1 + \rho_2 c_2^\top \rho_2.$$

Напомним, что (b, c, K) являются параметрами процесса Леви X по так называемой наблюдаемой мере P .

Теорема 3. *Предположим, что $u(x) = \ln x$ и что условия (H1) и (H2) выполнены. Если существует предсказуемый процесс $\lambda^v = (\lambda_s^v)_{0 \leq s \leq T}$ со значениями в $\mathbf{R}^d$ такой, что для всех $s \in [0, T]$*

$$\begin{aligned} b + c\lambda_s^v + \rho_2 c_2 \beta_s^{v,P} + \rho_2 \int_{\mathbf{R}^d} \overrightarrow{l_2}(x) [Y_s^{v,P}(\rho_2^{-1}x) - 1] (K_2 \circ \rho_2^{-1})(dx) \\ + \int_{\mathbf{R}^d} \overrightarrow{l}(x) \frac{\lambda_s^v l(x)}{1 - \lambda_s^v l(x)} K_s^{v,P}(dx) = 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

и такой, что $1 - \lambda_s^v l(x) > 0$ ($K^{v,P}$ -a.s.), то параметры Гирсанова эквивалентной, мартингаловой, минимизирующей f -дивергенцию меры $Q_T^{v,}$ определяются из следующих соотношений:*

$$\beta_s^{v,*} = \lambda_s^v, \quad Y_s^{v,*}(x) = \frac{1}{1 - \lambda_s^v l(x)}.$$

Соответствующий информационный процесс $\mathcal{I}^(v)$ определяется по формуле (2.7), а соответствующая ему энтропия, по формуле (2.8). Если отвечающая информационному процессу энтропия конечна, то полученная мера будет эквивалентной, мартингаловой и минимальной.*

Доказательство. Чтобы определить параметры Гирсанова эквивалентной, мартингальной и минимальной по отношению к соответствующей f -дивергенции меры, будем минимизировать энтропию меры P_T^v по отношению к мере Q_T^v :

$$\mathbf{I}(P_T^v | Q_T^v) = \mathbf{E}_{P_T^v}(\mathcal{J}_T(v)),$$

где

$$\mathcal{J}_T(v) = \frac{1}{2} \int_0^T {}^\top \beta_s^v c \beta_s^v ds - \int_0^T \int_{\mathbf{R}^d} (\ln Y_s^v(x) - Y_s^v + 1) K_s^{v,P}(dx) ds,$$

с ограничением, таким, что для $s \in [0, T]$

$$R(\beta_s^v, Y_s^v) = 0. \quad (3.6)$$

Входящая в ограничение функция $R(\beta_s^v, Y_s^v)$ определяется по формуле

$$\begin{aligned} R(\beta_s^v, Y_s^v) = & b + \rho_2 c_2 \beta_s^{v,P} + \int_{\mathbf{R}^d} \overrightarrow{l(x)} [Y_s^{v,P}(\rho_2^{-1}x) - 1] (K_2 \circ \rho_2^{-1})(dx) \\ & + c \beta_s^v + \int_{\mathbf{R}^d} \overrightarrow{l(x)} (Y_s^v(x) - 1) K_s^{v,P}(dx). \end{aligned}$$

Согласно традиционным подходам к задаче минимизации, введем функцию

$$G(\beta_s^v, Y_s^v) = \frac{1}{2} {}^\top \beta_s^v c \beta_s^v - \int_{\mathbf{R}^d} (\ln(Y_s^v(x)) - Y_s^v + 1) K_s^{v,P}(dx) - {}^\top \lambda_s^v R(\beta_s^v, Y_s^v),$$

где λ_s^v — множитель Лагранжа. Указанная функция является выпуклой непрерывно дифференцируемой функцией от (β_s^v, Y_s^v) , и, значит, экстремальными точками могут быть только стационарные точки этой функции, определяемые из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} {}^\top \left(\frac{\partial G}{\partial \beta_1}(\beta_s^v, Y_s^v), \dots, \frac{\partial G}{\partial \beta_d}(\beta_s^v, Y_s^v) \right) = c(\beta_s^v - \lambda_s^v) = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial Y}(\beta_s^v, Y_s^v) = \int_{\mathbf{R}^d} \left(1 - \frac{1}{Y_s^v(x)} - {}^\top \lambda_s^v l(x) \right) K_s^{v,P}(dx) = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы ясно, что $\beta_s^v = \lambda_s^v$. Решение второго уравнения неединственно. Возьмем одно из его решений, а именно

$$Y_s^v(x) = \frac{1}{1 - {}^\top \lambda_s^v l(x)}.$$

В силу выпуклости функции G , значение этой функции во всех стационарных точках одинаково. Давайте теперь подставим найденные параметры β_s^v и Y_s^v в мартингальное условие (3.5), найдем λ_s^v , и, следовательно, $\beta^{v,*}$ и $Y^{v,*}$.

Поскольку функция G выпуклая, получаем

$$\begin{aligned} & G(\beta_s^v, Y_s^v) - G(\beta_s^{v,*}, Y_s^{v,*}) \\ & \geq {}^\top \left(\frac{\partial G}{\partial \beta_1}(\beta_s^{v,*}, Y_s^{v,*}), \dots, \frac{\partial G}{\partial \beta_d}(\beta_s^{v,*}, Y_s^{v,*}) \right) (\beta_s^v - \beta_s^{v,*}) \\ & \quad + \frac{\partial G}{\partial Y}(\beta_s^{v,*}, Y_s^{v,*})(Y_s^v - Y_s^v) = 0. \end{aligned}$$

Теперь проинтегрируем приведенное выше неравенство по s и возьмем математическое ожидание по мере P_T^v . В результате получим, что соответствующая мера является минимальной, т.е.

$$\mathbf{I}(P_T^v | Q_T^v) \geq \mathbf{I}(P_T^v | Q_T^{v,*}).$$

Теорема 4. *Предположим, что $u(x) = x \ln(x) + x - 1$ и что условия (Н1) и (Н2) выполняются. Тогда в случае, когда существует предсказуемый процесс $\lambda^v = (\lambda_s^v)_{0 \leq s \leq T}$ со значениями в $\mathbf{R}^d$ такой, что для всех $s \in [0, T]$*

$$\begin{aligned} & b + c\lambda_s^v + \rho_2 c_2 \beta_s^{v,P} + \rho_2 \int_{\mathbf{R}^d} \vec{l}_2(x) [Y_s^{v,P}(\rho_2^{-1}x) - 1] (K_2 \circ \rho_2^{-1})(dx) \\ & \quad + \int_{\mathbf{R}^d} \vec{l}(x) [\exp({}^\top \lambda_s^v l(x)) - 1] K_s^{v,P}(dx) = 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

параметры Гирсанова эквивалентной, мартингальной, минимизирующей f -дивергенцию меры $Q_T^{v,*}$ вычисляются по формуле:

$$\beta_s^{v,*} = \lambda_s^v, \quad Y_s^{v,*}(x) = \exp({}^\top \lambda_s^v l(x)).$$

Более того, соответствующий информационный процесс $I^*(v)$ задается формулой (2.9), а отвечающая ему информация Кульбака–Лейблера определяется из (2.10). Если полученная информация Кульбака–Лейблера конечна, то найденная мера будет эквивалентной, мартингальной, минимальной мерой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Чтобы найти параметры Гирсанова минимальной, мартингальной меры, минимизируется информация Кульбака–Лейблера меры Q_T^v по отношению к мере P_T^v , а именно

$$\mathbf{I}(Q_T^v | P_T^v) = \mathbf{E}_{Q_T^v}(I_T(v)),$$

где

$$I_T(v) = \frac{1}{2} \int_0^T {}^\top \beta_s^v c \beta_s^v ds + \int_0^T \int_{\mathbf{R}^d} (Y_s^v(x) \ln(Y_s^v(x)) - Y_s^v + 1) K_s^{v,P}(dx) ds,$$

с ограничением (3.6). Для этого вводится функция

$$G(\beta_s^v, Y_s^v) = \frac{1}{2} {}^\top \beta_s^v c \beta_s^v + \int_{\mathbf{R}^d} (Y_s^v(x) \ln(Y_s^v(x)) - Y_s^v + 1) K_s^{v,P}(dx) - {}^\top \lambda_s^v R(\beta_s^v, Y_s^v)$$

с множителем Лагранжа λ_s^v . Поскольку эта функция является выпуклой непрерывно-дифференцируемой функцией, экстремальные точки являются стационарными точками этой функции. В свою очередь, стационарные точки определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} {}^\top \left(\frac{\partial G}{\partial \beta_1}(\beta_s^v, Y_s^v), \dots, \frac{\partial G}{\partial \beta_d}(\beta_s^v, Y_s^v) \right) = c(\beta_s^v - \lambda_s^v) = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial Y}(\beta_s^v, Y_s^v) = \int_{\mathbf{R}^d} (\ln(Y_s^v(x)) - {}^\top \lambda_s^v l(x)) K_s^{v,P}(dx) = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим, что $\beta_s^v = \lambda_s^v$. Как уже отмечалось, решение второго уравнения не единственно, а одно из решений будет равно

$$Y_s^v(x) = \exp({}^\top \lambda_s^v l(x)).$$

При таком выборе стационарной точки, процесс λ^v , находится из условия (3.7).

Из выпуклости функции G получаем, что

$$\begin{aligned} & G(\beta_s^v, Y_s^v) - G(\beta_s^{v,*}, Y_s^{v,*}) \\ & \geq {}^\top \left(\frac{\partial G}{\partial \beta_1}(\beta_s^{v,*}, Y_s^{v,*}), \dots, \frac{\partial G}{\partial \beta_d}(\beta_s^{v,*}, Y_s^{v,*}) \right) (\beta_s^v - \beta_s^{v,*}) \\ & + \frac{\partial G}{\partial Y}(\beta_s^{v,*}, Y_s^{v,*})(Y_s^v - Y_s^{v,*}) = 0. \end{aligned}$$

Далее, чтобы показать, что найденная мера минимальная, предыдущее неравенство интегрируется по s , затем берется математическое ожидание по мере Q_T^v . В результате, получаем, что

$$\mathbf{I}(Q_T^v | P_T^v) \geq \mathbf{I}(Q_T^{v,*} | P_T^v).$$

Теорема 5. *Предположим, что $u(x) = x^p$, $p < 1$, и что выполнены условия (H1) и (H2). В случае, когда существует предсказуемый процесс $\lambda^v = (\lambda_s^v)_{0 \leq s \leq T}$ со значениями в $\mathbf{R}^d$ такой, что для всех $s \in [0, T]$ и $q = p/(p-1)$*

$$\begin{aligned} & b + \frac{c\lambda_s^v}{q(1-q)} + \rho_2 c_2 \beta_s^{v,P} + \rho_2 \int_{\mathbf{R}^d} \overrightarrow{l_2}(x) [Y_s^{v,P}(\rho_2^{-1}x) - 1] (K_2 \circ \rho_2^{-1})(dx) \\ & + \int_{\mathbf{R}^d} \overrightarrow{l}(x) \left[\left(1 - \frac{{}^\top \lambda_s^v l(x)}{q} \right)^{1/(q-1)} - 1 \right] K_s^{v,P}(dx) = 0, \end{aligned}$$

и, такой, что $1 - {}^\top \lambda_s^v l(x)/q > 0$ ($K^{v,P}$ -a.s.), параметры Гирсанова соответствующей эквивалентной, мартингальной, минимизирующей f -дивергенцию меры $Q_T^{v,*}$ определяются по следующим формулам:

$$\beta_s^{v,*} = \frac{1}{q(1-q)} \lambda_s^v, \quad Y_s^{v,*}(x) = \left(1 - \frac{{}^\top \lambda_s^v l(x)}{q}\right)^{1/(q-1)}.$$

Более того, соответствующий процесс Хеллингера определяется из (2.11), а отвечающий процессу интеграл Хеллингера вычисляется по формуле (2.13). Если полученный интеграл Хеллингера конечен, то найденная мера будет эквивалентной, мартингальной, минимальной мерой.

Доказательство. Чтобы найти параметры Гирсанова минимальной мартингальной меры, минимизируем интеграл Хеллингера мер Q_T^v и P_T^v

$$\mathbf{H}_T^{(q)}(v) = \mathbf{E}_{R_T^v} \exp \left(-h_T^{(q)}(v) \right),$$

где

$$\begin{aligned} h_T^{(q)}(v) &= \frac{q(1-q)}{2} \int_0^T {}^\top \beta_s^v c \beta_s^v ds \\ &\quad - \int_0^T \int_{\mathbf{R}^d} ((Y_s^v(x))^q - q(Y_s^v - 1) - 1) K_s^{v,P}(dx) ds, \end{aligned}$$

с ограничением (3.6). Для этого введем функцию

$$\begin{aligned} G(\beta_s^v, Y_s^v) &= \frac{q(1-q)}{2} {}^\top \beta_s^v c \beta_s^v ds \\ &\quad - \int_{\mathbf{R}^d} ((Y_s^v(x))^q - q(Y_s^v - 1) - 1) K_s^{v,P}(dx) - {}^\top \lambda_s^v R(\beta_s^v, Y_s^v), \end{aligned}$$

где λ_s^v — множитель Лагранжа. Заметим, что функция G — выпуклая и непрерывно-дифференцируемая. Для нахождения минимума функции, найдем ее стационарные точки, являющиеся решением следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} {}^\top \left(\frac{\partial G}{\partial \beta_1}(\beta_s^v, Y_s^v), \dots, \frac{\partial G}{\partial \beta_d}(\beta_s^v, Y_s^v) \right) = c(q(1-q)\beta_s^v - \lambda_s^v) = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial Y}(\beta_s^v, Y_s^v) = - \int_{\mathbf{R}^d} [q(Y_s^v(x))^{q-1} - q + {}^\top \lambda_s^v l(x)] K_s^{v,P}(dx) = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим, что $\beta_s^v = \lambda_s^v / (q(1-q))$. Одним из решений второго уравнения является

$$Y_s^v(x) = \left(1 - \frac{{}^\top \lambda_s^v l(x)}{q}\right)^{1/(q-1)}.$$

Подставим теперь найденные значения в уравнение (3.7), чтобы найти λ_s^v , а следовательно, и $\beta_s^{v,*}$ и $Y_s^{v,*}$.

Поскольку функция G выпуклая,

$$\begin{aligned} & G(\beta_s^v, Y_s^v) - G(\beta_s^{v,*}, Y_s^{v,*}) \\ & \geq {}^\top \left(\frac{\partial G}{\partial \beta_1}(\beta_s^{v,*}, Y_s^{v,*}), \dots, \frac{\partial G}{\partial \beta_d}(\beta_s^{v,*}, Y_s^{v,*}) \right) (\beta_s^v - \beta_s^{v,*}) \\ & \quad + \frac{\partial G}{\partial Y}(\beta_s^{v,*}, Y_s^{v,*})(Y_s^v - Y_s^{v,*}) = 0. \end{aligned}$$

Теперь нам остается лишь проинтегрировать полученное выше неравенство по s , учесть, что экспоненциальная функция также выпукла, и вычислить математическое ожидание по мере R_T^v . В итоге получаем, что $\mathbf{H}_T^{(q)} \geq \mathbf{H}_T^{(q),*}$, а это означает, что мера $Q_T^{v,*}$ является минимальной.

4. Модель Блэка и Шоулса с коррелированными броуновскими движениями. Обозначим $(W^{(1)}, W^{(2)})$ два независимых стандартных броуновских движения. Пусть также $\mu_1, \mu_2 \in \mathbf{R}$ и $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$. Положим

$$X_t^{(1)} = \mu_1 + \sigma_1 W_t^{(1)}, \quad X_t^{(2)} = \mu_2 + \sigma_2 W_t^{(2)},$$

и, кроме того, выбрав ρ , $|\rho| \leq 1$, рассмотрим процесс

$$X_t = \sqrt{1 - \rho^2} X_t^{(1)} + \rho X_t^{(2)}.$$

Полученный процесс X будет броуновским движением с коэффициентом сноса

$$\mu = \sqrt{1 - \rho^2} \mu_1 + \rho \mu_2,$$

коэффициентом диффузии

$$\sigma^2 = (1 - \rho^2) \sigma_1^2 + \rho^2 \sigma_2^2$$

и коэффициентом корреляции между X_t и $X_t^{(2)}$ равным ρ . Заметим, что для вычисления условного математического ожидания, можно взять $W_{T'}^{(2)}$ вместо $X_{T'}^{(2)}$, поскольку эти случайные величины генерируют одну и ту же сигма-алгебру. Но такая замена должна сопровождаться также заменой функции $g(v)$ на $\tilde{g}(v) = \exp\{(\mu_2 T' + \sigma_2 v)\}$ в формуле, определяющей максимум ожидаемой полезности. В нашем примере закон распределения α , очевидно, не что иное, как $\mathcal{N}(0, T')$.

Покажем, что условия (H1) и (H2) выполнены. На самом деле, процессы $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ интегрируемы, и оба имеют строго положительную плотность распределения по отношению к мере Лебега. В частности,

как известно, $W_t^{(2)}$ имеет строго положительную плотность распределения по мере Лебега для $t > 0$

$$f(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2t} \right\},$$

принадлежащую к классу $C_b^{1,2}([\epsilon, \infty[)$ для любого $\epsilon > 0$. Кроме того, используя теорему о нормальной корреляции, получаем, что

$$p_T^v(X) = \frac{dP_T^v}{dP_T}(X) = \left(\frac{T'}{T' - \rho^2 T} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{(v - \rho X_T)^2}{T' - \rho^2 T} - \frac{v^2}{T'} \right] \right\}.$$

Запишем указанную плотность как стохастическую экспоненту

$$p_T^v(X) = \exp \left\{ \int_0^T \beta_s^{v,P} dX_s^c - \frac{1}{2} \int_0^T (\beta_s^{v,P})^2 ds \right\},$$

где X является каноническим процессом, чтобы получить, что

$$\beta_t^{v,P} = \rho \frac{v - \rho X_t^c}{T' - \rho^2 t}. \quad (4.1)$$

Теперь нам остается вычислить информационные количества, рассмотренные в разд. 2. Результаты вычислений приводятся ниже.

Предложение 6 (см. [10]). *Информационные количества, такие как энтропия, информация Кульбака–Лейблера, интегралы Хелмингера, вычисляются по формулам*

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(P^v | Q^{v,*}) &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{T'}{T' - \rho^2 T} \right) + \frac{T}{2} \left(\frac{\mu}{\sigma} + \frac{\rho v}{T'} \right)^2 - \frac{\rho^2 T}{2T'}, \\ \mathbf{I}(Q^{v,*} | P^v) &= -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{T'}{T' - \rho^2 T} \right) + \frac{TT'}{2(T' - \rho^2 T)} \left(\frac{\mu}{\sigma} + \frac{\rho v}{T'} \right)^2 + \frac{\rho^2 T}{2(T' - \rho^2 T)}, \\ \mathbf{H}_T^{(q)}(v) &= \left(\frac{T'}{T' - q\rho^2 T} \right)^{1/2} \left(\frac{T' - \rho^2 T}{T'} \right)^{q/2} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{q(1-q)T}{2(T' - q\rho^2 T)} \left(\frac{\mu}{\sigma} + \frac{\rho v}{T'} \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Далее, чтобы получить максимальную полезность, достаточно использовать теорему 2 из разд. 2 с законом распределения α , равным $\mathcal{N}(0, T')$.

5. Пример модели со скачками. Пусть $(W^{(1)}, W^{(2)})$ обозначают пару стандартных броуновских движений с коэффициентом корреляции ρ , $|\rho| \leq 1$. Пусть также N является однородным пуассоновским процессом с интенсивностью $\lambda > 0$, независимым от $(W^{(1)}, W^{(2)})$. Положим

$$\begin{aligned} X_t &= \mu_1 t + \sigma_1 W_t^{(1)} + N_t, \quad t \in [0, T], \\ X_t^{(2)} &= \mu_1 t + \sigma_1 W_t^{(2)}, \quad t \in [0, T'], \end{aligned}$$

где $T' > T$. В этом примере опцион будет участвовать в полезности как $g(X_{T'}^{(2)})$, где g является измеримой неотрицательной функцией на $\mathbf{R}$.

По тем же соображениям, что и в разд. 4, возьмем $W_{T'}^{(2)}$ вместо $X_{T'}^{(2)}$ с соответствующей заменой $g(v)$ на $\tilde{g}(v) = \exp\{(\mu_1 T' + \sigma_1 v)\}$. Так же как и в предыдущем примере, нетрудно проверить, что условия (Н1) и (Н2) выполнены. Более того,

$$p_T^v(X) = \frac{dP_T^v}{dP_T}(X) = \left(\frac{T'}{T' - \rho^2 T}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\sigma_1 v - \rho X_T^c)^2}{\sigma_1^2(T' - \rho^2 T)} - \frac{v^2}{T'}\right]\right\},$$

где X — канонический процесс, отвечающий $X^{(1)}$, а X^c — его непрерывная мартингальная часть. Запишем приведенное выше выражение в виде стохастической экспоненты, чтобы получить, что P -п.н. для всех $t \in [0, T]$

$$\beta_t^{v,P} = \frac{\rho(v\sigma_1 - \rho X_t^c)}{\sigma_1^2(T' - \rho^2 t)}. \quad (5.1)$$

Заметим, что в нашем случае $Y^{v,P} = 1$, так как процессы N и $W^{(2)}$ независимы.

В следующей лемме приводятся выражения для параметров Гирсанова $(\beta^{v,*}, Y^{v,*})$, отвечающих замене меры P^v на $Q^{v,*}$.

Лемма 1. *Параметры Гирсанова $(\beta^{v,*}, Y^{v,*})$ эквивалентной, мартингальной, минимальной по отношению к f -дивергенции меры $Q_T^{v,*}$ определяются из следующих соотношений:*

1) для логарифмической полезности и $f(x) = -\ln x$

$$\frac{\lambda}{\sigma_1^2}(Y_t^{v,*} - 1) + \frac{\mu_1}{\sigma_1^2} + \beta_t^{v,P} - \frac{1}{Y_t^{v,*}} + 1 = 0, \quad \beta_t^{v,*} = 1 - \frac{1}{Y_t^{v,*}},$$

2) для экспоненциальной полезности и $f(x) = x \ln x - x + 1$

$$\frac{\lambda}{\sigma_1^2}(Y_t^{v,*} - 1) + \frac{\mu_1}{\sigma_1^2} + \beta_t^{v,P} + \ln Y_t^{v,*} = 0, \quad \beta_t^{v,*} = \ln Y_t^{v,*},$$

3) для степенной полезности и $f(x) = -x^q/q$

$$\frac{\lambda}{\sigma_1^2}(Y_t^{v,*} - 1) + \frac{\mu_1}{\sigma_1^2} + \beta_t^{v,P} + \frac{1}{1-q}[1 - (Y_t^{v,*})^{q-1}] = 0,$$

$$\beta_t^{v,*} = \frac{1}{1-q}[1 - (Y_t^{v,*})^{q-1}].$$

Доказательство. Указанные результаты вытекают из теорем 3, 4 и 5. Для этого, выражаем λ_s^v через $Y_s^{v,*}$, и затем заменяем b на μ_1 , c и c_2 на σ_1^2 , и подставляем компенсатор меры скачков процесса N равный $\lambda \delta_{\{1\}}$, где $\delta_{\{1\}}$ есть дельта-функции Дирака в точке 1. Лемма доказана.

Введем новую выпуклую функцию $\hat{f}$ такую, что $\hat{f}(x) = f(x) + x^2/2$. Обозначим $\hat{u}$ дуальную к $\hat{f}$ функцию, в смысле преобразования Фенхеля–Лежандра. Наконец, обозначим $\hat{I} = (-\hat{f}')^{-1}$ производную функции $\hat{u}$.

Предложение 7. *Получаем следующие выражения для $Y^{v,*}$:*

1) *в случае логарифмической полезности*

$$Y_t^{v,*} = \frac{\sigma_1}{\sqrt{\lambda}} \hat{I} \left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{\lambda}} \left(\beta_t^{v,P} + \frac{\mu_1}{\sigma_1^2} + 1 - \frac{\lambda}{\sigma_1^2} \right) \right),$$

2) *в случае экспоненциальной полезности*

$$Y_t^{v,*} = \frac{\sigma_1^2}{\lambda} \hat{I} \left(\beta_t^{v,P} + \frac{\mu_1}{\sigma_1^2} + \ln \frac{\sigma_1^2}{\lambda} - \frac{\lambda}{\sigma_1^2} \right),$$

3) *в случае степенной полезности*

$$Y_t^{v,*} = \left(\frac{\sigma_1^2}{(1-q)\lambda} \right)^{1/(2-q)} \times \hat{I} \left(\left(\frac{\sigma_1^2}{(1-q)\lambda} \right)^{(1-q)/(2-q)} \left[(1-q) \left(\beta_t^{v,P} + \frac{\mu_1}{\sigma_1^2} - \frac{\lambda}{\sigma_1^2} \right) + 1 \right] \right).$$

Доказательство. Для доказательства этих формул, воспользуемся предыдущей леммой. Чтобы найти $Y = Y^{v,*}$, введем новую функцию U такую, что $Y = cU$, затем выберем c , чтобы выразить левую часть уравнений через функцию $\hat{I}$.

Предложение 8. *Для введенных ранее информационных количеств получаем следующие выражения:*

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(P_T^v | Q_T^v) &= \int_0^T \mathbf{E}_{P_T^v} \left[\frac{1}{2} \sigma_1^2 (\beta_t^{v,*})^2 - \lambda (\ln Y_t^{v,*} - Y_t^{v,*} + 1) \right] dt, \\ \mathbf{I}(Q_T^v | P_T^v) &= \int_0^T \mathbf{E}_{Q_T^v} \left[\frac{1}{2} \sigma_1^2 (\beta_t^{v,*})^2 + \lambda (Y_t^{v,*} \ln Y_t^{v,*} - Y_t^{v,*} + 1) \right] dt, \\ \mathbf{H}^{(q)}(v) &= \mathbf{E}_{R_T^v} \exp \left\{ \int_0^T \left(\frac{1}{2} (q(1-q)(\beta_t^{v,*})^2 - \lambda ((Y_t^{v,*})^q - qY_t^{v,*} + q - 1)) \right) dt \right\}. \end{aligned}$$

Доказательство. Выражения для информационных количеств получаются из формул, приведенных в предложениях 1, 2, 3 разд. 2.

Наконец, чтобы получить значение максимальной ожидаемой полезности, применим теорему 2 разд. 2, взяв закон распределения α равным $\mathcal{N}(0, T')$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Amendinger J., Becherer D., Schweizer M.* A monetary value for initial information in portfolio optimization. — *Finance Stoch.*, 2003, v. 7, № 1, p. 29–46.
2. *Bertoin J.* Lévy Processes. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996, 265 p.
3. *Bielecki T. R., Jeanblanc M.* Indifference pricing of defaultable claims. In «Indifference Pricing: Theory and Applications», ed. by Carmona R. Princeton: Princeton Univ. Press, 2009, p. 211–240.
4. *Biagini S., Frittelli M., Grasselli M.* Indifference price with general semimartingales. — *Math. Finance*, 2011, v. 21, № 3, p. 423–446.
5. *Carmona R.* Indifference Pricing: Theory and Applications. Princeton: Princeton Univ. Press, 2009, 414 p.
6. *Cawston S., Vostrikova L.* An f -divergence approach for optimal portfolios in exponential Lévy models. In «Inspired by Finance: The Musiela Festschrift», ed. by Kabanov Yu. et al. Cham: Springer, 2014, p. 83–101.
7. *Cawston S., Vostrikova L.* Lévy preservation and associated properties for the f -divergence minimal equivalent martingale measures. In «Prokhorov and Contemporary Probability Theory», ed. by Shiryaev A. N. et al. Berlin: Springer, 2013, p. 163–196.
8. *Eberlein E.* Jump-type Levy Processes. In «Handbook of Financial Series». Berlin: Springer-Verlag, 2007, p. 439–455.
9. *Eberlein E., Keller U.* Hyperbolic distributions in finance. — *Bernoulli*, 1995, v. 1, № 3, p. 281–299.
10. *Ellanskaya A., Vostrikova L.* Utility maximization and utility indifference price for exponential semimartingale models and Hara utilities. — *Труды МИАН*, 2014, т. 287, с. 75–103.
11. *Goll T., Ruschendorf L.* Minimax and minimal distance martingale measures and their relationship to portfolio optimisation. — *Finance Stoch.*, 2001, v. 5, № 4, p. 557–581.
12. *Gasbarra D., Valkeila E., Vostrikova L.* Enlargement of filtration and additional information in pricing models: Bayesian approach. In «From Stochastic Calculus to Mathematical Finance», ed. by Kabanov Yu., et al. Berlin: Springer-Verlag, 2006, p. 257–285.
13. *Henderson V., Hobson D.* Utility indifference pricing — an overview. In «Indifference Pricing: Theory and Applications», ed. by Carmona R. Princeton: Princeton Univ. Press, 2009, p. 44–74.
14. *Jacod J.* Grossissement initiale, hypothèse (H') et théorème de Girsanov. In «Grossissements de filtrations: exemples et applications», ed. by Jeulin T., Yor M., et al. Berlin: Springer, 1980.
15. *Jacod J.* Calcul Stochastique et problèmes de Martingales. Berlin: Springer, 1979.
16. *Жако́д Ж., Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 1, 2. М.: Физматлит, 1994.
17. *Musiela M., Zariphopoulou T.* An example of indifference prices under exponential preferences. — *Finance Stoch.*, 2004, v. 8, № 2, p. 229–239.
18. *Musiela M., Zariphopoulou T.* Indifference prices and related measures. The University of Texas at Austin, Technical report, 2001. <http://w.w.ma.utexas.edu/users/zariphop/>.
19. *Sato K.* Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999, 486 p.
20. *Stricker C., Yor M.* Calcul stochastique dépendant d'un paramètre. — *Warsch. ver. Geb.*, 1978, v. 45, p. 109–133.

Поступила в редакцию
30.III.2015