Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Глonti, О. Г. Пуртухия, Об одном интегральном представлении броуновского функционала, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2016, том 61, выпуск 1, 158–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp5047>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 13:52:49

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2016 г.

ГЛОНТИ О. А., ПУРТУХИЯ О. Г.*

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ
БРОУНОВСКОГО ФУНКЦИОНАЛА¹⁾

В данной работе предложен метод нахождения подынтегрального выражения в стохастическом интегральном представлении Кларка квадратично интегрируемого броуновского функционала F с дифференцируемым в смысле Маллявэна условным математическим ожиданием $\mathbf{E}[F | \mathbf{I}_t^B]$, $t < T$, где $(\mathbf{I}_t^B)$ — натуральная броуновская фильтрация. Предложенный метод позволяет определить явный вид подынтегрального выражения в случае, когда у функционала F нет производной Маллявэна. В качестве иллюстрации приводятся примеры.

Ключевые слова и фразы: броуновский функционал, производная Маллявэна, представление Кларка, формула Кларка–Окона.

1. Введение. Обозначения. Необходимые предварительные сведения.

На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathbf{I}, \mathbf{P})$ задано броуновское движение $B = (B_t)$, $t \in [0, T]$, и пусть $(\mathbf{I}_t^B)$, $t \in [0, T]$, — натуральная фильтрация, порожденная броуновским движением B . Мы будем рассматривать функционалы от броуновского движения (броуновские функционалы), т.е. случайные величины, которые являются $\mathbf{I}_T^B$ -измеримыми.

Обозначим $L_2([0, T] \times \Omega) = L_2([0, T] \times \Omega, \mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathbf{I}, \lambda \times \mathbf{P})$ (где $\mathcal{B}([0, T])$ — борелевская σ -алгебра на $[0, T]$ и λ — мера Лебега) множество квадратично интегрируемых процессов и $L_a^2([0, T] \times \Omega)$ — подпространство согласованных (относительно фильтрации $(\mathbf{I}_t^B)$, $t \in [0, T]$) процессов; $L_2([0, T]) = L_2([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \lambda)$. Пусть $L_{2,T}$ обозначает множество измеримых функций $u: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, таких, что $u(\cdot)\rho(\cdot, T) \in L_2 = L_2(R, \mathcal{B}(R), \lambda)$, где $\rho(x, T) = \exp\{-x^2/(2T)\}$.

Теорема А (см. [1]). Пусть F — квадратично интегрируемая $\mathbf{I}_T^B$ -измеримая случайная величина. Тогда существует единственный согласованный случайный процесс $u \in L_a^2([0, T] \times \Omega)$, такой, что

$$F = \mathbf{E} F + \int_0^T u_t dB_t. \quad (1)$$

* Тбилиский государственный университет им. Ив. Джавахишвили, департамент математики; Институт математики им. А. Размадзе АН Грузии, ул. Университетская, 13, Тбилиси 0143, Грузия; e-mail: o.purtukhia@gmail.com

¹⁾ Работа выполнена при частичной поддержке Национального научного фонда имени Шота Руставели (гранты N FR/308/5-104/12, FR/69/5-104/12).

Введем следующую норму:

$$\|F\|_{1,2} = \{\mathbf{E} F^2 + \mathbf{E} \|D \cdot F\|_{L_2([0,T])}^2\}^{1/2},$$

где оператор D — производная Маллявна и $D_{1,2}$ обозначает гильбертово пространство, которое является замыканием класса гладких броуновских функционалов S относительно нормы $\|\cdot\|_{1,2}$ (здесь S обозначает класс случайных величин, имеющих вид

$$F = f(B_{t_1}, \dots, B_{t_n}), \quad f \in C_p^\infty(\mathbf{R}^n), \quad t_i \in [0, T], \quad n \geq 1,$$

где $C_p^\infty(\mathbf{R}^n)$ — множество бесконечно дифференцируемых функций $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, таких, что f и все его частные производные имеют полиномиальный рост при $\|x\| \rightarrow \infty$).

Оказывается, что в случае, когда F принадлежит пространству $D_{1,2}$, подынтегральную функцию в представлении (1) можно рассматривать как опциональную проекцию случайной величины F .

Теорема В (формула интегрального представления Кларка–Окона [2]). *Если F дифференцируема в смысле Маллявна, $F \in D_{1,2}$, тогда имеет место следующее интегральное представление:*

$$F = \mathbf{E} F + \int_0^T \mathbf{E} (D_t F | \mathbf{I}_t^B) dB_t. \quad (2)$$

Теорема С (см. [3]). *Допустим, что функция $f \in L_{2,T/\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, и она имеет обобщенную производную $\partial f / \partial x$, такую, что $\partial f / \partial x \in L_{2,T/\beta}$, $0 < \beta < 1/2$, тогда имеет место следующее интегральное представление:*

$$f(B_T) = \mathbf{E} f(B_T) + \int_0^T \mathbf{E} \left(\frac{\partial f}{\partial x} (B_T) \middle| \mathbf{I}_t^B \right) dB_t. \quad (3)$$

Однако следует отметить, что даже в сравнительно простых случаях вычисление u_t , $t \geq 0$, по формуле (2) (см. также (3)) требует значительных усилий. Совершенно иной подход к нахождению явных формул для подынтегральной функции в представлении (1) был предложен в работах [4], [5]: для функционалов $F = F(\omega)$ от броуновского движения предлагается метод отыскания стохастических интегральных представлений, основанный на использовании формулы Ито и теоремы Леви для ассоциированного с F мартингала Леви ($M_t = \mathbf{E}(F | \mathbf{I}_t^B)$, $t \geq 0$). В качестве иллюстрации предложенного метода были рассмотрены так называемые функционалы «максимального» типа.

Теорема Д (см. [5, теорема 3]). *Для S_{h_T} справедливо следующее стохастическое интегральное представление:*

$$S_{h_T} = \frac{1}{2} \mathbf{E} S_T + \int_0^T \left[1 - \Phi \left(\frac{2S_t - B_t}{\sqrt{T-t}} \right) - \frac{S_t - S_{h_t}}{\sqrt{T-t}} \varphi \left(\frac{B_t}{\sqrt{T-t}} \right) \right] dB_t,$$

где $S_t = \max_{s \leq t} B_s$, $\mathbf{E} S_T = \sqrt{2T/\pi}$, $h_t = \sup\{0 < s \leq t: B_s = 0\}$, Φ и φ — функции распределения и плотности стандартного нормального распределения.

В данной работе мы исследуем проблему представления Кларка $\mathbf{I}_T^B$ -измеримой квадратично интегрируемой случайной величины F при новом (более слабом) условии дифференцируемости в смысле Маллявна: требуется дифференцируемость не самой случайной величины, а лишь ее условного математического ожидания $\mathbf{E}(F | \mathbf{I}_n^B)$, для некоторой последовательности $(t_n)_{n \geq 1}$ из $[0, T]$. Мы получим явный вид подынтегральной функции.

Поскольку из дифференцируемости по Маллявну самого функционала следует дифференцируемость его условных математических ожиданий относительно естественной фильтрации (см. [7, предложение 1.2.8]), это новое условие выполняется,

если сама случайная величина F дифференцируема в смысле Маллявэна, и наш результат является некоторым обобщением формулы Кларка–Окона. В качестве иллюстрации мы рассматриваем индикатор $F = I_{\{B_T \leq x\}}$ ($x \in \mathbf{R}$), который, на самом деле не имеет производной Маллявэна.

2. Теорема об интегральном представлении. Пусть F интегрируемая случайная величина. Обозначим

$$g_t = \mathbf{E}(F | \mathbf{I}_t^B), \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

Теорема. Допустим, что F — квадратично интегрируемая $\mathbf{I}_T^B$ -измеримая случайная величина и существует последовательность $(t_n)_{n \geq 1}$ в $[0, T]$, $t_n \uparrow T$, такая, что $g_{t_n} \in D_{1,2}$, $n \geq 1$. Тогда имеет место следующее интегральное представление:

$$g_T = F = \mathbf{E}F + \int_0^T v_s dB_s, \quad (5)$$

где

$$v_s = \lim_{t_n \rightarrow T} \mathbf{E}(D_s g_{t_n} | \mathbf{I}_s^B) \quad \text{в } L_2([0, T] \times \Omega).$$

Доказательство. Заметим, что семейство случайных величин $g = (g_t, \mathbf{I}_t^B)_{t \in [0, T]}$ является квадратично интегрируемым мартингалом. На самом деле, мы имеем

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbf{E} g_t^2 = \sup_{t \in [0, T]} \mathbf{E} [\mathbf{E}(F | \mathbf{I}_t^B)]^2 \leq \sup_{t \in [0, T]} \mathbf{E} [\mathbf{E}(F^2 | \mathbf{I}_t^B)] = \mathbf{E} F^2 < \infty,$$

т.е. семейство случайных величин $g = (g_t^2)_{t \in [0, T]}$ является равномерно ограниченным.

Следовательно, согласно предложению IV-2-7 из [8], семейство случайных величин $g = (g_{t_n}^2)_{t_n \in [0, T]}$ является равномерно интегрируемым и имеет место сходимость

$$\lim_{t_n \rightarrow T} g_{t_n} = g_T = F \quad \text{в } L_2(\Omega). \quad (6)$$

Далее, используя формулу интегрального представления Кларка–Окона (2) для всех t_n из условия теоремы, мы имеем

$$g_{t_n} = \mathbf{E}F + \int_0^{t_n} \mathbf{E}(D_s g_{t_n} | \mathbf{I}_s^B) dB_s. \quad (7)$$

С другой стороны, согласно свойству изометрии стохастического интеграла и принимая во внимание соотношения (1) и (7), из сходимости (6) мы заключаем, что

$$\begin{aligned} \lim_{t_n \rightarrow T} \mathbf{E} \int_0^{t_n} (\mathbf{E}(D_s g_{t_n} | \mathbf{I}_s^B) - v_s)^2 ds &= \lim_{t_n \rightarrow T} \mathbf{E} \left(\int_0^{t_n} (\mathbf{E}(D_s g_{t_n} | \mathbf{I}_s^B) - v_s) dB_s \right)^2 \\ &= \lim_{t_n \rightarrow T} \mathbf{E} (g_{t_n} - F)^2 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{t_n \rightarrow T} \int_0^{t_n} \mathbf{E}(D_s g_{t_n} | \mathbf{I}_s^B) dB_s = \int_0^T v_s dB_s \quad \text{в } L_2(\Omega)$$

и

$$v_s = \lim_{t_n \rightarrow T} \mathbf{E}(D_s g_{t_n} | \mathbf{I}_s^B) \quad \text{в } L_2([0, T] \times \Omega).$$

Теорема доказана.

Следует заметить, что (согласно теореме А) процесс v является модификацией процесса u .

Следствие. Пусть $F \in D_{1,2}$. Тогда из доказанной выше теоремы следует представление Кларка–Окона (2) и выполняется следующее соотношение:

$$\lim_{t_n \rightarrow T} \mathbf{E}(D_s g_{t_n} | \mathbf{I}_s^B) = \mathbf{E}(D_s \lim_{t_n \rightarrow T} g_{t_n} | \mathbf{I}_s^B) \quad \text{в } L_2([0, T] \times \Omega).$$

Доказательство. Так как $F \in D_{1,2}$, то согласно лемме 2.4(ii) из [7] $g_{t_n} = \mathbf{E}(F | \mathbf{I}_{t_n}^B) \in D_{1,2}$ для любой последовательности $t_n \uparrow T$ и

$$D_s(g_{t_n}) = \mathbf{E}(D_s F | \mathbf{I}_{t_n}^B) I_{[0, t_n]}(s) = \begin{cases} 0, & s > t_n; \\ \mathbf{E}(D_s F | \mathbf{I}_{t_n}^B), & 0 \leq s \leq t_n. \end{cases}$$

Поэтому, согласно доказанной выше теореме, используя телескопическое свойство условного математического ожидания (см. [6, гл. II, свойство 2.7.H*]), мы получим представление Кларка–Окона

$$\begin{aligned} F &= \mathbf{E} F + \int_0^T \lim_{t_n \rightarrow T} \mathbf{E}(D_s g_{t_n} | \mathbf{I}_s^B) dB_s \\ &= \mathbf{E} F + \int_0^T \lim_{t_n \rightarrow T} \{\mathbf{E}(D_s F | \mathbf{I}_s^B) I_{[0, t_n]}(s)\} dB_s \\ &= \mathbf{E} F + \int_0^T \mathbf{E}(D_s F | \mathbf{I}_s^B) dB_s. \end{aligned}$$

Подставляя в последнее выражение соотношение $F = \lim_{t_n \rightarrow T} g_{t_n}$ мы получим

$$\lim_{t_n \rightarrow T} \mathbf{E}(D_s(g_{t_n}) | \mathbf{I}_s^B) = \mathbf{E}\left(D_s\left(\lim_{t_n \rightarrow T} g_{t_n}\right) | \mathbf{I}_s^B\right).$$

Следствие доказано.

З а м е ч а н и е. Несмотря на то, что оператор стохастического дифференцирования не является непрерывным оператором, в нашем случае мы имеем «непрерывность» в некотором слабом смысле.

3. Примеры. В этом разделе приведены некоторые примеры.

П р и м е р 1. Рассмотрим квадратично интегрируемую $\mathbf{I}_T^B$ -измеримую случайную величину $F = F(x) = I_{\{B_T \leq x\}}$, $x \in \mathbf{R}$.

Хорошо известно, что индикатор события $A \in \mathbf{I}$ дифференцируем в смысле Маллявэна тогда и только тогда, когда вероятность $\mathbf{P}(A)$ равна нулю или единице (см. [7, гл. 1, предложение 1.2.6]). Следовательно, функционал $F(x) = I_{\{B_T \leq x\}}$, $x \in \mathbf{R}$, не является дифференцируемым в смысле Маллявэна.

Для нахождения g_t нам понадобится переходная вероятность броуновского движения

$$\mathbf{P}(B_t \in A | \mathbf{I}_s^B) = p(s, t, B_s, A),$$

где $0 \leq s \leq t$, A — борелевское подмножество пространства $\mathbf{R}$ и

$$p(s, t, x, A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_A \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}\right\} dy.$$

Хорошо известно, что для всех измеримых ограниченных функций f

$$\mathbf{E}(f(B_t) | \mathbf{I}_s^B) = \int_{\mathbf{R}} f(y) p(s, t, B_s, dy). \quad (8)$$

С помощью (8), получим, что

$$g_t = g_t(x) = \mathbf{E}(F(x) | \mathbf{I}_t^B) = \mathbf{E}(I_{\{B_T \leq x\}} | \mathbf{I}_t^B) = \Phi\left(\frac{x - B_t}{\sqrt{T-t}}\right),$$

где $\Phi(\cdot)$ — функция распределения стандартного нормального распределения.

Согласно правилу стохастического дифференцирования сложной функции (см. [7, гл. 1, предложение 1.2.3]) производная Маллявэна функционала g_t для всех $t \in [0, T)$ имеет вид

$$D_s g_t = D_s \left\{ \Phi\left(\frac{x - B_t}{\sqrt{T-t}}\right) \right\} = -I_{[0, t]}(s) \frac{1}{\sqrt{T-t}} \varphi\left(\frac{x - B_t}{\sqrt{T-t}}\right),$$

где $\varphi(\cdot)$ — плотность стандартного нормального распределения.

Воспользовавшись вновь соотношением (8), после стандартных расчетов, не трудно увидеть, что для всех $0 \leq s \leq t$ мы имеем²⁾

$$\begin{aligned}
 u_s(t) &= \mathbf{E}(D_s g_t | \mathbf{I}_s^B) = -I_{[0,t]}(s) \frac{1}{\sqrt{T-t}} \mathbf{E} \left(\varphi \left(\frac{x - B_t}{\sqrt{T-t}} \right) \middle| \mathbf{I}_s^B \right) \\
 &= -\frac{I_{[0,t]}(s)}{\sqrt{T-t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \left(\frac{x-y}{\sqrt{T-t}} \right) \exp \left\{ -\frac{(y-B_s)^2}{2(t-s)} \right\} dy \\
 &= -I_{[0,t]}(s) \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{2(T-t)} \right\} \exp \left\{ -\frac{(y-B_s)^2}{2(t-s)} \right\} dy \\
 &= -I_{[0,t]}(s) \exp \left\{ -\frac{(x-B_s)^2}{2(T-s)} \right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(T-s)}{2(T-t)(t-s)} \left(y - \frac{x(t-s) + B_s(T-t)}{T-s} \right)^2 \right\} dy \\
 &= -I_{[0,t]}(s) \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-s)}} \exp \left\{ -\frac{(x-B_s)^2}{2(T-s)} \right\} \\
 &= -I_{[0,t]}(s) \frac{1}{\sqrt{T-s}} \varphi \left(\frac{x-B_s}{\sqrt{T-s}} \right).
 \end{aligned}$$

Ясно, что в этом случае существует последовательность $t_n \in [0, T]$, $t_n \uparrow T$, такая, что

$$\lim_{t_n \rightarrow T} \mathbf{E}(D_s g_{t_n} | \mathbf{I}_s^B) = -I_{[0,T]}(s) \frac{1}{\sqrt{T-s}} \varphi \left(\frac{x-B_s}{\sqrt{T-s}} \right) \quad \text{в } L_2(\Omega),$$

и из доказанной выше теоремы мы получим следующее интегральное представление:

$$I_{\{B_T \leq x\}} = \Phi \left(\frac{x}{\sqrt{T}} \right) - \int_0^T \frac{1}{\sqrt{T-s}} \varphi \left(\frac{x-B_s}{\sqrt{T-s}} \right) dB_s, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (9)$$

Следует отметить, что формулу (9) можно также получить из теоремы С.

Проиллюстрируем нашу теорему следующим примером.

П р и м е р 2. Допустим, что $F = B_T^+ = \max(0, B_T)$.

В этом случае F имеет производную Маллявэна

$$D_t F = D_t B_T^+ = I_{\{B_T > 0\}} I_{[0,T]}(t)$$

и, используя формулу интегрального представления Кларка-Окона (2), а также соотношение (8), мы получим

$$B_T^+ = \mathbf{E} B_T^+ + \int_0^T \mathbf{E}(I_{\{B_T > 0\}} | \mathbf{I}_t^B) dB_t = \sqrt{\frac{T}{2\pi}} + \int_0^T \Phi \left(\frac{B_t}{\sqrt{T-t}} \right) dB_t. \quad (10)$$

С другой стороны, используя наш подход, имеем

$$\begin{aligned}
 g_t &= \mathbf{E}(B_T^+ | \mathbf{I}_t^B) = \mathbf{E}(I_{\{B_T > 0\}} B_T | \mathbf{I}_t^B) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_0^{\infty} x \exp \left\{ -\frac{(x-B_t)^2}{2(T-t)} \right\} dx.
 \end{aligned}$$

²⁾ Если $s > t$, тогда $u_s(t) = 0$, так как $D_s g_t = 0$ (см. [7, гл. 1, следствие 1.2.1]).

Далее, воспользовавшись правилом стохастического дифференцирования и стандартной техникой интегрирования, мы получим

$$\begin{aligned} D_s g_t &= I_{[0,t]}(s) \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_0^\infty \frac{x(x-B_t)}{T-t} \exp \left\{ -\frac{(x-B_t)^2}{2(T-t)} \right\} dx \\ &= I_{[0,t]}(s) \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{-B_t/\sqrt{T-t}}^\infty x(\sqrt{T-t}x + B_t) \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} \right\} dx \\ &= -I_{[0,t]}(s) \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \left\{ \sqrt{T-t} \int_{-B_t/\sqrt{T-t}}^\infty x d \left(\exp \left\{ -\frac{x^2}{2} \right\} \right) \right. \\ &\quad \left. + B_t \int_{-B_t/\sqrt{T-t}}^\infty d \left(\exp \left\{ -\frac{x^2}{2} \right\} \right) \right\} = I_{[0,t]}(s) \Phi \left(\frac{B_t}{\sqrt{T-t}} \right). \end{aligned}$$

Поэтому,

$$\mathbf{E}(D_s g_t | \mathbf{I}_s^B) = I_{[0,t]}(s) \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^\infty \Phi \left(\frac{x}{\sqrt{T-t}} \right) \exp \left\{ -\frac{(x-B_s)^2}{2(t-s)} \right\} dx$$

и, используя соотношение

$$\lim_{t \rightarrow T} \Phi \left(\frac{x}{\sqrt{T-t}} \right) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

легко заключить, что

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow T} \mathbf{E}(D_s g_t | \mathbf{I}_s^B) &= \lim_{t \rightarrow T} \left\{ I_{[0,t]}(s) \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^\infty \Phi \left(\frac{x}{\sqrt{T-t}} \right) \exp \left\{ -\frac{(x-B_s)^2}{2(t-s)} \right\} dx \right\} \\ &= I_{[0,T]}(s) \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-s)}} \int_{-\infty}^\infty \lim_{t \rightarrow T} \left[\Phi \left(\frac{x+B_s}{\sqrt{T-t}} \right) \exp \left\{ -\frac{x^2}{2(T-s)} \right\} \right] dx \\ &= I_{[0,T]}(s) \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-s)}} \int_{-B_s}^\infty \exp \left\{ -\frac{x^2}{2(T-s)} \right\} dx \\ &= I_{[0,T]}(s) \left[1 - \Phi \left(\frac{-B_s}{\sqrt{T-s}} \right) \right] = I_{[0,T]}(s) \Phi \left(\frac{B_s}{\sqrt{T-s}} \right). \end{aligned}$$

Следовательно, в этом случае мы непосредственно показали, что

$$\lim_{t \rightarrow T} \mathbf{E}(D_s g_t | \mathbf{I}_s^B) = \mathbf{E} \left(D_s \lim_{t \rightarrow T} g_t | \mathbf{I}_s^B \right) \quad \text{в } L_2([0, T] \times \Omega).$$

Но, согласно следствию теоремы, подобный предельный переход под знаком условного математического ожидания является следствием дифференцируемости по Маллявэну случайной величины F .

По нашему мнению интерес вызывает интегральное представление для широкого класса индикаторных функций. Рассмотрим классы функций такого типа и соответствующие представления.

П р и м е р 3. Пусть $h = h(x)$, $x \in \mathbf{R}$, является неубывающей функцией. Тогда индикатор $I_{\{h(B_T) \leq x\}}$ допускает представление

$$I_{\{h(B_T) \leq x\}} = \mathbf{P}(B_T \leq h^{-1}(x)) - \int_0^T \frac{1}{\sqrt{T-t}} \varphi \left(\frac{h^{-1}(x) - B_t}{\sqrt{T-t}} \right) dB_t. \quad (11)$$

Этот результат следует из примера 1, в частности, из формулы (9).

Аналогично, в случае, когда h невозрастающая функция, мы имеем

$$\begin{aligned} I_{\{h(B_T) \leq x\}} &= I_{\{B_T \geq h^{-1}(x)\}} = 1 - I_{\{B_T < h^{-1}(x)\}} \\ &= \mathbf{P}(B_T \geq h^{-1}(x)) + \int_0^T \frac{1}{\sqrt{T-t}} \varphi\left(\frac{h^{-1}(x) - B_t}{\sqrt{T-t}}\right) dB_t. \end{aligned}$$

Пример 4. Пусть $F = I_{\{B_T^* \leq x\}}$, где $B_T^* = \max_{0 \leq t \leq T} B_t$.

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B_T^* \leq x | \mathbf{I}_t^B) &= \mathbf{P}(B_T^* \leq x | B_t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \left(\int_{-(x-z)}^{x-z} \exp\left\{-\frac{u^2}{2(T-t)}\right\} du \right) \Big|_{z=B_t}, \quad x > 0, \end{aligned}$$

поэтому

$$g_t = g_t(x) = \mathbf{E}(I_{\{B_T^* \leq x\}} | \mathbf{I}_t^B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \left(\int_{-(x-z)}^{x-z} \exp\left\{-\frac{u^2}{2(T-t)}\right\} du \right) \Big|_{z=B_t}.$$

Производная Маллявэна функционала g_t будет иметь вид

$$D_s g_t = -I_{[0,t]}(s) \frac{2}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp\left\{-\frac{(x-B_t)^2}{2(T-t)}\right\}$$

при $x > 0$ и $D_s g_t = 0$ при $x \leq 0$.

Далее, следуя рассуждениям, изложенным в примере 1, легко убедиться, что справедливо представление

$$I_{\{B_T^* \leq x\}} = \mathbf{P}(B_T^* \leq x) - \int_0^T \frac{2}{\sqrt{2\pi(T-s)}} \exp\left\{-\frac{(x-B_s)^2}{2(T-s)}\right\} dB_s, \quad x > 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Clark J. M. C. The representation of functionals of Brownian motion by stochastic integrals. — Ann. Math. Stat., 1970, v. 41, № 4, p. 1282–1295; Correction notes: Corrections to «The representation of functionals of Brownian motion by stochastic integrals», 1971, v. 42, № 5, p. 1778.
2. Ocone D. Malliavin's calculus and stochastic integral representations of functionals of diffusion processes. — Stochastics, 1984, v. 12, № 3–4, p. 161–185.
3. Jaoshvili V., Purtukhia O. Stochastic integral representation of functionals of Wiener Processes. — Bull. Georgian Acad. Sci., 2005, v. 171, № 1, p. 17–20.
4. Ширяев А. Н., Йор М. К вопросу о стохастических интегральных представлениях функционалов броуновского движения. I. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 2, с. 375–385.
5. Граверсен С. Э., Ширяев А. Н., Йор М. К вопросу о стохастических интегральных представлениях функционалов броуновского движения. II. — Теория вероятн. и ее примен., 2006, т. 56, в. 1, с. 64–77.
6. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1980, 576 с.
7. Nualart D. The Malliavin calculus and related topics. Berlin: Springer-Verlag, 2006, 382 p.
8. Neveu J. Discrete-parameter martingales. New York: American Elsevier Publishing Co.; Amsterdam–Oxford: North-Holland Publishing Co., 1975, 236 p.

Поступила в редакцию
2.VIII.2014

Исправленный вариант
26.X.2015