Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Квантованная энтропия и ее связь с числами заполнения, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, том 45, выпуск 4, 759–762

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp505>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 17:24:52

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dixit A. Investment and hysteresis. — J. Econom. Perspectives, 1992, v. 6, p. 107–132.
2. Dixit A., Pindyck R. S. Investment under Uncertainty. Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.
3. Abramowitz M., Stegun I. A. (Eds). Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. New York: Wiley-Interscience, 1972, 1046 p.
4. Pindyck R. S. Investments of uncertain cost. — J. Financial Econom., 1993, v. 34, p. 53–76.
5. Pindyck R. S. Irreversibility, uncertainty, and investment, J. Econom. Literature, 1991, v. 29, p. 1110–1152.
6. Бозуслаская Е. В. Точное решение одной задачи оптимального управления инвестициями в диффузионной модели. — Успехи матем. наук, 1997, т. 52, № 2, с. 157–158.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973.
8. Дубинс Л. Е., Шенн Л. А., Ширяев А. Н. Оптимальные правила остановки и максимальные неравенства для процессов Бесселя. — Теория вероятн. и ее примен., 1993, т. 38, в. 2, с. 288–330.
9. Жанблан-Пике М., Ширяев А. Н. Оптимизация потока дивидендов. — Успехи матем. наук, 1995, т. 50, № 2, с. 25–46.
10. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Точные решения. М.: Наука, 1995.
11. Крамков Д. О., Мордецки Э. Интегральный опцион. — Теория вероятн. и ее примен., 1994, т. 39, в. 1, с. 201–211.

Поступила в редакцию
1.X.1998

© 2000 г.

МАСЛОВ В. П.*

КВАНТОВАННАЯ ЭНТРОПИЯ И ЕЕ СВЯЗЬ С ЧИСЛАМИ ЗАПОЛНЕНИЯ

В теории вероятностных пространств, факторизованных по группе эквивалентных событий, соответствующей классическому пределу Бозе-статистики, существенную роль играют случайные события, отвечающие числам заполнения.

При наличии кластеров энтропия в этих задачах может быть выражена через числа заполнения, а оператор энтропии через операторы рождения и уничтожения кластеров.

Ключевые слова и фразы: Бозе-статистика, энтропия, числа заполнения, кластеры.

Рассмотрим систему N классических частиц, гамильтониан которой имеет вид:

$$H_N(x_1, p_1, \dots, x_N, p_N) = \sum_{k=1}^N \frac{p_k^2}{2m} + \sum_{1 \leq k < l \leq N} V(x_k - x_l), \quad (1)$$

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой статистики, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия; e-mail: victor@maslov.msk.su

где $p_j \in \mathbf{R}^3$; $x_j \in \mathbf{T}^3$, $\mathbf{T}^3$ — трехмерный тор $L \times L \times L$; m — масса частиц, $V(x)$ — непрерывная четная функция на торе $\mathbf{T}^3$. Гамильтониану (1) отвечает уравнение Лиувилля:

$$i \frac{\partial}{\partial t} d(x_1, p_1, \dots, x_N, p_N, t) = \hat{\mathcal{L}}_N d(x_1, p_1, \dots, x_N, p_N, t), \quad (2)$$

где $d(x_1, p_1, \dots, x_N, p_N, t) \in L_2((\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3)^N)$ — функция полуплотности ([1]), симметричная относительно перестановки любых пар переменных (x_k, p_k) и (x_l, p_l) ; оператор $\hat{\mathcal{L}}_N$ имеет вид

$$\hat{\mathcal{L}}_N = -i \sum_{k=1}^N \frac{p_k}{m} \frac{\partial}{\partial x_k} + i \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^N \frac{\partial V}{\partial x_k} (x_k - x_l) \frac{\partial}{\partial p_k}. \quad (3)$$

В силу симметрии функции $d(x_1, p_1, \dots, x_N, p_N, t)$ и оператора $\hat{\mathcal{L}}_N$ относительно переменных (x_k, p_k) к уравнению (2) применим метод вторичного квантования. Пусть $\mathcal{H}$ — бозонное пространство Фока ([2]), элементами которого являются последовательности симметричных относительно переменных (x_k, p_k) функций $\{\varphi_n(x_1, p_1, \dots, x_n, p_n)\}$, $n = 0, 1, \dots$. Оператору $\hat{\mathcal{L}}_N$ поставим в соответствие вторично квантованный оператор $\hat{\mathcal{L}}$ в пространстве Фока $\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}} = & -i \iint dx dp \hat{b}^+(x, p) \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial x} \hat{b}^-(x, p) \\ & + \frac{i}{2} \iiint dx dp dy dk \hat{b}^+(x, p) \hat{b}^+(y, k) \\ & \times \left(\frac{\partial V}{\partial x} (x - y) \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial V}{\partial y} (y - x) \frac{\partial}{\partial k} \right) \hat{b}^-(y, k) \hat{b}^-(x, p), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\hat{b}^\pm(x, p)$ — операторы рождения и уничтожения ([2]) в пространстве $\mathcal{H}$. Решения уравнения (2) выражаются через решения уравнения

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t) = \hat{\mathcal{L}} \Phi(t), \quad \Phi(t) \in \mathcal{H}.$$

Впервые метод вторичного квантования был применен к уравнению Лиувилля для N тождественных частиц в работе [3]. Асимптотики решений уравнения Лиувилля при $V(x) \sim 1/N$ и $N \rightarrow \infty$ подробно исследованы с помощью метода вторичного квантования и теории комплексного роста в книге [1]. Совершенно аналогично этот метод может быть применен к уравнению Колмогорова–Феллера для большого числа частиц. Вторично квантованные уравнения такого типа были, в частности, использованы в статье [4] для вывода уравнения Больцмана. В работах [5], [6] для квантовых систем большого числа частиц было введено кластерное квантование, обобщающее вторичное квантование. Введем теперь кластерное квантование для классического уравнения Лиувилля. Пусть $n \geq 0$, рассмотрим пространство $\mathcal{F}_n$, элементами которого являются функции $\Psi(x_1, p_1, j_1, \dots, x_n, p_n, j_n)$ симметричные относительно перестановок пар переменных (x_k, p_k, j_k) и (x_l, p_l, j_l) , j — дискретная переменная, принимающая значения $1, 2, \dots$. Норма в пространстве $\mathcal{F}_n$ имеет вид

$$\|\Psi\|^2 = \sum_{j_1=1}^{\infty} \dots \sum_{j_n=1}^{\infty} \int \dots \int dx_1 dp_1 \dots dx_n dp_n |\Psi(x_1, p_1, j_1, \dots, x_n, p_n, j_n)|^2.$$

Введем пространство $\mathcal{F} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n$, состоящее из последовательностей функций $\Psi_n(x_1, p_1, j_1, \dots, x_n, p_n, j_n) \in \mathcal{F}_n$. Пространство $\mathcal{F}$ является частным случаем пространств Фока и в нем стандартно вводятся операторы рождения и уничтожения $\hat{B}^\pm(x, p, j)$. Рассмотрим следующий операторнозначный функционал $\hat{\rho}$, который зависит от функции $b(x, p, j)$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \iint dx dp |b(x, p, j)|^2 < \infty,$$

и принимает значения в множестве операторов в пространстве $\mathcal{H}$:

$$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \iint dx dp dy dk b(x, p, j) \hat{b}^2(x, p) b^*(y, k, j) \hat{b}^1(y, k) \right)^n \times \exp \left(- \iint dz dl \hat{b}^2(z, l) \hat{b}^1(z, l) \right), \quad (5)$$

где числа над операторами обозначают порядок их действия [7], «*» обозначает комплексное сопряжение. Функциональные аргументы у $\hat{\rho}$ будем опускать. Теперь любому оператору $\hat{A}$ в пространстве $\mathcal{H}$ поставим в соответствие оператор $\bar{\hat{A}}$ (осредненный оператор) в пространстве $\mathcal{F}$:

$$\bar{\hat{A}} = A \left[\hat{B}^2(x, p, j), \hat{B}^1(x, p, j) \right], \quad (6)$$

где функционал $A[B^*(\cdot), B(\cdot)]$ имеет вид

$$A[B^*(\cdot), B(\cdot)] = \exp \left(- \sum_{j=1}^{\infty} \iint dx dp B^*(x, p, j) B(x, p, j) \right) \text{Sp}(\hat{A}\hat{\rho}). \quad (7)$$

Формулы (6), (7) определяют кластерное квантование для системы классических частиц. Оператор (6) в случае, когда $\hat{A}$ равен единичному оператору в пространстве $\mathcal{H}$, обозначим $\bar{\hat{E}}$. Так же как в [6] рассмотрим функционал

$$S[B^*(\cdot), B(\cdot)] = \exp \left(- \sum_{j=1}^{\infty} \iint dx dp B^*(x, p, j) B(x, p, j) \right) \text{Sp} \left(\hat{\rho} \ln \left(\frac{\hat{\rho}}{\text{Sp} \hat{\rho}} \right) \right). \quad (8)$$

Поскольку $S[B^*(\cdot), B(\cdot)]$ не является аналитическим функционалом, он не определяет оператор в пространстве $\mathcal{F}$, однако этот функционал может быть регуляризован с помощью пуантелистической регуляризации ([6]) и после этого ему будет отвечать оператор квантованной энтропии:

$$\bar{\hat{S}} = S \left[\hat{B}^2(x, p, j), \hat{B}^1(x, p, j) \right]. \quad (9)$$

Классический вариант статистики Бозе, разработанный в [4], [8], [9], существенно использует технику чисел заполнения. Приведем связь введенного оператора энтропии и чисел заполнения. Пусть Φ — элемент пространства $\mathcal{F}$. Обозначим

$$\frac{\sum_{j=1}^{\infty} (\Phi, \hat{B}^+(x, p, j) \hat{B}^-(y, k, j) \Phi)}{(\Phi, \Phi)} = G(x, p, y, k), \quad (10)$$

числа заполнения, отвечающие Φ , имеют вид $n(x, p) = G(x, p, x, p)$, функция $G(x, p, y, k)$ является ядром оператора $\hat{G}$ в пространстве $L_2(\mathbf{T}^3 \times \mathbf{R}^3)$. Для матричных элементов регуляризованной пуантелистическим образом энтропии имеем

$$\frac{(\Phi, \bar{\hat{S}} \Phi)}{(\Phi, \bar{\hat{E}} \Phi)} = \text{Sp} \left(\hat{G} \ln \hat{G} - (1 + \hat{G}) \ln(1 + \hat{G}) \right). \quad (11)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маслов В. П., Шведов О. Ю. Метод комплексного роста. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
2. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986.

3. *Schonberg M.* Application of second quantization methods to the classical statistical mechanics. I. — *Nuovo Cimento*, 1952, v. 9, № 12, p. 1139–1182.
4. *Маслов В. П., Чеботарев А. М.* Уравнение типа Колмогорова–Феллера в факторизованном вероятностном пространстве. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1999, т. 44, в. 2, с. 373–383.
5. *Маслов В. П.* Об одном методе осреднения для квантовой задачи многих тел. — *Функц. анализ и его приложения*, 1999, т. 33, в. 4, с. 50–64.
6. *Маслов В. П.* Обобщение метода вторичного квантования на случай специальных тензорных произведений пространств Фока и квантование свободной энергии. — *Функц. анализ и его приложения*, 2000, т. 34, в. 4, с. 35–48.
7. *Маслов В. П.* Операторные методы. М.: Наука, 1973.
8. *Маслов В. П.* Коммутативная теория вероятностей, отвечающая парастатистикам. — *Матем. заметки*, 1998, т. 64, № 5, с. 791–793.
9. *Чеботарев А. М.* Вероятностные пространства Маслова, связанные с Бозе-статистиками. — *Матем. заметки*, 1999, т. 65, № 5, с. 746–759.

Поступила в редакцию
17.X.2000

© 2000 г.

РОМАНОВА Т. А.*

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ КРИТЕРИЕВ ПИТЕРБАРГА–ТЮРИНА ДЛЯ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ НЕЗАВИСИМОСТИ И ОДНОРОДНОСТИ

Проверка методами статистического моделирования аппроксимаций для статистических процедур проверки гипотез однородности и независимости.

Ключевые слова и фразы: статистики Уилкоксона и Манна–Уитни, ранговая корреляция, гауссовские поля.

1. Введение. Задачи проверки однородности двух выборок и независимости двух признаков относятся к основным проблемам математической статистики. Для одномерного случая эти проблемы решены как для гауссовских, так и для произвольных распределений. В многомерном случае известны решения этих задач в гауссовской постановке, но нет свободного от распределения решения, хотя оно имело бы важное практическое применение. В работах [1], [2] В. И. Питербарг и Ю. Н. Тюрин ввели статистические процедуры, основанные на ранжировании всевозможных линейных комбинаций наблюдаемых признаков. Методы, предложенные в [1], [2], все же зависят от распределения исходных наблюдений, но эта зависимость ограничивается присутствием мультипликативной константы в асимптотической формуле для хвостов вероятностных распределений тестовых статистик. Эта константа может быть оценена по выборке. Целью настоящей заметки является оценка методами статистического моделирования аппроксимаций полученных В. И. Питербаргом и Ю. Н. Тюриным для введенных ими статистических процедур проверки гипотез однородности и независимости. Для мультипликативной константы K предложена состоятельная оценка и дан ее численный анализ. Основной результат состоит в том, что предложенные аппроксимации дают хорошее приближение даже на умеренных уровнях значимости (начиная с 10%) с объемом выборки, начиная с 50.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия; e-mail: romanova-tanya@mail.ru